3. vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyenek $X, Y \sim Bin(2; \frac{1}{2})$ független, binomiális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(XY = 0)$ valószínűséget.

   Megoldás:

   (1 pont) Mivel X és Y értékkészlete a $\{0, 1, 2\}$ halmaz, így $XY = 0$ akkor teljesül, ha $X = 0$ vagy $Y = 0$,

   (1 pont) tehát a $\mathbb{P}(X = 0 \text{ vagy } Y = 0)$ valószínűséget kell meghatározni.

   (2 pont) A két eseményre vonatkozó szita-formula alapján

   $$\mathbb{P}(X = 0 \text{ vagy } Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(X = 0 \text{ és } Y = 0).$$

   (3 pont) Az X és Y függetlensége miatt a $\{X = 0\}$ és $\{Y = 0\}$ események függetlenek, és így a fenti kifejezés éppen $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)$.

   (2 pont) A binomiális eloszlás súlyfüggvényének képlete szerint tehát a keresett valószínűség

   $$2 \cdot \binom{2}{0} \frac{1}{2^2} - \left[\binom{2}{0} \frac{1}{2^2}\right]^2$$

   (1 pont) $= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{16} = 0{,}4375.$

2. A $[0; 1] \times [0; 1]$ egységnégyzetből kiválasztunk egy pontot egyenletesen véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy a választottt pont és a négyzet középpontjának távolsága nagyobb, mint 0,2?

   Megoldás:

   (1 pont) Az eseménytér az $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ halmaz.

   (1 pont) Az, hogy a választottt pont és a négyzet középpontjának távolsága nagyobb, mint 0,2, azt jelenti, hogy a pont kívül esik a $(0{,}5; 0{,}5)$ középpontú, 0,2 sugarú K körlapon.

(1 pont) Mivel a négyzet teljes egészében tartalmazza a K kört, a jó eseteket éppen az $\Omega \setminus K$ halmaz reprezentálja.

(3 pont) A geometriai valószínűségi mezőre vonatkozó képlet szerint $\mathbb{P}(\Omega \setminus K) = \dfrac{T(\Omega \setminus K)}{T(\Omega)}$.

(1 pont) Az egységnégyzet területe $T(\Omega) = 1$.

(1 pont) Mivel a K kör területe $T(K) = 0{,}2^2 \cdot \pi$, így

(1 pont) $T(\Omega \setminus K) = 1 - 0{,}2^2 \cdot \pi \approx 0{,}8743$.

(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(\Omega \setminus K) = 0{,}8743$.

3. Egy urnában 3 piros és 7 fehér golyó van. Véletlenszerűen kihúzunk ezekből 4 golyót visszatevés nélkül, jelölje X a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg az X várható értékét és szórását.

Megoldás:

(1 pont) A kihúzott piros golyók lehetséges száma 0, 1, 2 vagy 3, tehát $\text{ran}X = \{0, 1, 2, 3\}$.

(1 pont) Összesen 10 golyó van az urnában így $\binom{10}{4} = 210$-féleképp húzhatunk ki 4 golyót.

(1 pont) Ha nem húzunk pirosat, akkor a 7 fehér golyóból választunk 4-et, ezt pedig $\binom{7}{4} = 35$-féleképp tehetjük meg, tehát

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}.$$

(1 pont) Ha egy pirosat húzunk, akkor azt 3-féleképp választhatjuk, ettől függetlenül pedig $\binom{7}{3} = 35$-féleképp választhatjuk a maradék 3 fehér golyót, tehát

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3 \cdot 35}{210} = \frac{1}{2}.$$

(1 pont) Ha két pirosat húzunk, akkor azokat $\binom{3}{2} = 3$-féleképp választhatjuk, ettől függetlenül pedig $\binom{7}{2} = 21$-féleképp választhatjuk a maradék 2 fehér golyót, tehát

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3 \cdot 21}{210} = \frac{3}{10}.$$

(1 pont) Ha három pirosat húzunk, akkor kihúzzuk mindhárom piros golyót, a fehérek közül pedig még egyet, ezt pedig 7-féleképp választhatjuk, tehát

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}.$$

(1 pont) Az X várható értéke definíció szerint

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

(1 pont) A transzformált várható értékére tanult formula szerint

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{30} = 2.$$

(1 pont) Ebből $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - \dfrac{36}{25} = \dfrac{14}{25}$,

(1 pont) így $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\dfrac{14}{25}} \approx 0{,}7483$.

4. Legyen $X \sim Exp(3)$ egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ha tudjuk, hogy $X > 2$ teljesül, akkor ezen feltétel mellett mi a valószínűsége, hogy $X < 5$ is teljesül? Mennyi az $Y = 3X - 8$ változó eloszlásfüggvényének értéke az 1 helyen?

Megoldás:

(1 pont) A kérdéses valószínűség $\mathbb{P}(X < 5 \mid X > 2)$.

(1 pont) Mivel a feltételes valószínűség valószínűségi mérték, így a komplementerre áttérve (a folytonosságot is kihasználva) $\mathbb{P}(X < 5 \mid X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X > 5 \mid X > 2)$.

(2 pont) Mivel az exponenciális eloszlás örökifjú, így

$$\mathbb{P}(X > 5 \mid X > 2) = \mathbb{P}(X > 3 + 2 \mid X > 2) = \mathbb{P}(X > 3),$$

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(X < 5 \mid X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(X < 3)$.

(1 pont) Az utóbbi valószínűség éppen az X eloszlásfüggvényének értéke a 3 helyen, azaz

$$F_X(3) = 1 - e^{-3\cdot 3} = 1 - e^{-9} \approx 0{,}9999.$$

(1 pont) Az Y eloszlásfüggvénye az 1 helyen $F_Y(1) = \mathbb{P}(Y < 1)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(3X - 8 < 1)$

(1 pont) $\mathbb{P}(3X < 9) = \mathbb{P}(X < 3)$

(1 pont) $= 1 - e^{-9} \approx 0{,}9999$.

5. Egy társasjátékban minden egyes kör úgy zajlik, hogy a sorra kerülő játékos dob egy (hat oldalú) dobókockával, előrelép a bábujával a táblán annyi mezőt, amennyit dobott, majd végrehajtja annak a mezőnek az utasításait, amelyre érkezett. Tegyük fel, hogy az egyes dobások egymástól függetlenek, továbbá a játékban nincs olyan, hogy valaki kimarad egy körben (tehát minden játékos dob minden körben), valamint a játékosok bábui csak a dobások következtében mozoghatnak a táblán (tehát a mezők utasításai vagy egyéb szabályok nem mozgatják a bábukat). Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy egy adott játékos 50 kör alatt összesen legalább 180 mezőnyit lép előre?

Megoldás:

(1 pont) Jelölje $X_1, \ldots, X_{50}$ egy játékos dobásainak az értékét az első 50 körben. Ekkor az X_i-k együttesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók.

(1 pont) Előadáson kiszámoltuk, hogy $\mathbb{E}(X_i) = 3{,}5$ és $\mathbb{E}(X_i^2) = \dfrac{91}{6}$.

(Természetesen itt nem kell (de lehet) az előadásra hivatkozni, a várható érték definícióját ill. a transzformált várható értékére tanul formulát is lehet használni, vagy persze X_i^2 eloszlásának meghatározásával is kiszámolható $\mathbb{E}(X_i^2)$.)

(1 pont) Így

$$\mathbb{D}^2(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

(Valójában az előadáson is kiszámoltuk ezt a szórásnégyzetet, ha valaki esetleg erre hivatkozik, akkor is jár a fenti pont, az azt megelőző pontért pedig ebben az esetben elég a várható értéket megadni.)

(1 pont) Vagyis $\mathbb{D}(X) = \sqrt{35/12} \approx 1{,}7078$.

(1 pont) A játékos dobásainak száma 50 kör alatt $\sum_{i=1}^{50} X_i$,

(1 pont) így a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{50} X_i \geq 180) = 1 - \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{50} X_i < 180)$.

(Az előadáson a centrális határeloszlás tétele olyan alakban volt kimondva, amely a komplementer eseményre alkalmazható, azonban a tétel álltítása a de Moivre–Laplace-tételnél látott általánosabb alakban is érvényes, így tehát ha valaki nem tér át a komplementer eseményre, és a tételt helyesen alkalmazza, akkor is jár minden pont.)

(1 pont) A bal oldalt sztenderdizálva

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i < 180\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{50\cdot 35}{12}}} < \frac{180 - 50\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{50\cdot 35}{12}}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{50\cdot 35}{12}}} < \frac{5}{\sqrt{\frac{875}{6}}}\right).$$

(1 pont) A centrális határeloszlás tétele alkalmazható a fenti szituációban, mert az X_i-k függetlenek, azonos elószlásúak és véges pozitív szórásúak,

(1 pont) eszerint a fenti valószínűleg közelítőleg

$$\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{\frac{875}{6}}}\right) \approx \Phi(0{,}41)$$

(1 pont) $\approx 0{,}6591$, tehát a keresett valószínűség közelítőleg $1 - 0{,}6591 = 0{,}3409$.

6. Egy cukorkagyárban 50 dkg-os kiszerelésben gumicukrot csomagolnak. A havi minőségellenőrzés során meg akarták vizsgálni, hogy a raktárból kikerülő zacskókban valóban 50 dkg gumicukor van-e, ezért lemértek 5 darab véletlenül kiválasztott zacskót. Eredményül a következőket kapták: 51, 49, 54, 52, illetve 49 dkg. Tegyük fel, hogy az adatok normális eloszlású mintából származnak, valamint a gumicukros zacskók tömegének szórása 2 dkg. Elfogadható-e 95%-os megbízhatósági szinten az a hipotézis, hogy a zacskókban levő gumicukor tömege 50 dkg?

Megoldás:

(3 pont) A várható értékre vonatkozó nullhipotézis eldöntéséhez (mivel a háttéreloszlás normális ismert szórással) az $u(x_1, \ldots, x_5) = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}$ statisztikát kell kiszámolni, ahol $n = 5$ a minta elemszáma, $\overline{x}$ a mintaátlag, $\sigma = 2$ dkg a szórás, illetve $\mu_0 = 50$ dkg.

(1 pont) A mintaátlag:

$$\overline{x} = \frac{51 + 49 + 54 + 52 + 49}{5} = 51,$$

(1 pont) így tehát $u(x_1, \ldots, x_5) = \sqrt{5} \cdot \dfrac{51 - 50}{2} \approx 1{,}1180.$

Ha az általános képletek nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a képletekért járó pont is megadandó.

(3 pont) Az elfogadási tartomány $(-\Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}); \Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}))$, ahol Φ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Mivel $\varepsilon = 0,05$, így $\Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \approx 1{,}96$, így a fenti intervallum $(-1{,}96; 1{,}96)$.

(2 pont) Ebbe a statisztika értéke beleesik, tehát a nullhipotézist elfogadjuk.