ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2012. máj. 21.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (20 pont)

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+7}{n^6+2}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

b) $b_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^n}{5 + 2^{2n}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$

Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

a.) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^6} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^6+2n^6}} < a_n < \sqrt[n]{\dfrac{n^2+7n^2}{1}} = \sqrt[n]{8}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1$

$\sqrt[n]{3} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{8} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$; $\to 1$

$\xRightarrow{\text{rendőrelv}} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ $\qquad$ 7

$\sum\limits^{\infty} a_n$ div., mert $a_n \not\to 0$, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. $\qquad$ 3

b.) $b_n = \dfrac{2\cdot 2^n + 3^n}{5 + 4^n} = \dfrac{2\left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \to \dfrac{0+0}{0+1} = 0$ $\qquad$ 5

$0 < b_n < \dfrac{2\cdot 3^n + 3^n}{4^n} = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$; $3\sum\limits^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konv. geom. sor

$\left(-1 < q = \frac{3}{4} < 1\right) \xRightarrow{\text{majoráns kr.}} \sum b_n$ konv. $\qquad$ 5

2. feladat (12 pont)

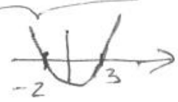
$$f(x) = (x^2 - 2x - 5)\, e^{2x}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken a függvény monoton!
Hol van lokális szélsőértéke és milyen jellegű?

an1v-120521/1

$$f'(x) = (2x-2)e^{2x} + (x^2-2x-5)e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}(x-1+x^2-2x-5) =$$
3

$$= 2e^{2x}(x^2-x-6) = 2\underbrace{e^{2x}}_{>0}\underbrace{(x-3)(x+2)}$$
2



2

x:	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,3)$	3	$(3,\infty)$	
f'	+	0	−	0	+	2
f	↗	lok. max.	↘	lok. min	↗	3

3. feladat (8+10=18 pont)

a) A állítás: f differenciálható x_0-ban
B állítás: f folytonos x_0-ban

Igaz vagy hamis az alábbi állítás?

a1) $A \Longrightarrow B$ a2) $B \Longrightarrow A$

Az igaz állítást bizonyítsa be!

b) Definiálja az $\operatorname{sh} x$ függvényt!
A tanult módon vezesse le az $\operatorname{sh} x$ és az $\operatorname{arsh} x$ függvény deriváltját!

a.) $\boxed{8}$

a1.) igaz 1

a2.) hamis 1

a1) bizonyítása:

f differenciálható x_0-ban $\Longrightarrow$

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h, \text{ ahol}$$

A független h-tól és $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ebből

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

Mindkét oldal limeszét véve:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\Big(\underbrace{f(x_0)}_{\downarrow\, f(x_0)} + \underbrace{A \cdot h}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot h}_{\downarrow\, 0\cdot 0 = 0}\Big)$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: határérték = helyettesítési érték, tehát f folytonos x_0-ban. 6

an1o-12 05 21/2.

b.) $\quad sh = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad$ 2

$\boxed{10}$

$$(sh\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x \quad 3$$

Az inverzfv. deriválási szabályával:

$$(arsh\,x)' = \frac{1}{(sh\,u)'\big|_{u=arsh\,x}} = \frac{1}{ch\,u\big|_{u=arsh\,x}} = \quad 3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+sh^2 u}\,\Big|_{u=arsh\,x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad 2$$

4. feladat (8 pont)

Írja fel a $[3,6]$ intervallumon az

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény alsó és felső közelítő összegét egyenlő részekre osztás esetén!

Létezik-e $\int\limits_3^6 f(x)\,dx$? Indokoljon!

$[a,b] = [3,6]$ $\qquad \Delta x_k = \dfrac{6-3}{n} = \dfrac{3}{n}$ (n egyenlő részre osztás)

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} -1 \cdot \frac{3}{n} = -1 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n}}_{=b-a=3} = -3 \quad 2$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \frac{3}{n} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} = 2 \cdot 3 = 6 \quad 2$$

$n \to \infty$: m. h. t. f. f. s.

$$\left.\begin{aligned} h &= \lim_{n\to\infty} s_F = \lim_{n\to\infty} (-3) = -3 \\ H &= \lim_{n\to\infty} S_F = \lim_{n\to\infty} 6 = 6 \end{aligned}\right\} \quad 2$$

Mivel $h \neq H \implies \int\limits_3^6 f(x)\,dx \nexists$ $\quad$ 2

5. feladat (8 pont)*

A kétszer differenciálható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$(x+1)\,y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4} = 0$$

implicit függvénykapcsolatot és $y(-1) = 1$.

Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek az $x_0 = -1$ pontban?

Írja fel a függvény $x_0 = -1$ pontbeli érintőegyenesének az egyenletét!

(−1,1) kielégíti az egyenletet:

$0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ ✓

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$1 \cdot y^3 + (x+1)\, 3y^2 y' + \frac{1}{4}\, 4y^3 y' - 0 = 0$ 3

$x = -1,\ y = 1$ -et behelyettesítve:

$1 + 0 + y'(-1) = 0 \implies y'(-1) = -1$ 1

$y'(-1) \neq 0 \implies$ nincs lok. szél. $x_0 = -1$-ben. 1

$y_e = y(-1) + y'(-1)(x-(-1)) = 1 - (x-1)$ 3

6. feladat (10 pont)*

a) $\int (5x+2)\, \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x = ?$

b) $\int x\, \mathrm{e}^{-2x^2}\, \mathrm{d}x = ?$

a) $\int (5x+2)\, e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}(5x+2)e^{-2x} + \frac{5}{2}\int e^{-2x} dx =$ 6

$u = 5x+2 \qquad v' = e^{-2x}$

$u' = 5 \qquad v = \frac{e^{-2x}}{-2}$

$= -\frac{1}{2}(5x+2)e^{-2x} + \frac{5}{2}\frac{e^{-2x}}{-2} + C$

b) $\int x\, e^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4}\underbrace{\int -4x\, e^{-2x^2}}_{f'e^f} dx = -\frac{1}{4}\, e^{-2x^2} + C$ 4

7. feladat (11 pont)*

a) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+6}\, \mathrm{d}x = ?$

b) $\int \frac{2x+6}{x^2+4x+6}\, \mathrm{d}x = ?$

a.) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+6} dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}}_{f'/f} dx =$ 5

$= \frac{1}{2} \ln (\underbrace{x^2+4x+6}_{>0}) + C$

anlo-120521/4

b.) $\boxed{6}$ $I_b = \int \underbrace{\frac{2x+4}{x^2+4x+6}}_{f'/f} dx + 2\int \frac{1}{x^2+4x+6} dx =$

$= \ln(\underbrace{x^2+4x+6}_{>0}) + 2 \underbrace{\int \frac{1}{(x+2)^2+2} dx}$ $=$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$

$= \ln(x^2+4x+6) + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C$

8. feladat (13 pont)*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+4}\, dx = ? \qquad (e^x = t \text{ helyettesítéssel dolgozzon!})$$

$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$ (2)

$\int \frac{t}{t^2+5t+4} \frac{1}{t} dt \underset{(2)}{=} \int \frac{1}{(t+1)(t+4)} dt$ (1)

$\frac{1}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}$ (1) $\ldots\ldots$ $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$

$\int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{t+4}\right) dt$ (3) $= \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{3}\ln|t+4| + C$ (3)

$I = \frac{1}{3}\ln(e^x+1) - \frac{1}{3}\ln(e^x+4) + C$ (1)

A *-gal jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (11 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-5}{x+3}$$

a) Keresse meg az alábbi határértékeket!

$\lim\limits_{x\to-3+0} f(x) = ?$, $\lim\limits_{x\to-3-0} f(x) = ?$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = ?$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$

a) $\lim\limits_{x \to -3 \pm 0} \operatorname{arctg} \frac{\overset{\to -8}{x-5}}{\underset{\to \pm 0}{x+3}} = \mp \frac{\pi}{2}$ (2+2)

$\mp\infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \operatorname{arctg} \frac{x-5}{x+3} \nexists$ (1)

$\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{x-5}{x+3}}_{= \frac{1-\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{x}} \to 1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (3)

b.) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^2} \frac{1 \cdot (x+3) - (x-5) \cdot 1}{(x+3)^2}$ (3)

10. feladat (9 pont)

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \mathrm{e}^{-2x^2} = ?$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = ?$

$\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{x^2 e^{-2x^2}}_{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{2x^2}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\overset{=1}{x}}{e^{2x^2}\, 4x} = 0$ (5)

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^1} = e^2$ (4)

an1v-120521/6.