ANALÍZIS(2) | **I. ZÁRTHELYI** | **2003. március 13.**
Műszaki Informatika szak | A kurzus | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Adja meg az

$$y' = (\operatorname{tg} y)\ \ln(x-3)$$

differenciálegyenlet $y(4) = \pi/6$ valamint az $y(4) = \pi$ kezdeti értékekhez tartozó megoldásait!

2. feladat (15 pont)

Határozza meg az

$$y' + \frac{4}{x}y = \frac{1}{x^5(x+3)}, \qquad x > 0$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

3. feladat (7 pont)

a) Írja fel az elsőrendű, lineáris homogén differenciálegyenlet általános alakját!

b) Vezesse be az

$$u = \frac{1}{y^3}$$

új változót az alábbi differenciálegyenletbe:

$$y' + y\ \sin x + y^4\ \cos x = 0$$

(Ne oldja meg a kapott egyenletet!)
Lineáris-e az így nyert differenciálegyenlet?

4. feladat (14 pont)

Tegyük fel, hogy az

$$y' = y^4 - x$$

differenciálegyenletnek minden $y(x_0) = y_0$ kezdeti értékhez létezik akárhányszor differenciálható megoldása! (Nem kell belátnia!)

a) Rajzolja fel ennek a differenciálegyenletnek 3 különböző izoklináját és jelölje be az iránymezőt ezen izoklinák pontjaiban!

b) Mutassa meg, hogy az $x_0 = 1,\ y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldásnak van legalább egy lokális szélsőértéke!

c) Van-e inflexiója az $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ ponton áthaladó megoldásnak az $x = 1$ helyen?

5. feladat (10 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 4y' = 0$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenletek egy-egy partikuláris megoldását a $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ paraméter tetszőleges értéke esetén:

$$y'' - 4y' = 3 + \sin \beta x$$

$$y'' - 4y' = e^{\beta x}$$

(Nem kell megkeresnie!)

6. feladat (12 pont)

Írja fel a

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y \,, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + 2y$$

differenciálegyenlet-rendszer összes valós megoldását!

7. feladat (20 pont)

a) Mit nevezünk a H halmazra vonatkozó uniform normának? Mikor mondjuk, hogy f_n uniform normában konvergál f-hez?

b) Legyen

$$f_n(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x + 3\,x^2\,n^2}{\mathrm{e}^x + x\,n^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \,?$

c) Mutassa meg, hogy a fenti f_n egyenletesen konvergál az f-hez a $[3, 5]$ intervallumon!

d) Adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen a fenti f_n nem konvergál egyenletesen az az f-hez! Az indokláshoz felhasznált tételt írja le!

8. feladat (10 pont)

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k\,x^2 + 3^k} = ?$$

A felhasznált tételeket írja le!

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 4y' + 3y = 9x^2$$

03.03.13. A

(1) $y' = \operatorname{tg} y \ln(x-3)$

$\boxed{12}$ $y' = \frac{\sin y}{\cos y} \ln(x-3)$, $y \equiv k\pi$ (1)

$x>3$, $y \equiv \pi$ kielégíti az $y(4)=\pi$ kezdeti feltételt. (1)

Ha $\sin y \neq 0$, akkor

$\frac{\cos y}{\sin y} \cdot y' = \ln(x-3)$ (2)

$\int \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = \int \ln(x-3)\, dx$ (1)

$\ln|\sin y| \underset{(2)}{=} x\ln(x-3) - \int \frac{x}{x-3}\, dx \underset{(2)}{=} x\ln(x-3) - x - (\ln(x-3))3 + C$ (1)

$y(4) = \frac{\pi}{6}$

$\ln \sin\frac{\pi}{6} = 4\ln 1 - 4 - 3\ln 1 + C$ (1)

$4 - \ln 2 = C$

$\ln|\sin y| = (x-3)\ln|x-3| - x + 4 - \ln 2$ (1)

(2) (I) $y' + \frac{4}{x} y = \frac{1}{x^5(x+3)}$, $x>0$

$\boxed{15}$ (H) $y' + \frac{4}{x} y = 0$ (1)

$y' = -\frac{4}{x} y$ $\qquad y = \frac{1}{x^4}$ egyik nem nulla megoldás. (1)

$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{4}{x}\, dx$ (1) $\qquad \underbrace{y = \frac{C}{x^4}}$, $C \in \mathbb{R}$ (1)

$\ln y = -4\ln x$ (1)

a Homogén általános megoldása.

$y_{H\acute{a}lt} = \frac{C}{x^4}$

(2) folytatás: $y_p = C(x) \cdot \frac{1}{x^4}$ (1)

(I) $\frac{C'}{x^4} - 4\frac{C}{x^5} + \frac{4}{x} \cdot C\frac{1}{x^5} = \frac{1}{x^5(x+3)}$ (2)

$C' = \frac{1}{x(x+3)}$, $C = \int \frac{1}{x(x+3)}\, dx \underset{(1)}{=} \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}\, dx$

$1 = A(x+3) + Bx$ (1)

$x=0$ $\quad 1 = 3A$, $\quad A = \frac{1}{3}$. (1)

$x=-3$ $\quad 1 = -3B$ $\quad B = -\frac{1}{3}$ (1)

$C = \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln(x+3)$ (1) $\qquad (x>0)$

$y_p = \frac{\frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln(x+3)}{x^4}$ (1)

$y_{I\acute{a}lt} = y_{H\acute{a}lt} + y_p \underset{(1)}{=} \frac{c + \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln(x+3)}{x^4}$

$y_{I\acute{a}lt} = \frac{c}{x^4} + \ln\sqrt[3]{\frac{x}{x+3}}$, $\quad x>0$, $C \in \mathbb{R}$.

(3) $y' + g(x) y = \overset{=0}{h(x)}$ (1) $\quad g, h$ folytonos.

$\boxed{7}$ $u = y^{-3}$ $\qquad u' = -3y^{-4} \cdot y'$ (2)

$y' + y\sin x + y^4\cos x = 0$

$-\frac{1}{3} y^4 u' + y\sin x + y^4 \cos x = 0$ (1)

$-\frac{1}{3} u' + \frac{1}{y^3}\sin x + \cos x = 0$

$-\frac{1}{3} u' + u\sin x = -\cos x$ (1)

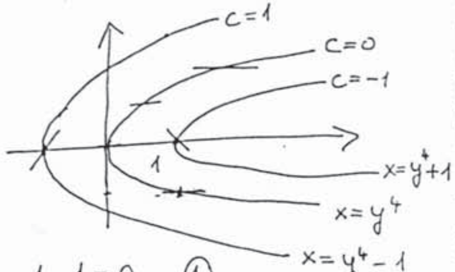
$u' \underbrace{- 3\sin x}_{g(x)} \cdot u = \underbrace{3\cos x}_{h(x)}$ (1) $\quad$ lin. elsőrendű (1)

(4) $y' = y^4 - x$, $c = y^4 - x$ izoklinák (1)

a) $\boxed{7}$ $c=0$, $y^4 = x$ (1) rajz (1)

$c=1$ $y^4 = 1+x$ (1) rajz (1)

$c=-1$ $y^4 = -1+x$ (1) rajz (1).



b) $\boxed{5}$ $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ $y'(1) = 1 - 1 = 0$ (1)

$y'' = 4y^3 \cdot y' - 1$ (1) $y''(1) = -1$ (1)

Ha $y'(1) = 0$ és $y''(1) \neq 0 \Longrightarrow$ 1-ben lokális szélsőérték van. (2)

c) $\boxed{2}$ $y''(1) \neq 0 \Longrightarrow$ nem teljesül az inflexió létezésének szükséges feltétele $\Longrightarrow$ 1-ben nincs inflexió (2).

y"(1) = 479

(5) $\boxed{10}$ a) $y'' - 4y' = 0$, $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ (1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ (1)

$y = e^{0x}$ (1), $y = e^{4x}$ (1) megoldások, $y_{Hált} = c_1 e^{0x} + c_2 e^{4x}$ (1)

b) $y'' - 4y' = 3$ $y_p = cx$ (1)

$y'' - 4y' = \sin\beta x$ $y_p = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ (1)

$y'' - 4y' = 3 + \sin\beta x$ $y_p = cx + a\cos\beta x + b\sin\beta x$ (1)

$y'' - 4y' = e^{\beta x}$, $\beta \neq 4$, $y_p = a e^{\beta x}$ (1)

$y'' - 4y' = e^{\beta x}$, $\beta = 4$, $y_p = a x e^{\beta x}$ (1)

(6) $\boxed{12}$ $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $(2-\lambda)^2 + 9 = 0$ (2)

$\lambda_{12} = 2 \pm 3j$ (1).

$\lambda_1 = 2 + 3j$ $\begin{bmatrix} -3j & +9 \\ -1 & -3j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2) $s_1 = 3j$, $s_2 = -1$ (1)

$\underline{x} = e^{\lambda t} \underline{s}$ (1) $= e^{(2+3j)t} \begin{bmatrix} 3j \\ -1 \end{bmatrix} = e^{2t}(\cos 3t + j \sin 3t) \begin{bmatrix} 3j \\ -1 \end{bmatrix} =$ (1)

$\underline{x} = e^{2t} \begin{bmatrix} -3\sin 3t + 3\cos 3t\, j \\ -\cos 3t - \sin 3t\, j \end{bmatrix}$ (1)

$\underline{x}_1 = e^{2t} \begin{bmatrix} -3\sin 3t \\ -\cos 3t \end{bmatrix}$ (1) és $\underline{x}_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 3\cos t \\ -\sin 3t \end{bmatrix}$ (1) valós megoldások

$\underbrace{\underline{x} = c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2}_{\text{valós ált. m.o. (1)}} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -3\sin 3t \\ -\cos 3t \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 3\cos t \\ -\sin 3t \end{bmatrix}$

$x = e^{2t}(-3c_1 \sin 3t + c_2\, 3\cos t)$

$y = e^{2t}(-c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(7) b) $\boxed{20}$ $\boxed{3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^x + 3x^2n^2}{e^x + xn^2} = \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \neq 0 \quad (2) \\ 2, & \text{ha } x = 0 \quad (1) \end{cases} = f(x)$$

c) $\boxed{9}$

$$\|f_n - f\|_{[3,5]} = \sup_{x\in[3,5]} |f_n(x) - f(x)| = \ (1)$$

$$= \sup_{x\in[3,5]} \left| \frac{2e^x + 3x^2n^2}{e^x + xn^2} - 3x \right| \ (1) = \sup_{[3,5]} \left| \frac{2e^x - 3xe^x}{e^x + xn^2} \right| = \ (1)$$

$$= \sup_{x\in[3,5]} \frac{(3x-2)e^x}{e^x + xn^2} \ (1) \leq \frac{(3\cdot 5 - 2)e^5}{3\cdot n^2} \ (2) \to 0 \ (1)$$

Így a rendőrelv alapján $\|f_n - f\|_{[3,5]} \to 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$ (1)

f_n egyenletesen konvergál a $[3,5]$-ön (1) Ugyanis

((T) f_n egyenletesen -"- a H halmazon $\Longleftrightarrow$ f_n a H-on vett uniform normában konvergál.)

d) $\boxed{4}$ f_n a $[0,1]$-on (1) nem konvergál egyenletesen, mert itt f_n folytonos (1), de f nem folytonos (1) a 0-ban. (1)

a) $\boxed{4}$ (D) g korlátos a H-on, $\|g\| = \sup_{x\in H} |g(x)|$ (2)

(D) f_n uniform normában konvergál f-hez, ha

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \quad (2)$$

(8) $\boxed{10}$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{kx^2 + 3^k}}$$ egyenletesen konvergens a W. krit. alapján.

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{kx^2 + 3^k} \ (1) \leq \frac{1}{3^k} \ (1) = b_k \quad \text{ahol } \sum^{\infty} b_k$$ konv. geom. sor. (1)

f_k folyt. és $\sum^{\infty} f_k$ egy. konv. $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{kx^2 + 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\cos kx}{kx^2 + 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \ (1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

(T) W. krit. Ha $|f_k(x)| \leq b_k$ $\forall x \in H$, $k = 1, 2, \dots$ és ha $\sum_{1}^{\infty} b_k$ konv $\Longrightarrow$ $\sum^{\infty} f_k(x)$ a H-on egyenletesen konv. (2)

(T) Ha f_k folyt $K_{x_0,\delta}$-ban és ha $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konv. a $K_{x_0,\delta}$-ban, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x) \quad (2)$$

$\boxed{10}$ (9) $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ (1) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ (1) $y_{H\,ált} = C_1e^x + C_2e^{2x}$ (2)

(3) $y_p = ax^2 + bx + c$ (1)

(−4) $y_p' = 2ax + b$

(1) $y_p'' = 2a$

$3ax^2 + x(3b - 8a) + (3c - 4b + 2a) = 9x^2$ (2)

$a = 3$ $\quad 3b = 8a$ $\quad 3c - 4b + 2a = 0$

$b = 8$ $\quad 3c = 4b - 2a = 26$

$c = \frac{26}{3}$

$y_p = 3x^2 + 8x + \frac{26}{3}$ (2)

$y_{I\,ált} = y_{H\,ált} + y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3x^2 + 8x + \frac{26}{3}$ (1)