ANALÍZIS(2) VIZSGAZÁRTHELYI α változat 2008. május 29.
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása az
$$y' = y^3 - x^2$$
differenciálegyenletnek és átmegy a $(-1,1)$ ponton.

Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = -1$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

2. feladat (7 pont)

Írjon fel egy olyan lineáris, konstans együtthatós, legalacsonyabbrendű, homogén differenciálegyenletet, amelynek megoldásai:
$$e^{-2x}\sin x \quad \text{és} \quad 5x\,.$$

3. feladat (9 pont)

Mondja ki és bizonyítsa be a numerikus sorokra tanult gyökkritériumot!
(Nem a limeszes alakról van szó.)

4. feladat (16 pont)

a) Mit értünk binomiális soron?
Bizonyítsa be a konvergenciasugárra tanult állítást!

b) Írja fel az
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+2x^2}}$$
függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és határozza meg a konvergencia sugarát!
$a_6 = ?$ (Elemi műveletekkel írja fel!)

5. feladat (17 pont)

$$f(x,y) = (y^2+1)\,(x^5+x)\,, \qquad P_0(-1,0)$$

a) $\operatorname{grad} f|_{P_0} = ?$

b) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -4\underline{i} + 3\underline{j}$

c) Írja fel a P_0 pontbeli érintősík egyenletét!

d) *
Adjon szükséges feltételt lokális szélsőérték létezésére differenciálható kétváltozós függvény esetére!
Van-e lokális szélsőértéke a fenti f-nek?

6. feladat (16 pont)*

a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt!
$$T = \{(x,y): \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4\,; \quad x \le 0\,; \quad y \le 0\}$$

b) Írja fel a Jacobi determinánst polártranszformáció esetére és határozza meg az értékét!

c)
$$\iint_T \frac{1}{(2x^2+2y^2+3)^5}\, dT = ?$$

7. feladat (9 pont)*

Határozza meg a $\beta > 0$ paraméter értékét úgy, hogy az
$$u = e^{2x}\cos(\beta y) + x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re} f$$
legyen, ahol f reguláris a komplex síkon!

$f'(1 + j\,\frac{\pi}{2}) = ?$

8. feladat (14 pont)*

Határozza meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!
$$I_1 = \oint_{|z+1|=1} \frac{\operatorname{ch} jz}{(z-3)^2}\, dz\,, \qquad I_2 = \oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{ch} jz}{(z-3)^2}\, dz$$

A felhasznált tételeket írja le!

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y'' + 6y' + 9y = 0$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

10. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi hatványsor konvergencia tartományát!
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n^3}{8^{n+1}}\,(x-2)^n$$

ANALÍZIS(1) — Mérnök Informatikus szak

VIZSGAZÁRTHELYI α

2008. május 29. Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása az

$$y' = y^3 - x^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy a $(-1, 1)$ ponton. Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = -1$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

1, Legyen a $P(-1,1)$ ponton átmenő megoldás $\varphi(x)$. $\underline{\varphi(-1) = 1}$

$\varphi'(-1) = 1^3 - (-1)^2 = \underline{0}$ 1

$y'' = 3y^2y' - 2x$ 1 ; $\varphi''(-1) = 3\cdot 1^2 \cdot 0 - 2\cdot(-1) = \underline{2}$ 2

$y''' = 6y(y')^2 + 3y^2y'' - 2$ 2 ; $\varphi'''(-1) = 6\cdot 1\cdot 0^2 + 3\cdot 1^2 \cdot 2 - 2 = \underline{4}$ 2

$T_3(x) = \varphi(-1) + \varphi'(-1)(x+1) + \frac{\varphi''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{\varphi'''(-1)}{3!}(x+1)^3 =$ 2

$= \underline{\underline{1 + (x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^3}}$ 2

2. feladat (7 pont)

Írjon fel egy olyan lineáris, konstans együtthatós, legalacsonyabbrendű, homogén differenciálegyenletet, amelynek megoldásai:

$$e^{-2x}\sin x \quad \text{és} \quad 5x\,.$$

2, A karakterisztikus egyenlet gyökei; gyöktényezői

$e^{-2x} \sin x \implies \lambda_{12} = -2 \pm i$ 2 $\implies (\lambda - (-2+i))(\lambda - (-2-i)) = (\lambda+2)^2 + 1$

$5x \implies \lambda_{34} = 0$ 2 $\implies \lambda^2$

Karakterisztikus polinom:

$\lambda^2((\lambda+2)^2 + 1) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2$ 2

$\underline{\underline{y^{(4)} + 4y''' + 5y'' = 0}}$ 1

3. feladat (9 pont)

Mondje ki és bizonyítsa be a numerikus sorokra tanult gyökkritériumot!
(Nem a limeszes alakról van szó.)

$\underline{\text{T.}}$ Legyen $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

1 i, Ha $\exists\, c < 1$, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{a_n} \leq c < 1$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

1 ii, Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$

($\underline{\text{Megj.}}$: i, -ben elég ha $\forall n \geq N_0 \in \mathbb{N}$ -re teljesül a feltétel
ii, -ben elég, ha végtelen sok n-re ——— ——— ———)

$\underline{\text{B.}}$: i, $\sqrt[n]{a_n} \leq c < 1 \implies a_n \leq c^n$

3 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c} < \infty$, ha $0 \leq c < 1$ ✓

ii, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \geq 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

1 (nem teljesül a sor konvergenciájának szükséges feltétele)

4. feladat (16 pont)

a) Mit értünk binomiális soron?
Bizonyítsa be a konvergenciasugárra tanult állítást!

b) Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és határozza meg a konvergencia sugarát!
$a_6 = ?$ (Elemi műveletekkel írja fel!)

a, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ 2 , $|x| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

$\boxed{8}$

Hányados krit.: $\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\cdot n!}{(n+1)!\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 1$ 1 2

$\implies R = \frac{1}{1} = 1$ 2

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1+2x^2}}=(1+2x^2)^{-1/5}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/5}{n}2^n x^{2n}$ (4), ha $|2x^2|<1$,

azaz ha $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}=R$ (2)

$a_6=2^3\cdot\binom{-1/5}{3}=8\cdot\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\left(-\frac{11}{5}\right)}{3\cdot 2}=-\frac{88}{125}$ (2)

5. feladat (17 pont)

$$f(x,y)=(y^2+1)(x^5+x)\qquad P_0(-1,0)$$

a) $\operatorname{grad} f|_{P_0}=?$

b) $\left.\frac{df}{de}\right|_{P_0}=?$, ha $\underline{e}\parallel -4\underline{i}+3\underline{j}$

c) Írja fel a P_0 pontbeli érintősík egyenletét!

d) *

Adjon szükséges feltételt lokális szélsőérték létezésére differenciálható kétváltozós függvény esetére!

Van-e lokális szélsőértéke a fenti f-nek?

a, $f'_x(x,y)=(y^2+1)(5x^4+1)$ (2); $\quad f'_x(P_0)=1\cdot(5(-1)^4+1)=6$

$f'_y(x,y)=2y(x^5+x)$ (2); $\quad f'_y(P_0)=0$

$\operatorname{grad} f|_{P_0}=6\underline{i}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$ (2)

b, $|-4\underline{i}+3\underline{j}|=\sqrt{16+9}=5$; $\quad \underline{e}=-\frac{4}{5}\underline{i}+\frac{3}{5}\underline{j}$ (2)

$\left.\frac{df}{de}\right|_{P_0}=\operatorname{grad} f|_{P_0}\cdot\underline{e}=6\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+0\cdot\frac{3}{5}=-\frac{24}{5}$ (2)

c, $z_0=f(P_0)=1\cdot(-2)=-2$; $\quad (z+2)=6(x+1)$ $\quad \mid z-z_0=f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)$

d, Ha f diff.-ható, és P_0-ban lokális szélsőértéke van, akkor $\operatorname{grad} f|_{P_0}=0$ (2)

$\left.\begin{aligned}f'_x(x,y)&=\overbrace{(y^2+1)}^{>0}\overbrace{(5x^4+1)}^{>0}=0\\ f'_y(x,y)&=2y(x^5+x)=0\end{aligned}\right\}$ Mivel $f'_x(x,y)>0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, ezért f-nek nincs lokális szélsőértéke! (2)

6. feladat (16 pont)*

a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt!

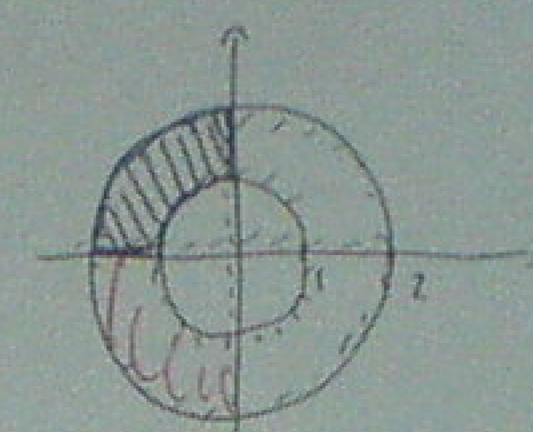
$$T=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4;\ \ x\le 0;\ \ y\le 0\}$$

b) Írja fel a Jacobi determinánst polártranszformáció esetére és határozza meg az értékét!

c)

$$\iint_T \frac{1}{(2x^2+2y^2+3)^5}\,dT=?$$

a,



$1\le r\le 2$; $\quad \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$ (4)

b, $x=r\cos\varphi$, $\quad y=r\sin\varphi$

$J=\begin{vmatrix}x'_r & x'_\varphi\\ y'_r & y'_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=$ (3)

$=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r$

c, (7) $\iint_T\frac{1}{(2x^2+2y^2+3)^5}\,dT=\int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{r=1}^{2}(2r^2+3)^{-5}\cdot r\,dr\,d\varphi=$ (2)

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{(2r^2+3)^{-4}}{-4}\right]_{r=1}^{2}$ (3) $=\frac{\pi}{8}\cdot\left(\frac{1}{(-4)11^4}-\frac{1}{(-4)5^4}\right)=\frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{5^4}-\frac{1}{11^4}\right)$ (2)

7. feladat (9 pont)*

Határozza meg a $\beta>0$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$u=e^{2x}\cos(\beta y)+x^3-3xy^2=\operatorname{Re} f$$

legyen, ahol f reguláris a komplex síkon!

$f'(1+j\frac{\pi}{2})=?$

$\Delta u=u''_{xx}+u''_{yy}=4e^{2x}\cos(\beta y)+\cancel{6x}-\beta^2e^{2x}\cos(\beta y)-\cancel{6x}=0$ (3)

$\Rightarrow \beta^2=4 \Rightarrow \beta=+2$ $\quad(\beta>0)$ (2)

(2) $f'(1+j\frac{\pi}{2})=u'_x(1,\frac{\pi}{2})-j\,u'_y(1,\frac{\pi}{2})=\left(2e^{2x}\cos(\beta y)+3x^2-3y^2\right)\Big|_{(1,\frac{\pi}{2})}+$

$+(-j)\cdot\left(-\beta e^{2x}\sin(\beta y)-6xy\right)\Big|_{(1,\frac{\pi}{2})}=-2e^2+3-\frac{3\pi^2}{4}+3\pi\cdot j$ (2)

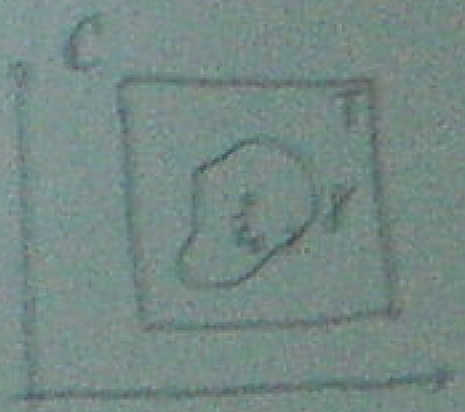
... (14 pont)

Határozza meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

$$I_1 = \oint_{|z+1|=1} \frac{\operatorname{ch} jz}{(z-3)^3}\, dz, \qquad I_2 = \oint_{|z|=6} \frac{\operatorname{ch} jz}{(z-3)^3}\, dz$$

A felhasznált tételeket írja le!

I.



$T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen öf. tartomány,

γ egy ... zárt görbe T-ben,

$z_0 \in \mathbb{C}$, a z_0-t γ által határolt tartomány tartalmazza,

f reguláris T-n.

Ekkor

$$\oint_{z\in\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi j\, f(z_0), \qquad \oint_{z\in\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n\in\mathbb{N})$$

(3)

$$I_1 = \oint_{|z+1|=1} \frac{\operatorname{ch}(jz)}{(z-3)^3}\, dz = 0$$

(3)

II. $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen öf., $\gamma \subset T$ zárt,

f reguláris T-n (1)

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

$$I_2 = \oint_{|z|=6} \frac{\operatorname{ch}(jz)}{(z-3)^3}\, dz = \frac{2\pi j}{2!} \operatorname{ch}''(jz)\Big|_{z=3} = \frac{2\pi j}{2} j^2 \operatorname{ch}(3j) = -\pi j \cos(3)$$

(1) (2) (2)

A ... feladatokból legalább 16 pontot kell elérni!

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y'' + 6y' + 9y = 0$
b) $y'' + 2y' - 3y = 0$
c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

a, $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3$

$y(x) = A e^{-3x} + B x e^{-3x}, \quad A,B \in \mathbb{R}$ (3)

b, $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1$

$y(x) = A e^{-3x} + B e^{x}, \quad A,B \in \mathbb{R}$ (3)

c, $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0; \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j$

$y(x) = A e^{-x} \sin(2x) + B e^{-x} \cos(2x); \quad A,B \in \mathbb{R}$ (3)

10. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi hatványsor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{8^{n+1}} (x-2)^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^3\, 8^{n+1}}{8^{n+2}\, n^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{8} \Rightarrow R = 8, \quad x_0 = 2$$ (3)

$x_1 = x_0 - 8 = -6$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{8^{n+1}} (-8)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{8} = \text{divergens, mert } \frac{n^3}{8} \not\to 0$$ (3)

$x_2 = x_0 + 8 = 10$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{8^{n+1}} 8^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{8} = \text{divergens, mert } \frac{n^3}{8} \not\to 0$$ (3)

Tehát a konvergencia tartomány $KT = (2-8,\ 2+8) = \underline{(-6,\ 10)}$ (1)