- A zárthelyi megoldására 90 perc áll rendelkezésre.
- Helyszín: A–L: Q–I, M–Z: Q–II.
- Semmilyen segédeszköz nem használható.
- Minden lapra írja rá a nevét és a NEPTUN kódját.
- Az 1-4. feladatokat (Alkalmazott algebra) és az 5-8. feladatokat (Matematikai logika) külön kérjük beadni.

Alkalmazott algebra

1. feladat (5 pont)
Adja meg mátrixalakban az alábbi feladatot leíró lineáris egyenletrendszert: Adott $\mathbf{a}_1 = (7,-8,5,-4)$, $\mathbf{a}_2 = (-5,-6,-2,-3)$, $\mathbf{a}_3 = (-4,7,8,8)$ vektorokból az $\mathbf{u} = (-4,7,-2,0)$ vektor kikombinálása.

2. feladat (7 pont)
Oldja meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -36 \\ 2x_1 + 7x_2 - 9x_3 &= -70 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= -21 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol az együtthatókból alkotott mátrix LU-felbontása:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 7 & -9 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. feladat (10 pont)
Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} -11 & 12 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix spektrálfelbontását.

4. feladat (8 pont)
Mondja ki a valós mátrixok QR-felbontására vonatkozó tételt és definiálja a benne szereplő mátrix osztályokat.

Matematikai logika

5. feladat (8 pont)
Formalizáljuk a következő mondatokat abban az elsőrendű nyelvben, melyben pontosan a következő relációszimbólumok vannak:

$B(x)$	x bicikli
$R(x)$	x roller
$K(x)$	x kék
$D(x,y)$	x drágább, mint y.

(a) (4 pont) Van olyan roller, amely minden biciklinél drágább.

(b) (4 pont) Az összes kék bicikli drágább az összes kék rollernél.

6. feladat (8 pont)
Adjuk meg egy modelljét:

$$(\exists x \exists y \exists z \neg P(x,y,z)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (P(x,y,z) \Rightarrow P(y,z,x))).$$

7. feladat (8 pont)
A teljességi tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy

$$\{A \Rightarrow \neg C, C\} \vdash A \Rightarrow B.$$

8. feladat (6 pont)
Hozzuk prenex alakúra:

$$(\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y))) \Rightarrow \forall x (R(x, f(x))).$$