Kristóf János

A matematikai analízis elemei
I

Tartalomjegyzék

I. Az analízis halmazelméleti alapjai

1. A halmazelmélet axiómái (11)

(Meghatározottsági axióma és halmazok egyenlősége; Russel-tétel és kollektivizáló kijelentések; részhalmaz axióma és az üres halmaz; halmazok metszete és különbsége; hatványhalmaz axióma; páraxióma és rendezett párok; unió axióma; halmazok uniója és szorzata)

2. Relációk és függvények (19)

(Relációk és relációk projekciói; halmaz reláció által létesített képe; függvények; injekciók, szürjekciók és bijekciók; Cantor-tétel; függvény leszűkítése és kiterjesztése; reláció és függvény inverze; relációk és függvények kompozíciója; halmazok ekvipotenciája; Schröder-Bernstein tétel; függvényhalmazok; karakterisztikus függvények; műveletek és a műveletek tulajdonságai; halmazrendszerek és azok uniója, metszete és szorzata; projekció-függvények, együttes függvények és függvények szorzata; a kiválasztási axióma; ekvivalenciák és faktorhalmazok; rendezések és rendezett halmazok; halmazok korlátjai; halmaz szuprémuma és infimuma; monoton függvények és rendezett halmazok izomorfiája; jólrendezett halmazok; maximális és minimális elemek; a Kuratowski-Zorn lemma)

3. A természetes számok halmaza (55)

(Halmaz szukcesszora; végtelenségi axióma; a természetes számok halmaza; a teljes indukció tétele; természetes rendezés $\mathbb{N}$ felett; sorozatok és részsorozatok; a rekurzív definíció tétele; egyszerű rekurzió és iteráció; az összeadás és szorzás értelmezése $\mathbb{N}$-ben; a műveletek tulajdonságai; a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele; véges és végtelen halmazok; megszámlálható és kontinuum-számosságú halmazok; véges halmaz számossága)

II. Valós és komplex számok

1. A valós és komplex számok bevezetése (97)

(Testek; $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ kapcsolata a testekkel; rendezett testek; $\mathbb{Q}$ beágyazása testbe; archimédészi módon rendezett testek és azok jellemzési tétele; elem egész része; $\mathbb{Q}$ rendezés-sűrűsége archimédészi módon rendezett testben; teljesen rendezett testek; Dedekind-szeletek; a valós számtest létezésének és egyértelműségének Dedekind-tétele; Bernoulli-egyenlőtlenség és az n-edik gyökvonás $\mathbb{R}$-ben; a komplex számok teste)

2. Abszolút értékek és elemi topológiai tulajdonságok (119)

(Abszolútérték-függvények test felett; elemi Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség; euklidészi abszolút érték $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett; gömbök $\mathbb{K}$-ban; korlátos halmazok $\mathbb{K}$-ban; nyílt és zárt halmazok $\mathbb{K}$-ban; halmaz belseje és lezártja $\mathbb{K}$-ban; belső pontok és érintési pontok; sűrű halmazok $\mathbb{K}$-ban; torlódási és izolált pontok; Cantor-féle közösrész-tétel $\mathbb{R}$-re; Borel-Lebesgue tétel $\mathbb{R}$-re)

3. Numerikus sorozatok (133)

(Számsorozatok; sorozat konvergenciája és határértéke; a konvergencia egyszerű szükséges feltételei; valós monoton sorozatok konvergenciája; műveletek számsorozatokon; összetett sorozatok konvergenciája és határértéke; halmaz érintési, illetve torlódási pontjainak jellemzése sorozatokkal $\mathbb{K}$-ban; Cauchy-sorozatok és tulajdonságaik; Bolzano-Weierstrass kiválasztási-tétel; Cauchy-féle konvergenciakritérium számsorozatokra; Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{K}$-ra; $\overline{\mathbb{R}}$ bevezetése; $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat alsó és felső határértéke; a $\limsup$ *és* $\liminf$ *kapcsolata a határértékkel; műveletek $\overline{\mathbb{R}}$-ban)*

4. Numerikus sorok és elemi függvények (163)

(Számsorok és szorzatok értelmezése; sorok és szorzatok konvergenciája; sorok abszolút és feltételes konvergenciája; majoráns kritérium; hatványsorok és trigonometrikus sorok; gyökkritérium; Cauchy-Hadamard tétel; hányadoskritérium; sor maradéktagjai; korlátos változású sorozatok; a feltételes konvergencia Abel-kritériuma; alternáló sorok és Leibniz-kritérium; sor átrendezése és feltétlen konvergenciája; abszolút konvergens sor feltétlen konvergenciája; numerikus sorok Cauchy-szorzata; Mertens-tétel; hatványfüggvények; az exponenciális függvény és elemi tulajdonságai; trigonometrikus és hiperbolikus függvények; valós logaritmusfüggvény; nevezetes függvényegyenletek; kondenzációs kritérium és a hiperharmonikus sorok konvergenciája)

III. Elemi függvényanalízis

1. Határérték és folytonosság (203)

(A határérték fogalma és egyértelműsége; a határérték lokalitása; átviteli elv határértékekre; függvényműveletek és összetett függvények határértéke; a hatványfüggvények határértékei; nevezetes határértékek; határérték a $\pm\infty$-ben; a folytonosság fogalma; a folytonosság lokalitása; a folytonosság kapcsolata a határértékekkel; a hatványfüggvények folytonossága; átviteli elv folytonosságra; összetett függvények folytonossága; korlátos és zárt halmaz folytonos képe; Weierstrass-féle maximum-minimum elv; az inverz függvény folytonossága; Bolzano-tétel; egyenletes folytonosság; Heine-tétel; egyoldali határértékek; első- és másodfajú szakadások; reguláris függvények; monoton függvények regularitása; reguláris függvények folytonossági tulajdonságai)

2. Differenciálható függvények (237)

(A differenciálhatóság és derivált fogalma; a derivált előállítása határérték alakjában; a differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata; a differenciálhatóság lokalitása; összetett függvények differenciálhatósága és deriváltja; hatványfüggvények differenciálhatósága; Rolle-tétel; Cauchy- és Lagrange-középértéktételek;

a monotonitás differenciális jellemzése; az inverzfüggvény differenciálhatósága; magasabb rendű deriváltfüggvények; Taylor-formula; a szélsőértékek differenciális jellemzése; függvény konvexitása és a Jensen-egyenlőtlenség; a konvexitás differenciális jellemzése; a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség általánosítása)

IV. Függvényterek és függvényalgebrák

1. Függvényterek (277)

(Halmaz véges hatványai és a hatványok sorozata; mátrixok; lineáris függvényterek; absztrakt vektorterek; lineáris alterek; sorozatterek; példák vektorterekre; elemi Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség; az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatterek; sorok vektorterekben; lineáris operátorok és funkcionálok; vektorterek izomorfiája; operátorterek és vektortér duálisa; példák lineáris operátorokra; az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatterek közötti kapcsolatok)

2. Függvényalgebrák (291)

(Függvényalgebrák; absztrakt algebrák; polinomalgebrák; operátoralgebrák és mátrixalgebrák; az $l^1_{\mathbb{K}}$ konvolúciós algebra)

3. Normált terek (299)

(Normák és normált terek; $\|\cdot\|_p$ normák $\mathbb{K}^n$ felett; normált sorozatterek; sup-norma a korlátos függvények terein; normált algebrák; normált függvényalgebrák)

V. Metrikus terek

1. A metrikus terek alaptulajdonságai (307)

(Metrikák és metrikus terek; normálható metrikák vektortér felett; metrikus alterek; izometriák és metrikus terek izomorfiája; gömbök metrikus terekben; halmaz átmérője és korlátossága; korlátos függvények)

2. Metrikus tér topológiája (317)

(Nyílt és zárt halmazok metrikus térben; metrika által generált topológia; halmaz belseje és lezártja; metrikus altér topológiája; metrikák és normák ekvivalenciája; topologikus tulajdonságok és objektumok; normák ekvivalenciájának jellemzése; pont környezetei metrikus térben)

3. Sorozatok metrikus terekben (329)

(Sorozat konvergenciája metrikus térben és a határérték egyértelműsége; sorok konvergenciája normált terekben; konvergens sorozatok metrikus altérben; érintési pontok jellemzése sorozatokkal; összetett sorozatok konvergenciája; sűrű halmazok; szeparábilis metrikus és normált terek; a szeparabilitás topologikus jellemzése; példák szeparábilis metrikus terekre)

4. Metrikus és normált terek szorzata (339)

(Metrikák és normák szorzata; gömbök metrikus szorzattérben; nyílt halmazok és zárt halmazok szorzata; a projekció-függvények nyíltsága; sorozatok konvergenciája metrikus szorzattérben)

5. Kompakt halmazok metrikus terekben (345)

(Kompakt halmazok metrikus térben; a kompaktság kapcsolata a korlátossággal és zártsággal; relatív kompakt halmazok; a kompaktság topologikus jellemzései; metrikus altér kompakt részhalmazai; Cantor-féle közösrész-tétel; Lebesgue-lemma; Bolzano-Weierstrass tétel; teljesen korlátos halmazok; kompakt halmazok szorzata; normák ekvivalenciája végesdimenziós vektorterekben)

6. Függvények határértéke (357)

(Torlódási pontok és azok jellemzése sorozatokkal; függvény határértékének fogalma és a határérték egyértelműsége; a határérték lokalitása; átviteli elv határértékekre; összetett függvények határértéke; metrikus szorzattérbe ható függvény határértéke; a parciális függvények határértéke; a kettős határértékek tétele)

7. Folytonos és egyenletesen folytonos függvények (369)

(A folytonosság fogalma; a folytonosság lokalitása; a folytonosság kapcsolata a határértékekkel; átviteli elv folytonosságra; összetett függvények folytonossága; a folytonosság topologikus jellemzése; projekció-függvények folytonossága; metrikus szorzattérbe ható függvény folytonossága; a parciális függvények folytonossága; az egyenlőtlenségek folytatásának elve; folytonos függvények terei; homeomorfizmusok és metrikus terek homeomorfiája; egyenletes folytonosság; Hölder-függvények, Lipschitz-függvények és kontrakciók; példák egyenletesen folytonos függvényekre; pont és halmaz távolsága metrikus térben; nemtriviális folytonos valós függvények létezése; zárt halmaz karakterisztikus függvényének approximációja folytonos függvényekkel)

8. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai (389)

(Kompakt halmaz folytonos függvény által létesített képe; folytonos bijekciók és homeomorfizmusok; Weierstrass-féle maximum-minimum elv; kompakt halmazok véges dimenziós normált terekben; az algebra alaptétele; Heine-tétel; folytonos függvények approximációja Bernstein-polinomokkal)

9. Teljes metrikus terek (405)

(Cauchy-sorozatok és tulajdonságaik; teljes metrikus terek; Banach-terek; a kompakt, zárt és teljes halmazok kapcsolatai; a teljesen korlátos halmazok jellemzésének Hausdorff-tétele; a kompaktság metrikus jellemzése; véges dimenziós normált terek teljessége; vektorsorok abszolút konvergenciája Banach-terekben; normált tér teljességének jellemzése vektorsorokkal; Cauchy-sorozatok metrikus szorzattérben; teljes metrikus terek szorzata; az egyenlőségek folytatásának elve; egyenletesen folytonos függvény folytonos kiterjesztése; metrikus tér teljessé tétele; metrikus tér teljes burka és annak realizációi; Banach-féle fixponttétel; a fixpont folytonos függése a paraméterektől)

10. Ívszerűen összefüggő és összefüggő metrikus terek (425)

(Görbék és ívek; ívszerűen összefüggő halmazok; csillaghalmazok ívszerű összefüggősége normált térben; ívszerűen összefüggő halmaz folytonos képe; összefüggő halmazok és összefüggő metrikus terek; halmaz határa és az összefüggőség jellemzései; összefüggő halmaz lezártja; összefüggő halmazok $\mathbb{R}$-ben; összefüggő halmaz folytonos képe; az összefüggőség és ívszerű összefüggőség kapcsolata; nyílt halmaz összefüggőségének jellemzése normált térben; összefüggő komponensek)

11. Függvénysorozatok és függvénysorok határértéke (435)

(Függvénysorozat pontonkéni határérték-függvénye és függvénysor pontonkéti összegfüggvénye; függvénysorozat egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája; sup-metrika korlátos függvények terein; a folytonosság öröklődése; függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvényének határértéke; függvénysor normális és egyenletes konvergenciája; függvénysor egyenletes konvergenciájának Weierstrass-kritériuma; egyváltozós hatványfüggvény-sorok; Cauchy-Hadamard tétel; hatványfüggvény-sor összegfüggvényének radiális folytonossága)

Függelék: Riemann-integrál és primitív függvények

1. A Riemann-integrál értelmezése (457)

(Lépcsősfüggvények; felbontási lemma és alkalmazásai; additív halmazfüggvények; Stieltjes-mértékek és Dirac-mértékek; euklidészi mérték; lépcsősfüggvény elemi integrálja; a Riemann-féle felső integrál értelmezése és tulajdonságai; Riemann-integrálható függvények és azok tulajdonságai; a Riemann-integrál értelmezése és tulajdonságai; a Riemann-integrálhatóság öröklődése pontonkénti limeszfüggvényre; a Riemann-integrál és a pontonkénti limesz felcserélhetősége; a folytonos kompakt tartójú függvények univerzális Riemann-integrálhatósága)

2. A határozott Riemann-integrál és alkalmazásai (489)

(Lokálisan Riemann-integrálható függvények értelmezése; a határozott Riemann-integrál értelmezése és tulajdonságai; integrálfüggvények folytonossági és differenciális tulajdonságai; abszolút folytonos függvények; Newton-Leibniz-formula; az n-ed rendű parciális integrálás formulája; integrálmaradékos Taylor-formula; a helyettesítéses integrálás formulája)

3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai (497)

(Szabályos függvények értelmezése és tulajdonságaik; a szabályosság kapcsolata a regularitással; szabályos függvények univerzális lokális Riemann-integrálhatósága; a Riemann-integrálhatóság elemi Riemann-kritériuma; a Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma és az oszcillációs összegek; Lebesgue-nullhalmazok; a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma; a Riemann-integrálhatóság Cauchy-kritériuma; Darboux-féle alsó és felső integrál; a Riemann-integrálhatóság Darboux-kritériuma)

4. Primitív függvények és határozott integrál (505)

(Általánosított primitív függvények; első középértéktétel; a véges növekmények formulája; a deriváltfüggvények Darboux-tulajdonsága; szabályos függvények primitív függvényének létezése; a határozott integrál bevezetése primitív függvényekkel; Newton-Leibniz-formula; az n-ed rendű parciális integrálás formulája; integrálmaradékos Taylor-formula; a helyettesítéses integrálás formulája; a Riemann-féle közelítő összegek tétele; a határozott integrál és az euklidészi mérték szerinti határozott Riemann-integrál kapcsolata)

5. A lépcsősfüggvények és az elemi integrál fogalmának alternatívája (517)

(Szigorú lépcsősfüggvények értelmezése; a kiegészítési lemma és a szigorú lépcsősfüggvények tulajdonságai; szigorú lépcsősfüggvények elemi integrálja; a kétféle elemi integrál egyenlősége)

I. AZ ANALÍZIS HALMAZELMÉLETI ALAPJAI

Ebben a fejezetben azokról a halmazelméleti alapfogalmakról lesz szó, amelyek nemcsak az analízis, hanem a matematika bármely területének komoly vizsgálatához nélkülözhetetlenek.

A matematika legfontosabb fogalma a *halmaz* és a *halmaz eleme*. Ezeket nem lehet egyszerűbb fogalmakból származtatni; csak annyit tehetünk, hogy leírjuk azokat a tulajdonságokat, amelyeket érvényeseknek fogunk gondolni rájuk. Ezek a tulajdonságok a halmazelmélet axiómái. Az első pontban megfogalmazzuk a halmazelmélet öt legelemibb axiómáját, amelyek -a meghatározottsági axióma kivételével- olyan természetűek, hogy bizonyos tulajdonságú halmazok egzisztenciáját írják elő.

A matematikai objektumok közötti kapcsolatok leírására szolgálnak a *relációk* és a *függvények*; a második pontban ezek szisztematikus vizsgálatára kerül sor. Különös hangsúlyt kap két nevezetes reláció-típus; az *ekvivalenciák* és a *rendezések* típusa, mivel ezeket az analízisben (is) állandóan használjuk. Ugyanez érvényes a *műveletekre*, amelyek speciális típusú függvények, és amelyek lehetővé teszik az algebrai objektumok konstrukcióját. Ebben a pontban vezetjük be a halmazelmélet legsokoldalúbb vizsgálatnak alávetett axiómáját; a *kiválasztási axiómát*, amelynek jelentősége csak a halmazelméletre alapozott matematika felépítése során derül ki.

A harmadik pontban azt az alapvető gondolatot mutatjuk meg, amelynek alkalmazásával lehetővé válik a természetes számok halmazának bevezetése a matematikába; ez a *végtelenségi axióma*. A természetes számok halmazából kiindulva egyszerű halmazelméleti és algebrai meggondolásokkal előállíthatók az egész számok és a racionális számok.

A végtelenségi axiómával teljessé válik a matematika axiómarendszere. A kiválasztási és végtelenségi axiómával bővített halmazelméletre alapozott matematika (és azon belül az analízis) a mai felfogásunk szerint nagymértékben alkalmas természeti (különösen fizikai) jelenségkörök matematikai modellezésére. Ennek a kijelentésnek "bizonyítása" természetesen csak a szóbanforgó matematika felépítése *után* lehetséges.

Az itt vázolt halmazelmélet az ZFC (kiválasztási axiómával bővített *Zermelo-Fraenkel*) halmazelmélet egyfajta variánsa. Léteznek olyan matematikai elméletek, amelyek felépítéséhez ez a halmazelmélet túlságosan szűk. A tágabb értelemben vett (például a kategóriaelméletet is tartalmazó) matematika felépítése céljából megfelelő lehet a ZFC elmélet olyan bővítése, amelynek nem a halmaz, hanem az *osztály* az alapfogalma; ilyen elmélet az NBG (*Neumann-Bernays-Gödel*) osztályelmélet, amelyet rendszerint a kiválasztási axiómával bővített formában vizsgálnak. Léteznek még ennél is radikálisabb általánosítások, amelyek formális nyelvi és logikai szempontból is kategóriaelméleti alapokra helyezik a matematikát: a *toposzelméletek*. E modernebb matematikai logikai és halmazelméleti vizsgálatok mind feltételezik annak a standard (szűkebb értelemben vett) halmazelméletnek az ismeretét, amelynek alapjaival ez a fejezet foglalkozik.

Hangsúlyozzuk, hogy ebben a fejezetben nem az a célunk, hogy egy halmazelmélet szisztematikus felépítését adjuk. A halmazelméletet vizsgáló metaelméletek

legfontosabb problémája az axiómarendszerek ellentmondásmentessége, konzisztenciája és függetlensége; ezek képezik egy valóban teljesség igényével fellépő matematikai logika és halmazelmélet tárgyát. Továbbá minden halmazelmélet centrális jelentőségű problémája a halmazok számosságának fogalma (*kardinális aritmetika*) és a rendtípusok, illetve rendszámok fogalma (*ordinális aritmetika*). Ebből néhány részlet a gyakorlatok anyagában megtalálható, esetenként teljes bizonyítással, mint például a számosságaritmetika alaptétele. Azonban az analízis felépítéséhez rendelkezésre álló idő korlátozottsága miatt lehetetlen a halmazelmélet bemutatása a maga teljességében.

Végül megemlítjük, hogy a halmazelmélet a matematikának nem a legelső fejezete. Ahhoz, hogy a halmazelmélet minden tétele a legteljesebb mértékben érthető legyen szükséges a halmazelméletet megelőző matematikai logikai alapozás. Komoly matematikai logika pedig elképzelhetetlen a matematika formális nyelvének konstrukciója híján. Ezeket a halmazelméletet előkészítő elméleteket itt nem tárgyalhatjuk, csak utalhatunk a jelentőségükre és az ide vonatkozó szakirodalomra.

Irodalomjegyzék

1. D.Hilbert-P.Bernays, *Grundlagen der Mathematik.* I-II, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

2. S.C.Kleene, *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sidney, 1967.

3. E.Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic.* D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Yersey, Toronto-New York-London, 1971.

4. J.R.Scoenfield, *Mathematical Logic.* Addison-Wesley Pub. Co., 1967

5. N.Bourbaki, *Éléménts de mathématique. Théorie des ensembles.* Hermann, Paris, 1966.

6. K.Kuratowski-A.Mostowski, *Set Theory.* North-Holland Pub. Co., Amsterdam-Warsaw, 1967.

7. J.Barwise (ed), *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland Pub. Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

8. P.J.Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* W.A.Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1966.

9. A.Mostowski, *Constructible sets with Applications.* North-Holland Pub. Co., 1969.

10. T.Jeh, *Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing.* Lecture notes in Mathematic, 1971.

11. I.Bucur-A.Deleanu, *Introduction to the Theory of Categories and Functors.* J.Wiley & Sons, Inc., London-New York-Sidney, 1968.

12. P.T.Johnstone, *Topos Theory.* Academic Press, London-New York-San Francisco, 1977.

13. R.Goldblatt, *TOPOI, The categorial analysis of logic.* North-Holland Pub. Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1979.

1. A halmazelmélet axiómái

A halmazelmélet alapvető szimbóluma az $\in$ (*elem*) jel. Ha E és F halmazok, akkor $E{\in}F$ kijelentés. A halmazelmélet axiómái azok a mélyebb okokra vissza nem vezethető, igaznak tekintett kijelentések, amelyek értelmet adnak az $\in$ szimbólumnak.

A halmazelmélet első axiómája kapcsolatot teremt a logikai egyenlőség és az $\in$ szimbólum között.

Meghatározottsági axióma - $(\forall x)(\forall y)(\,(\forall z)((z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)) \;\Rightarrow (x = y)\,)$

A meghatározottsági axiómának az a tartalma, hogy két halmaz egyenlő, ha az elemeik ugyanazok.

Definíció. Ha E és F halmazok, akkor $E \subseteq F$ a $(\forall x)((x \in E) \Rightarrow (x \in F))$ kijelentés rövidítése, ahol az x változó nem szerepel sem E-ben, sem F-ben. Ha $E \subseteq F$, akkor azt mondjuk, hogy E *részhalmaza* F-nek.

Állítás. A meghatározottsági axióma ekvivalens azzal, hogy minden E és F halmazra, ha $E \subseteq F$ és $F \subseteq E$, akkor $E = F$.

Bizonyítás. Ha E és F halmazok, akkor az $(E \subseteq F) \wedge (F \subseteq E)$ kijelentés (a definíció szerint) azzal ekvivalens, hogy

$$((\forall x)((x \in E) \Rightarrow (x \in F))) \wedge ((\forall x)((x \in F) \Rightarrow (x \in E))),$$

ami ekvivalens azzal, hogy $(\forall x)((x \in E) \Leftrightarrow (x \in F))$. Az, hogy bármely két E és F halmazra ez maga után vonja az E és F (logikai) egyenlőségét egyenértékű a meghatározottsági axiómával. (Itt azt a logikai tételt alkalmaztuk, hogy bármely két $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kijelentésre a $(((\forall x)\mathcal{A}) \wedge ((\forall x)\mathcal{B})) \Leftrightarrow (\forall x)(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ kijelentés tétel). ■

Ha $\mathcal{A}$ kijelentés, akkor szeretnénk gondolni arra a halmazra, amelynek elemei pontosan azok az x-ek, amelyekre $\mathcal{A}$ teljesül. Pontosabban; azt az E halmazt szeretnénk (gondolatilag) előállítani, amelyre $x \in E$ ugyanazt jelenti, mint $\mathcal{A}$ (itt $\mathcal{A}$ az x változóra vonatkozó *tulajdonságként* szerepel), vagyis amelyre a $(\forall x)\,((x \in E) \Leftrightarrow \mathcal{A})$ kijelentés tétel. Elképzelhető volna, hogy minden $\mathcal{A}$ kijelentéshez van ilyen halmaz, azonban nem ez a helyzet.

Állítás. (*Russel-tétel*) Nem létezik olyan R halmaz, hogy minden x-re $x \in R$ ekvivalens azzal, hogy $x \notin x$.

Bizonyítás. Ha R ilyen halmaz volna, akkor $(R \in R) \Leftrightarrow (R \notin R)$ is teljesülne, ami lehetetlen. ■

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ kijelentés *kollektivizáló* az x változóban, ha a

$$(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow \mathcal{A})$$

kijelentés tétel, ahol az y változó nem szerepel $\mathcal{A}$-ban.

Az előző állítás szerint ez nemtriviális követelmény az $\mathcal{A}$ kijelentésre vonatkozóan, mert például az $x \notin x$ kijelentés nem kollektivizáló az x változóban. Sok egyéb, egészen egyszerű szerkezetű kijelentés is megadható, amely nem kollektivizáló valamelyik változójában (**5**., **6**. és **8**. gyakorlatok).

Állítás. Ha $\mathcal{A}$ kijelentés, akkor legfeljebb egy olyan E halmaz létezik, amelyben az x változó nem szerepel és a $(\forall x)((x \in E) \Leftrightarrow \mathcal{A})$ kijelentés tétel.

Bizonyítás. Ha E és F ilyen halmazok, akkor világos, hogy $(\forall x)((x \in E) \Leftrightarrow \mathcal{A})$ és $(\forall x)((x \in F) \Leftrightarrow \mathcal{A})$ tétel, amiből kapjuk, hogy $(\forall x)((x \in E) \Leftrightarrow (x \in F))$ is tétel, tehát a meghatározottsági axióma szerint $E = F$. ■

Jelölés. Ha az $\mathcal{A}$ kijelentés kollektivizáló az x változóban, akkor $\{x|\mathcal{A}\}$ jelöli azt a halmazt, amelyre teljesül a

$$(\forall x)\left((x \in \{x|\mathcal{A}\}) \Leftrightarrow \mathcal{A}\right)$$

kijelentés.

Ha az $\mathcal{A}$ kijelentés kollektivizáló az x változóban, akkor az $\{x|\mathcal{A}\}$ halmaz formális nyelvi konstrukciója olyan, hogy abban az x változó nem szerepel. Ezért ahhoz, hogy egy $\mathcal{A}$ kijelentés kollektivizáló legyen az x változóban *szükséges* olyan E halmaz létezése, amelyben nem szerepel az x változó és amelyre a $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow (x \in E))$ kijelentés tétel. A második axióma azt követeli meg, hogy ez a feltétel *elégséges* is legyen.

Részhalmaz axióma - Ha $\mathcal{A}$ olyan kijelentés, hogy létezik olyan E halmaz, amelyben az x változó nem szerepel és amelyre a $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow (x \in E))$ kijelentés tétel, akkor $\mathcal{A}$ az x változóban kollektivizáló.

A részhalmaz axióma nagyon erős feltétel, amely rendkívül sokféle halmaz létezését biztosítja.

Állítás. Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kijelentések és $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ tétel, továbbá $\mathcal{B}$ kollektivizáló az x változóban, akkor $\mathcal{A}$ is kollektivizáló x-ben és $\{x|\mathcal{A}\} \subseteq \{x|\mathcal{B}\}$.

Bizonyítás. A $\mathcal{B}$ kollektivizáló az x változóban, ezért az $E := \{x|\mathcal{B}\}$ halmazban x nem szerepel. Ugyanakkor $(\forall x)(\mathcal{B} \Rightarrow x \in E)$ tétel, ezért az implikáció tranzitivitása folytán $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow (x \in E))$ is tétel, vagyis a részhalmaz axióma alapján $\mathcal{A}$ is kollektivizáló x-ben. Ezért az $x \in \{x|\mathcal{A}\}$ kijelentés ekvivalens $\mathcal{A}$-val és $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ tétel, így $x \in \{x|\mathcal{B}\}$ is teljesül, vagyis

$$(\forall x)((x \in \{x|\mathcal{A}\}) \Rightarrow (x \in \{x|\mathcal{B}\}))$$

tétel, és ez azt jelenti, hogy $\{x|\mathcal{A}\} \subseteq \{x|\mathcal{B}\}$. ■

Állítás. Ha E halmaz és az x változó nem szerepel E-ben, akkor az $x \in E$ kijelentés kollektivizáló az x változóban és $E = \{x|x \in E\}$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{A}$ jelöli az $x \in E$ kijelentést, akkor a

$$(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow (x \in E))$$

kijelentés tétel, tehát a részhalmaz axióma szerint az $x \in E$ kijelentés kollektivizáló az x változóban és az $\{x|x \in E\}$ halmaz definíciója szerint a

$$(\forall x)((x \in \{x|x \in E\}) \Leftrightarrow (x \in E))$$

kijelentés tétel. Ezért a meghatározottsági axióma alapján $E = \{x|x \in E\}$. ■

Tehát minden halmaz egyenlő az elemeinek halmazával. Itt kezd értelmet nyerni az $\in$ szimbólum, amit eddig akárhogy is jelölhettünk volna és akárhogy is nevezhettünk volna.

Állítás. Az $x \neq x$ kijelentés kollektivizáló az x változóban. Az $\{x|x \neq x\}$ halmaz az egyetlen olyan halmaz, amelynek nincs eleme.

Bizonyítás. Legyen E tetszőleges olyan halmaz, amelyben az x változó nem szerepel (például E lehet bármilyen x-től különböző változó). Az $x = x$ kijelentés tétel, ezért $(x \notin E) \Rightarrow (x = x)$ is tétel, így az $(x \neq x) \Rightarrow (x \in E)$ kijelentés tétel. Ezért a részhalmaz axióma alapján az $x \neq x$ kijelentés kollektivizáló az x változóban. Ekkor az $\{x|x \neq x\}$ halmaz definíciója szerint $(\forall x)((x \in \{x|x \neq x\}) \Leftrightarrow x \neq x)$ teljesül, ezért az $\{x|x \neq x\}$ halmaz minden eleme nem egyenlő önmagával, vagyis ennek nincs eleme. ■

Definíció. Az $\{x|x \neq x\}$ halmazt *üres halmaznak* nevezzük és az $\emptyset$ szimbólummal jelöljük.

A következő állítás megmutatja, hogy mi indokolja a részhalmaz axióma elnevezést.

Állítás. Ha $\mathcal{A}$ kijelentés és E olyan halmaz, amelyben az x változó nem szerepel, akkor az $\mathcal{A} \wedge (x{\in}E)$ kijelentés kollektivizáló az x változóban, továbbá $\{x|\mathcal{A} \wedge (x \in E)\}$ részhalmaza az E halmaznak.

Bizonyítás. Világos, hogy a $(\forall x)(((\mathcal{A} \wedge (x \in E)) \Rightarrow (x \in E))$ kijelentés tétel, ezért a részhalmaz axióma szerint az $\mathcal{A} \wedge (x \in E)$ kijelentés x-ben kollektivizáló és az $\{x|\mathcal{A} \wedge (x \in E)\}$ halmaz definíciója alapján

$$(\forall x)((x \in \{x|\mathcal{A} \wedge (x \in E)\}) \Rightarrow (x \in E))$$

teljesül, azaz $\{x|\mathcal{A} \wedge (x \in E)\} \subseteq (x \in E)$. ■

Következmény. Ha E és F halmazok és az x változó nem szerepel sem E-ben, sem F-ben, akkor az $(x \in E) \wedge (x \in F)$ és $(x \in E) \wedge (x \notin F)$ kijelentések kollektivizálók x-ben. ■

Definíció. Ha E és F halmazok és az x változó nem szerepel sem E-ben, sem F-ben, akkor

$$\begin{aligned} E \cap F &:= \{x|(x \in E) \wedge (x \in F)\} \\ E \setminus F &:= \{x|(x \in E) \wedge (x \notin F)\}, \end{aligned}$$

és $E \cap F$-t az E és F halmazok *metszetének*, míg $E \setminus F$-t az E és F halmazok *különbségének* nevezzük.

A részhalmaz axióma alkalmazhatóságához szükség van néhány egészen elemi módon előállítható halmaztípus létezésére.

Természetesnek tűnik az, hogy ha E halmaz, akkor gondolhatunk az E összes részhalmazainak halmazára. Kiderül, hogy ennek létezése nem következik az eddigi axiomatikából (ha az ellentmondásmentes elméletet határoz meg), ezért vezetjük be a következő axiómát.

Hatványhalmaz axióma - *Ha E halmaz és az x változó nem szerepel E-ben, akkor az $x \subseteq E$ kijelentés kollektivizáló az x változóban. Ekkor*

$$\mathscr{P}(E) := \{x | x \subseteq E\},$$

és ezt a halmazt az E hatványhalmazának nevezzük.

Ha E halmaz és az x változó nem szerepel E-ben, akkor az $x = E$ kijelentés kollektivizáló x-ben, mert a hatványhalmaz axióma szerint képezhető a $\mathscr{P}(E)$ halmaz, amelyben x nem szerepel, és nyilvánvaló, hogy $(\forall x)((x = E) \Rightarrow (x \in \mathscr{P}(E)))$ tétel, tehát a részhalmaz axióma alapján $x = E$ kollektivizáló x-ben. Az $\{x | x = E\}$ halmazt az E-t tartalmazó *egy elemű* halmaznak nevezzük és $\{E\}$-vel jelöljük.

Felvetődik két elemű halmaz létezésének bizonyíthatósága, vagyis az, hogy ha E és F halmazok és az x változó nem szerepel E-ben és F-ben, akkor kollektivizáló-e x-ben az $(x = E) \vee (x = F)$ kijelentés? Kiderül, hogy ez nem következik az eddigi axiomatikából (ha az ellentmondásmentes elméletet határoz meg), ezért van szükség a következő axiómára.

Páraxióma - *Ha E és F halmazok és az x változó nem szerepel E-ben és F-ben, akkor az $(x = E) \vee (x = F)$ kijelentés kollektivizáló x-ben. Ekkor*

$$\{E, F\} := \{x | (x = E) \vee (x = F)\},$$

és ezt a halmazt az E és F halmazokból álló (rendezetlen) párnak nevezzük.

A "rendezetlen" jelzőt az indokolja, hogy ha E és F halmazok, akkor az $(x = E) \vee (x = F)$ és $(x = F) \vee (x = E)$ kijelentések ekvivalenciája miatt $\{E, F\} = \{F, E\}$ teljesül, így az $\{E, F\}$ jelölésben az E és F elemek sorrendisége csak *látszólagos*. Könnyen látható, hogy ha E halmaz, akkor $\{E\} = \{E, E\}$.

A halmazok közötti kapcsolatok (relációk) és függvények értelmezhetősége tekintetében döntő jelentőségű lesz a rendezett párok létezése. Bármely két E és F halmazhoz olyan (E, F) halmazt szeretnénk előállítani, amelyre teljesül az, hogy ha E' és F' szintén halmazok, akkor $(E, F) = (E', F')$ ekvivalens legyen azzal, hogy $(E = E') \wedge (F = F')$. Ilyen tulajdonságú "rendezett" párok konstrukciójához nincs szükség új axiómára.

Definíció. Ha E és F halmazok, akkor

$$(E, F) := \{\{E\}, \{E, F\}\},$$

és ezt a halmazt az E és F halmazokból álló *(rendezett) párnak* nevezzük.

Állítás. Ha E, F, E' és F' halmazok, akkor az $\{E, F\} = \{E', F'\}$ kijelentés ekvivalens az $(E = E') \wedge (F = F')$ kijelentéssel.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $(E = E') \wedge (F = F') \Rightarrow \{E, F\} = \{E', F'\}$ teljesül, ezért csak a fordított következtetést kell igazolni. Tegyük fel, hogy $\{E, F\} = \{E', F'\}$. Ekkor a definíció szerint $\{\{E\}, \{E, F\}\} = \{\{E'\}, \{E', F'\}\}$, ezért $\{E\} \in \{\{E'\}, \{E', F'\}\}$, így $\{E\} = \{E'\}$ vagy $\{E\} = \{E', F'\}$. Ha $\{E\} = \{E'\}$, akkor $E = E'$; ha pedig $\{E\} = \{E', F'\}$, akkor $E' \in \{E', F'\} = \{E\}$ miatt ismét $E = E'$ adódik, tehát $E = E'$. Ezért az $(E, F) = (E', F')$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $\{\{E\}, \{E, F\}\} = \{\{E\}, \{E, F'\}\}$. Az $\{E, F'\}$ halmaz eleme a jobb oldalon álló halmaznak, ezért $\{E\} = \{E, F'\}$ vagy $\{E, F\} = \{E, F'\}$ teljesül. Az első esetben $E = F'$, míg a második esetben $F' \in \{E, F'\}$ miatt $E = F'$ vagy $F = F'$. Ezért az $F = F'$ egyenlőség bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $E = F'$ esetén is fennáll az $F = F'$ egyenlőség. Ha $E = F'$, akkor az $(E, F) = (E', F')$ egyenlőség a következőképpen néz ki:

$$\{\{E\}, \{E, F\}\} = \{\{E\}, \{E, F'\}\} = \{\{E\}, \{E\}\} = \{\{E\}\}.$$

Ezért $\{E, F\} = \{E\}$, így $F = E$. Ugyanakkor a feltevés szerint $E = F'$, ezért $F = F'$. ■

A későbbiekben látni fogjuk, hogy létezik olyan eljárás, amelynek segítségével kijelölhető egy (E, F) pár első, illetve második "komponense", tehát az (E, F) jelölésben az E és F "komponensek" sorrendisége *valóságos*.

A részhalmaz axiómából következett, hogy minden halmaz egyenlő az elemeinek halmazával. Felmerül a kérdés, hogy egy halmaz elemeinek az elemei is halmazt alkotnak-e, vagyis ha E halmaz és az x és y változók nem szerepelnek E-ben, akkor a $(\exists y)((x \in y) \wedge (y \in E))$ kijelentés kollektivizáló-e az x változóban? Ha az eddigi axiomatika ellentmondásmentes elméletet határoz meg, akkor ez a kijelentés nem bizonyítható. Ezért vezetjük be a következő axiómát.

Unió axióma - *Ha E halmaz és az x és y változók nem szerepelnek E-ben, akkor a $(\exists y)((x \in y) \wedge (y \in E))$ kijelentés kollektivizáló x-ben. Ekkor*

$$\bigcup E := \{x | (\exists y)((x \in y) \wedge (y \in E))\},$$

és ezt a halmazt az E halmaz uniójának nevezzük.

Állítás. Ha E és F halmazok, és az x változó nem szerepel E-ben és F-ben, akkor az $(x \in E) \vee (x \in F)$ kijelentés kollektivizáló x-ben, és az $\{x | (x \in E) \vee (x \in F)\}$ halmaz egyenlő az $\bigcup\{E, F\}$ halmazzal.

Bizonyítás. A páraxióma és az unió axióma szerint képezhető az $\bigcup\{E, F\}$ halmaz, és az unió definíciója alapján az $x \in \bigcup\{E, F\}$ és $(\exists y)((x \in y) \wedge (y \in \{E, F\}))$ kijelentések ekvivalensek. Viszont a rendezetlen párok definíciója szerint $y \in \{E, F\}$ ekvivalens azzal, hogy $(y = E) \vee (y = F)$. Ezért az $(x \in E) \vee (x \in F)$ és $(\exists y)((x \in y) \wedge (y \in \{E, F\}))$ kijelentések ekvivalensek. ■

Definíció. Ha E és F halmazok és x olyan változó, amely nem szerepel E-ben és F-ben, akkor

$$E \cup F := \{x | (x \in E) \vee (x \in F)\},$$

és ezt a halmazt az E és F halmazok *uniójának* nevezzük.

Állítás. Ha E és F halmazok, továbbá x, y és z olyan változók, amelyek nem szerepelnek E-ben és F-ben, akkor a $(\exists x)(\exists y)((z = (x, y)) \wedge (x \in E) \wedge (y \in F))$ kijelentés kollektivizáló a z változóban.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{A}$ a $(\exists x)(\exists y)((z = (x, y)) \wedge (x \in E) \wedge (y \in F))$ kijelentést. Ha $\mathcal{A}$ teljesül, akkor vannak olyan E' és F' halmazok, hogy $z = (E', F')$ és $E' \in E$ és $F' \in F$. Ekkor $z = \{\{E'\}, \{E', F'\}\}$ és $E' \in E \cup F$ és $F' \in E \cup F$, ezért $\{E'\} \in \mathscr{P}(E \cup F)$, így $z \subseteq \mathscr{P}(E \cup F)$, vagyis $z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E \cup F))$. A $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E \cup F))$ halmazban nem szerepel a z változó, és az imént láttuk, hogy az $\mathcal{A} \Rightarrow z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E \cup F))$ kijelentés tétel, tehát $(\forall z)(\mathcal{A} \Rightarrow z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E \cup F)))$ is tétel. Ezért a részhalmaz axióma alkalmazásával kapjuk, hogy az $\mathcal{A}$ kijelentés kollektivizáló a z változóban. ■

Definíció. Ha E és F halmazok, továbbá x, y és z olyan változók, amelyek nem szerepelnek E-ben és F-ben, akkor

$$E \times F := \{z | (\exists x)(\exists y)((z = (x, y)) \wedge (x \in E) \wedge (y \in F))\},$$

ést ezt a halmazt az E és F halmazok *(Descartes-) szorzatának* nevezzük.

Eddig öt halmazelméleti axiómát vezettünk be. Ezek alkalmazásával nagyon sok nemtriviális halmaz létezése igazolható. Azonban még két egzisztencia-axiómára szükségünk lesz ahhoz, hogy az analízis legfontosabb objektumait létrehozhassuk.

Gyakorlatok

1. A matematika formális nyelve. Nem axiomatikus és axiomatikus ítéletkalkulus. Axiomatikus predikátumkalkulus. Matematikai elméletek. Az igazság (tétel) fogalma. (A matematikai analízis logikai alapjai.)

2. Gyűjtsük össze azokat a logikai tételeket, amelyeket az eddigi bizonyításokban felhasználtunk!

3. Mit jelent az, hogy egy kijelentés *nem igaz* (a kétféle értelmezés)? Mit értünk azon, hogy egy kijelentés *nem kollektivizáló* valamely változójában?

4. Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ olyan kijelentések és x olyan változó, hogy $(\forall x)(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ tétel, akkor az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kijelentések egyszerre kollektivizálók az x változóban, vagy egyikük sem kollektivizáló az x változóban, továbbá, ha $\mathcal{A}$ kollektivizáló az x változóban, akkor $\{x|\mathcal{A}\} = \{x|\mathcal{B}\}$.

5. Nem létezik olyan halmaz, amelynek minden halmaz az eleme. Az $x = x$ és $x \subseteq x$ kijelentések nem kollektivizálók az x változóban.

6. Ha az $\mathcal{A}$ kijelentés tétel, akkor $\mathcal{A}$ nem kollektivizáló az x változóban. Ha az $\mathcal{A}$ kijelentésben nem szerepel az x változó, akkor $\mathcal{A}$ nem kollektivizáló az x változóban.

7. Ha $\mathcal{A}$ kijelentés és $\mathcal{B}$ tétel, akkor a $(\forall x)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ kijelentés tétel.

8. Ha E halmaz és az x változó nem szerepel E-ben, akkor az $x \notin E$ és $x \neq E$ kijelentések nem kollektivizálók az x változóban.

9. Az $\cup$, $\cap$ és $\setminus$ halmazműveletekre vonatkozó azonosságok és azok logikai okai. Az üres halmaz szerepe a halmazalgebrákban.

10. Halmazszorzással kapcsolatos egyenlőségek és azok logikai okai. A halmazszorzás kapcsolatai a többi halmazművelettel.

11. A *szimmetrikus halmazkülönbség* ($\triangle$) bevezetése és annak műveleti tulajdonságai.

12. Ha E és F halmazok, akkor $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$ *ekvivalens* azzal, hogy $E \subseteq F$.

13. Az E halmazt *tranzitívnak* nevezzük, ha az E minden eleme részhalmaza E-nek. Egy E halmaz tranzitivitása azzal ekvivalens, hogy $\bigcup E \subseteq E$. Két tranzitív halmaz metszete és uniója szintén tranzitív.

14. A matematikában sok esetben képezünk "adott alakú" halmazok halmazát. Pontosabban arról van szó, hogy ha x változó és T az x változó segítségével előállított halmaz (pl. $\{x\}$), továbbá $\mathcal{A}$ kijelentés, akkor előfordulhat az, hogy a $(\exists x)((y = T) \wedge \mathcal{A})$ kijelentés kollektivizáló az y változóban, ahol y nem szerepel sem T-ben, sem $\mathcal{A}$-ban. Ekkor az $\{y|(\exists x)((y = T) \wedge \mathcal{A})\}$ halmaz azon T "alakú" halmazok halmaza, amelyekre $\mathcal{A}$ teljesül. Ilyenkor az

$$\{T|\mathcal{A}\} := \{y|(\exists x)((y = T) \wedge \mathcal{A})\}$$

jelölést alkalmazzuk. Ha például E halmaz, amelyben az x és y változók nem szerepelnek, akkor a részhalmaz axióma alapján képezhető az $\{y|(\exists x)((y = \{x\}) \wedge (x \in E))\}$ halmaz, amit az előzőek alapján $\{\{x\}|x \in E\}$-vel jelölünk.

15. Legyen x változó, valamint $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kijelentések. Ekkor a következő definíciókat alkalmazzuk:

$$(\forall_{\mathcal{B}} x)\mathcal{A} := (\forall x)(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$$
$$(\exists_{\mathcal{B}} x)\mathcal{A} := (\exists x)(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}),$$

és $\forall_{\mathcal{B}} x$ (illetve $\exists_{\mathcal{B}} x$) kifejezéseket *$\mathcal{B}$-feltételű univerzális* (illetve *egzisztenciális*) *kvantoroknak* nevezzük az x változó szerint. A leggyakoribb feltétel $x \in E$ alakú, ahol az x változó nem szerepel az E halmazban, tehát a legsűrűbben előforduló, feltételes kvantorokat tartalmazó kijelentések

$$(\forall_{x \in E} x)\mathcal{A} := (\forall x)((x \in E) \Rightarrow \mathcal{A})$$
$$(\exists_{x \in E} x)\mathcal{A} := (\exists x)((x \in E) \wedge \mathcal{A}),$$

alakúak. A $\forall_{x \in E} x$ (illetve $\exists_{x \in E} x$) feltételes kvantort rendszerint a $\forall x \in E$ (illetve $\exists x \in E$) szimbólummal is jelöljük.

2. Relációk és függvények

Definíció. Az R halmazt *relációnak* nevezzük, ha az R minden eleme pár, tehát ha a

$$(\forall z)((z \in R) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y)))$$

kijelentés tétel, ahol az x, y és z változók nem szerepelnek R-ben.

Állítás. Ha R reláció és az x, y változók nem szerepelnek R-ben, akkor a $(\exists y)((x, y) \in R)$ kijelentés kollektivizáló x-ben, és a $(\exists x)((x, y) \in R)$ kijelentés kollektivizáló y-ban.

Bizonyítás. Ha $(\exists y)((x, y) \in R)$ teljesül, akkor létezik olyan Y halmaz, hogy $(x, Y) \in R$. Ekkor $\{x\} \in (x, Y) \in R$, tehát $x \in \{x\}$ miatt $x \in \bigcup(\bigcup R)$. De $\bigcup(\bigcup R)$ olyan halmaz, amelyben az x változó nem szerepel, ezért a részhalmaz axióma szerint a a $(\exists y)((x, y) \in R)$ kijelentés kollektivizáló x-ben. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $(\exists x)((x, y) \in R)$ teljesül, akkor $y \in \bigcup(\bigcup R)$, tehát a $(\exists x)((x, y) \in R)$ kijelentés kollektivizáló y-ban. ■

Definíció. Ha R reláció, akkor

$$pr_1 R := \{x | (\exists y)((x, y) \in R)\},$$
$$pr_2 R := \{y | (\exists x)((x, y) \in R)\},$$

és a $pr_1 R$ (illetve $pr_2 R$) halmazt az R reláció *első* (illetve *második*) *projekciójának* nevezzük.

Ha R reláció, akkor $R \subseteq pr_1 R \times pr_2 R$, és ha E és F olyan halmazok, hogy $R \subseteq E \times F$, akkor $pr_1 R \subseteq E$ és $pr_2 R \subseteq F$.

Állítás. Ha E és F halmazok, akkor $E = \bigcup pr_1\{(E, F)\}$ és $F = \bigcup pr_2\{(E, F)\}$. Ha E halmaz, akkor $E = \bigcup\{E\}$.

Bizonyítás. A relációk projekciójának definíciója alapján könnyen látható, hogy $pr_1\{(E, F)\} = \{E\}$ és $pr_2\{(E, F)\} = \{F\}$, ezért elég a második állítást igazolni. Világos, hogy $E \in \{E\}$, ezért $x \in E$ esetén az unió definíciója szerint $x \in \bigcup\{E\}$, tehát $E \subseteq \bigcup\{E\}$. Megfordítva, ha $x \in \bigcup\{E\}$, akkor létezik olyan $y \in \{E\}$, hogy $x \in y$; ekkor $y = E$ és $x \in y$, azaz $x \in E$, tehát $\bigcup\{E\} \subseteq E$. Ezért a meghatározottsági axiómából kapjuk, hogy $E = \bigcup\{E\}$. ■

Ez az állítás egyszerű eljárást szolgáltat, amelynek alkalmazásával megadható egy elemű halmaz eleme, illetve egy pár első és második komponense.

Állítás. Ha R reláció, X halmaz, és az x, y változók nem szerepelnek sem R-ben, sem X-ben, akkor a $(\exists x)((x \in X) \wedge (x, y) \in R)$ kijelentés kollektivizáló y-ban.

Bizonyítás. A $(\exists x)((x \in X) \wedge (x, y) \in R)$ kijelentésből adódik, hogy $y \in pr_2 R$, tehát a részhalmaz axióma szerint a $(\exists x)((x \in X) \wedge (x, y) \in R)$ kijelentés kollektivizáló y-ban. ■

Definíció. Ha R reláció, X halmaz, és az x, y változók nem szerepelnek sem R-ben, sem X-ben, akkor

$$R\langle X\rangle := \{y|(\exists x)((x \in X) \wedge (x,y) \in R)\},$$

és ezt a halmazt az X halmaz R *reláció által létesített képének* nevezzük.

Ha R reláció, akkor az $R\langle\{x\}\rangle := \{y|(x,y) \in R\}$ halmazt az R reláció x-szel vett *szeletének* nevezzük.

Definíció. Az f relációt *függvényrelációnak* (vagy *függvénynek*) nevezzük, ha teljesül a következő állítás:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y')((((x,y) \in f) \wedge ((x,y') \in f)) \Rightarrow y = y'),$$

ahol az x, y és y' változók nem szerepelnek f-ben.

Tehát az f reláció pontosan akkor függvény, ha minden x halmazra az $f\langle\{x\}\rangle$ szelet *legfeljebb* egy elemű halmaz. Ha f függvény, akkor minden x halmazra $x \in pr_1 f$ ekvivalens azzal, hogy az $f\langle\{x\}\rangle$ szelet *pontosan* egy elemű halmaz.

Definíció. Legyen f függvény.

- A $pr_1 f$ halmazt az f *értelmezési* (vagy *definíciós*) *tartományának* nevezzük és $Dom(f)$-fel jelöljük.
- A $pr_2 f$ halmazt az f *értékkészletének* (vagy *képének*) nevezzük és $Im(f)$-fel jelöljük.
- Ha $x \in Dom(f)$ akkor az $f\langle\{x\}\rangle$ halmaz egyetlen elemét $f(x)$ jelöli, tehát $f\langle\{x\}\rangle = \{f(x)\}$, vagyis írható, hogy

$$f(x) := \bigcup f\langle\{x\}\rangle.$$

Az $f(x)$ halmazt az f függvény x *helyen felvett értékének* nevezzük.

Ha f függvény, akkor $f = \{(x, f(x))|x \in Dom(f)\}$, továbbá, ha X halmaz, akkor

$$f\langle X\rangle = \{f(x)|x \in (X \cap Dom(f))\},$$

és $Dom(f) \subseteq X$ esetén $f\langle X\rangle = Im(f)$.

Ha f és g függvények, akkor $f = g$ ekvivalens azzal, hogy $Dom(f) = Dom(g)$ és minden $x \in Dom(f)$ elemre $f(x) = g(x)$. Ha f és g függvények és $E \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$, akkor azt mondjuk, hogy $f = g$ *az E halmazon*, ha minden $x \in E$ pontra $f(x) = g(x)$.

Jelölés. Legyenek E, F halmazok és f függvény.

- Azt mondjuk, hogy f *E-ben értelmezett* (illetve *E-n értelmezett*) függvény, ha $Dom(f) \subseteq E$ (illetve $Dom(f) = E$).
- Azt mondjuk, hogy az f függvény az F *halmazba érkezik*, ha $Im(f) \subseteq F$.

- Azt, hogy az f függvény az E halmazban (illetve E halmazon) értelmezett és F-be érkezik az $f : E \rightarrowtail F$ (illetve $f : E \to F$) szimbólummal jelöljük.

Tehát az $f : E \rightarrowtail F$ és $f : E \to F$ jelölések olyan kijelentések rövidítései, amelyek az f függvény definíciós tartományának E-vel és az értékkészletének F-fel való *kapcsolatát* fejezik ki.

Definíció. Az R relációt *injektívnek* nevezzük, ha

$$(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')\,((((x,y) \in R) \wedge ((x',y') \in R) \wedge (x \neq x')) \Rightarrow y \neq y')$$

teljesül, ahol az x, x', y és y' változók nem szerepelnek R-ben. Az injektív függvényeket *injekcióknak* is nevezzük.

Tehát egy f függvény injektivitása azzal ekvivalens, hogy $x, x' \in Dom(f)$ és $x \neq x'$ esetén $f(x) \neq f(x')$ teljesül.

Definíció. Legyenek E, F halmazok és f függvény.

- Azt mondjuk, hogy f *ráképez* az F halmazra, ha $F \subseteq Im(f)$. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy f *szürjektív* F-re. Ha $f : E \rightarrowtail F$ függvény és f ráképez F-re, akkor akkor azt mondjuk, hogy f *szürjekció* E és F között.

- Azt mondjuk, hogy f *bijekció* az E és F halmazok között, ha f injektív és $Dom(f) = E$ és $Im(f) = F$.

Minden injekció bijekció a definíciós tartománya és az értékkészlete között. Míg az injektivitás egy függvény "belső" tulajdonsága, addig a szürjektivitás és a bijektivitás a függvény más halmazokkal való kapcsolatát fejezi ki.

Példák. 1) Az $\emptyset$ halmaz injektív függvény (ez az *üres függvény*).

2) Ha E halmaz, akkor az $id_E := \{(x,x) | x \in E\}$ halmaz bijektív függvény az E és E halmazok között (ez az E halmaz *identikus függvénye*).

3) Ha E és F halmazok, és $c \in F$ rögzített pont, akkor az $\{(x,c) | x \in E\}$ halmaz E-n értelmezett, F-be érkező függvény (ez az E halmazon értelmezett, c-értékű *konstansfüggvény*).

4) Ha E halmaz, akkor az $\{(x,\{x\}) | x \in E\}$ halmaz E-n értelmezett, $\mathscr{P}(E)$-be érkező injekció.

Tétel. (*Cantor-tétel*) Ha E halmaz, akkor nem létezik olyan E-n értelmezett függvény, amely ráképez $\mathscr{P}(E)$-re.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük olyan E halmaz létezését, amelyhez létezik $f : E \to \mathscr{P}(E)$ szürjekció. Értelmezzük az

$$F := \{x | (x \in E) \wedge (x \notin f(x))\}$$

halmazt. Ekkor $F \in \mathscr{P}(E)$, tehát van olyan $x \in E$, hogy $F = f(x)$, mivel f ráképez $\mathscr{P}(E)$-re. Ha $x \in F$ igaz volna, akkor az F definíciója szerint $x \notin f(x)$, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy $x \notin F$. Ez viszont az F értelmezése alapján azt jelenti, hogy $x \in f(x)$, vagyis $x \in F$, ami ellentmondás. ■

Állítás. Ha f függvény és $E \subseteq Dom(f)$, akkor az $\{(x, f(x)) | x \in E\}$ halmaz függvény.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik abból, hogy f függvényreláció. ■

Definíció. Ha f függvény és $E \subseteq Dom(f)$, akkor az $\{(x, f(x)) | x \in E\}$ halmazt az f függvény E halmazra vett *leszűkítésének* nevezzük és az $f|_E$ szimbólummal jelöljük. A g függvényt az f függvény *kiterjesztésének* nevezzük, ha f egyenlő a g valamelyik leszűkítésével.

Ha tehát f függvény és $E \subseteq Dom(f)$, akkor $Dom(f|_E) = E$, $Im(f|_E) = f\langle E \rangle$, és minden $x \in E$ pontra $f|_E(x) = f(x)$. A g függvény pontosan akkor kiterjesztése f-nek, ha $f \subseteq g$.

Állítás. Ha R reláció és az x, y és z változók nem szerepelnek R-ben, akkor a

$$(\exists x)(\exists y)\left((z = (y, x)) \wedge ((x, y) \in R)\right)$$

kijlentés kollektivizáló z-ben.

Bizonyítás. Ha $(\exists x)(\exists y)\left((z = (y, x)) \wedge ((x, y) \in R)\right)$ teljesül, akkor vehetünk olyan E és F halmazokat, hogy $z = (F, E)$ és $(E, F) \in R$. Ekkor $R \subseteq pr_1 R \times pr_2 R$ miatt $z \in pr_2 R \times pr_1 R$, ezért elég a részhalmaz axiómát alkalmazni. ■

Definíció. Ha R reláció, és az x, y és z változók nem szerepelnek R-ben, akkor

$$\overset{-1}{R} := \{z | (\exists x)(\exists y)\left((z = (y, x)) \wedge ((x, y) \in R)\right)\},$$

és ezt a halmazt az R reláció *inverzének* nevezzük.

Állítás. Ha R reláció, akkor $\overset{-1}{\overset{-1}{R}} = R$, $pr_1 \overset{-1}{R} = pr_2 R$ és $pr_2 \overset{-1}{R} = pr_1 R$.

Bizonyítás. Az $\overset{-1}{\overset{-1}{R}} = R$ egyenlőség triviálisan következik a definícióból. Az $y \in pr_1 \overset{-1}{R}$ kijelentés ekvivalens azzal, hogy létezik olyan x, amelyre $(x, y) \in \overset{-1}{R}$, vagyis $(y, x) \in R$, azaz $y \in pr_1 R$. Ezért $pr_1 \overset{-1}{R} = pr_2 R$ teljesül. Ezt az egyenlőséget felírva az $\overset{-1}{R}$ relációra és alkalmazva az $\overset{-1}{\overset{-1}{R}} = R$ egyenlőséget azonnal kapjuk, hogy $pr_2 \overset{-1}{R} = pr_1 R$. ■

Állítás. Ha f függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ reláció pontosan akkor függvény, ha f injektív.

Bizonyítás. Ha f injektív függvény, akkor $(y, x) \in \overset{-1}{f}$ és $(y, x') \in \overset{-1}{f}$ esetén $(x, y) \in f$ és $(x', y) \in f$, tehát $x = x'$, vagyis az $\overset{-1}{f}$ reláció függvény. Megfordítva, ha az $\overset{-1}{f}$ reláció függvény, akkor $(x, y) \in f$ és $(x', y) \in f$ esetén $(y, x) \in \overset{-1}{f}$ és $(y, x') \in \overset{-1}{f}$, így $x = x'$, ami azt jelenti, hogy f injekció. ■

Jelölés. Ha f injektív függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ függvényt az f^{-1} szimbólummal jelöljük.

Tehát ha f injektív függvény, akkor

$$Dom(f^{-1}) = Im(f); \qquad Im(f^{-1}) = Dom(f),$$

és minden $y \in Dom(f^{-1})$ pontra $f^{-1}(y)$ az az egyértelműen meghatározott eleme $Dom(f)$-nek, amelyre $f(f^{-1}(y)) = y$ teljesül. Továbbá, ekkor minden $x \in Dom(f)$ pontra $f^{-1}(f(x)) = x$ is teljesül. Nyilvánvaló, hogy minden injekció inverze bijekció az eredeti függvény értékkészlete és definíciós tartománya között.

Állítás. Ha R és R' relációk, akkor a

$$(\exists x)(\exists y)\,((u = (x, y)) \wedge (\exists z)(((x, z) \in R) \wedge ((z, y) \in R')))$$

kijelentés kollektivizáló az u változóban, ha az x, y, z és u változók nem szerepelnek R-ben és R'-ben.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{A}$ az $(\exists x)(\exists y)\,((u = (x, y)) \wedge (\exists z)(((x, z) \in R) \wedge ((z, y) \in R')))$ kijelentést. Ha $\mathcal{A}$ igaz, akkor léteznek olyan X és Y halmazok, hogy $u = (X, Y)$ és $(\exists z)(((X, z) \in R) \wedge ((z, Y) \in R'))$ igaz, tehát van olyan Z halmaz, hogy $(X, Z) \in R$ és $(Z, Y) \in R'$. Ekkor $X \in pr_1 R$ és $Y \in pr_2 R'$, tehát $u \in pr_1 R \times pr_2 R'$. Az u változó nem szerepel $pr_1 R \times pr_2 R'$-ben, ezért a részhalmaz axióma szerint $\mathcal{A}$ kollektivizáló u-ban. ■

Definíció. Ha R és R' relációk, akkor az

$$R' \circ R := \{u | (\exists x)(\exists y)\,((u = (x, y)) \wedge (\exists z)(((x, z) \in R) \wedge ((z, y) \in R')))\}$$

halmazt az R' és R relációk *kompozíciójának* vagy *összetételének* nevezzük, ahol az x, y, z és u változók nem szerepelnek R-ben és R'-ben.

Állítás. Injektív relációk kompozíciója injektív reláció.

Bizonyítás. Legyenek R és R' injektív relációk, és x, x', y és y' olyan változók, amelyek nem szerepelnek R-ben és R'-ben. Tegyük fel, hogy $(x, y) \in R' \circ R$, $(x', y') \in R' \circ R$ és $x \neq x'$. Léteznek olyan u és v halmazok, hogy $(x, u) \in R$, $(u, y) \in R'$, $(x', v) \in R$ és $(v, y') \in R'$. Az R injektivitása és $x \neq x'$ folytán $u \neq v$, továbbá R' injektivitása miatt $y \neq y'$, amiből következik, hogy az $R' \circ R$ reláció injektív. ■

Állítás. Legyenek R és R' relációk. Ekkor teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\overset{-1}{(R' \circ R)} = \overset{-1}{R} \circ \overset{-1}{R'}, \qquad pr_1(R' \circ R) = \overset{-1}{R}\langle pr_1 R' \rangle, \qquad pr_2(R' \circ R) = R'\langle pr_2 R \rangle.$$

Bizonyítás. 1) Az $(x, y) \in \overset{-1}{(R' \circ R)}$ kijelentés ekvivalens azzal, hogy $(y, x) \in R' \circ R$, vagyis létezik olyan z, amelyre $(y, z) \in R$ és $(z, x) \in R'$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy létezik olyan z, amelyre $(x, z) \in \overset{-1}{R'}$ és $(z, y) \in \overset{-1}{R}$, vagyis $(x, y) \in \overset{-1}{R} \circ \overset{-1}{R'}$.

2) Ha $x \in pr_1(R' \circ R)$, akkor létezik olyan y, hogy $(x, y) \in R' \circ R$. Ekkor létezik olyan z, hogy $(x, z) \in R$ és $(z, y) \in R'$, ezért $(z, x) \in \overset{-1}{R}$ és $z \in pr_1 R'$, így $x \in \overset{-1}{R}\langle pr_1 R'\rangle$. Megfordítva, ha $x \in \overset{-1}{R}\langle pr_1 R'\rangle$, akkor van olyan z, hogy $(z, x) \in \overset{-1}{R}$ és $z \in pr_1 R'$. Ekkor $(x, z) \in R$ és létezik olyan y, hogy $(z, y) \in R'$. Ebből kapjuk, hogy $(x, y) \in R' \circ R$, ezért $x \in pr_1(R' \circ R)$.
3) Ha $y \in pr_2(R' \circ R)$, akkor van olyan x, hogy $(x, y) \in R' \circ R$, vagyis létezik olyan z, amelyre $(x, z) \in R$ és $(z, y) \in R'$. Ekkor $z \in pr_2 R$, tehát $y \in R'\langle pr_2 R\rangle$. Megfordítva, ha $y \in R'\langle pr_2 R\rangle$, akkor van olyan z, hogy $z \in pr_2 R$ és $(z, y) \in R'$. Ekkor van olyan x, hogy $(x, z) \in R$, így $(x, y) \in R' \circ R$, tehát $y \in pr_2(R' \circ R)$. ■

Állítás. Függvények kompozíciója függvény.

Bizonyítás. Legyenek f és f' függvények, és x, y, y' olyanok, hogy $(x, y) \in f' \circ f$ és $(x, y') \in f' \circ f$. Ekkor van olyan z és z', hogy $(x, z) \in f$, $(z, y) \in f'$, $(x, z') \in f$ és $(z', y') \in f'$. Az f reláció függvény, ezért $z = z'$, következésképpen $(z, y') \in f'$. De az f' reláció is függvény, így $y = y'$, amiből kapjuk, hogy az $f' \circ f$ reláció is függvény. ■

Tehát ha f és f' függvények, akkor $f' \circ f$ az a függvény, amelyre

$$Dom(f' \circ f) = \overset{-1}{f}\langle Dom(f')\rangle,$$

$$Im(f' \circ f) = f'\langle Im(f)\rangle,$$

és minden $x \in Dom(f' \circ f)$ pontra $(f' \circ f)(x) = f'(f(x))$ teljesül.

Állítás. Ha R, R' és R'' relációk, akkor

$$(R'' \circ R') \circ R = R'' \circ (R' \circ R).$$

Bizonyítás. Legyen $(x, y) \in (R'' \circ R') \circ R$. Ekkor van olyan z, hogy $(x, z) \in R$ és $(z, y) \in (R'' \circ R')$. Ez utóbbi állításból kapjuk olyan u létezését, amelyre $(z, u) \in R'$ és $(u, y) \in R''$. Ekkor $(x, z) \in R$ és $(z, u) \in R'$ miatt $(x, u) \in (R' \circ R)$, ugyanakkor $(u, y) \in R''$ is igaz, így $(x, y) \in R'' \circ (R' \circ R)$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $(R'' \circ R') \circ R \subseteq R'' \circ (R' \circ R)$.
Megfordítva, tegyük fel, hogy $(x, y) \in R'' \circ (R' \circ R)$. Létezik olyan u, hogy $(x, u) \in (R' \circ R)$ és $(u, y) \in R''$. Ekkor van olyan z, hogy $(x, z) \in R$ és $(z, u) \in R'$. Ebből következik, hogy $(z, y) \in (R'' \circ R')$ így $(x, z) \in R$ miatt $(x, y) \in (R'' \circ R') \circ R$. Ez azt jelenti, hogy $R'' \circ (R' \circ R) \subseteq (R'' \circ R') \circ R$.
Ezekből a meghatározottsági axióma alapján kapjuk a bizonyítandó állítást. ■

Definíció. Ha R reláció és Y halmaz, akkor az $\overset{-1}{R}\langle Y\rangle$ halmazt az Y halmaz R által létesített *inverz képének* (vagy *ősképének*) nevezzük.

Ha f függvény és Y halmaz, akkor $\overset{-1}{f}\langle Y\rangle = \{x | (x \in Dom(f)) \wedge (f(x) \in Y)\}$, tehát minden $x \in Dom(f)$ elemre az $x \in \overset{-1}{f}\langle Y\rangle$ és $f(x) \in Y$ kijelentések ekvivalensek. Ha f injektív függvény és X halmaz, akkor $\overset{-1}{f^{-1}}\langle X\rangle = f\langle X\rangle$.

Állítás. Ha f függvény és X, Y halmazok, akkor

a) $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle = Y \cap Im(f)$.

b) $X \cap Dom(f) \subseteq \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$ és ha f injekció, akkor $X \cap Dom(f) = \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$.

Bizonyítás. a) Ha $y \in f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle$, akkor van olyan $x \in \overset{-1}{f}\langle Y\rangle$, hogy $y = f(x)$; ekkor $f(x) \in Y$, tehát $y \in Y$, amiből következik, hogy $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle \subseteq Y \cap Im(f)$. Megfordítva, ha $y \in Y \cap Im(f)$, akkor $y \in Im(f)$ miatt van olyan $x \in Dom(f)$, hogy $y = f(x)$; ekkor $y \in Y$ miatt $x \in \overset{-1}{f}\langle Y\rangle$ is teljesül, tehát $y \in f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle$, vagyis $Y \cap Im(f) \subseteq f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle$.

b) Ha $x \in X \cap Dom(f)$, akkor $f(x) \in f\langle X\rangle$, tehát $x \in \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $x \in \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$. Ekkor $x \in Dom(f)$ és $f(x) \in f\langle X\rangle$, tehát létezik olyan $x' \in X \cap Dom(f)$, hogy $f(x) = f(x')$. Ha f injektív, akkor ebből az adódik, hogy $x = x'$, tehát $x \in X \cap Dom(f)$, így fennáll az $X \cap Dom(f) = \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$ egyenlőség. ■

Tehát ha f függvény, akkor

- minden Y halmazra $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle \subseteq Y$ és ha $Y \subseteq Im(f)$, akkor $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle = Y$;

- minden $X \subseteq Dom(f)$ halmazra $X \subseteq \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$, és ha f injektív, akkor $X = \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$.

Állítás. Legyenek f és g függvények.

a) Ha f és g injekciók, akkor $g \circ f$ is injekció és $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

b) Ha f ráképez a $Dom(g)$ halmazra és g ráképez az F halmazra, akkor $g \circ f$ ráképez az F halmazra.

c) Ha f bijekció az E és F halmazok között, és g bijekció az F és G halmazok között, akkor $g \circ f$ bijekció az E és G halmazok között.

Bizonyítás. a) Tudjuk, hogy injektív relációk kompozíciója injektív és függvények kompozíciója függvény. Ha R és R' relációk, akkor $(\overset{-1}{R' \circ R}) = \overset{-1}{R} \circ \overset{-1}{R'}$. Ezekből az állításokból és az inverzfüggvények értelmezéséből következik az állítás.

b) Ha $z \in F$, akkor van olyan $y \in Dom(g)$, hogy $z = g(y)$, mivel g ráképez F-re. Az f ráképez $Dom(g)$-re, ezért van olyan $x \in Dom(f)$, hogy $y = f(x)$. Ekkor $x \in Dom(g \circ f)$ és $z = (g \circ f)(x)$, tehát $g \circ f$ ráképez F-re.

c) Az a) alapján $g \circ f$ injekció, és a b) alapján $g \circ f$ ráképez G-re. ■

Állítás. Legyen $f : E \to F$ függvény.

a) Ha van olyan $g : F \to E$ függvény, hogy $f \circ g = id_F$, akkor $Im(f) = F$. (Az ilyen tulajdonságú g függvényeket az f *jobbinverzeinek* nevezzük.) Az f minden jobbinverze injekció.

b) Akkor és csak akkor létezik olyan $g : F \to E$ függvény, hogy $g \circ f = id_E$, ha f injekció. (Az ilyen tulajdonságú g függvényeket az f *balinverezeinek* nevezzük.) Az f minden balinverze szürjektív E-re.

Bizonyítás. a) Ha a $g : F \to E$ függvény jobbinverze f-nek, akkor $y \in F$ esetén $y = f(g(y))$, tehát $y \in Im(f)$. Továbbá, $y, y' \in Dom(g)$ és $g(y) = g(y')$ esetén $y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'$, tehát g injekció.

b) Ha a $g : F \to E$ függvény balinverze f-nek, akkor $x, x' \in Dom(f)$ és $f(x) = f(x')$ esetén $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$, tehát f injekció. Továbbá, ha $x \in E$, akkor $f(x) \in F$ olyan, hogy $x = g(f(x))$, tehát g ráképez E-re.

Megfordítva, ha f injekció és $Dom(f) \neq \emptyset$, akkor rögzítve tetszőleges $c \in Dom(f)$ pontot, a $g := \overset{-1}{f} \cup ((F \setminus Im(f)) \times \{c\})$ halmaz olyan függvény, amely balinverze f-nek. Ha $Dom(f) = \emptyset$, akkor az üres függvény balinverze f-nek. ■

Állítás. Minden $f : E \to F$ függvényre a következő állítások ekvivalensek:

a) f bijekció az E és F halmazok között.

b) Létezik olyan $g : F \to E$ függvény, hogy $f \circ g = id_F$ és $g \circ f = id_E$ (vagyis létezik olyan függvény, amely az f-nek egyszerre jobbinverze és balinverze).

c) Léteznek olyan $g, h : E \to F$ függvények, hogy $f \circ g = id_F$ és $h \circ f = id_E$ (vagyis f-nek létezik jobbinverze és létezik balinverze).

Bizonyítás. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Ha f bijekció E és F között, akkor f injekció, tehát van olyan $g : F \to E$ függvény, amely balinverze f-nek, vagyis $g \circ f = id_E$. Ekkor f a g-nek jobbinverze, tehát $Im(g) = E$. Megmutatjuk, hogy g injekció. Valóban, ha $y, y' \in F$ és $g(y) = g(y')$, akkor léteznek olyan $x, x' \in E$, hogy $y = f(x)$ és $y' = f(x')$, mivel f ráképez F-re. Ekkor $x = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = x'$, tehát g injekció. Ez azt jelenti, hogy g bijekció F és E között, így $g^{-1} = g^{-1} \circ id_E = g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = id_F \circ f = f$, amiből következik, hogy g jobbinverze is f-nek, mert $f \circ g = f \circ (g^{-1})^{-1} = f \circ f^{-1} = id_F$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Triviális.

c) $\Rightarrow$ *a)* Ha a c) feltétele teljesül, akkor az előző állítás szerint f injekció, mert van balinverze, és ráképez F-re, mert létezik jobbinverze. ■

A halmazok *méretének* összehasonlítása céljából vezetjük be a következő fogalmakat.

Definíció. Legyenek E és F halmazok.

- Az E és F *ekvipotensek*, ha létezik bijekció E és F között.

- Az E halmaz *kisebb-egyenlő számosságú* F-nél, ha létezik F-nek olyan részhalmaza, amely ekvipotens E-vel.

- Az E halmaz *kisebb számosságú* F-nél, ha E kisebb-egyenlő számosságú F-nél és nem ekvipotens F-fel.

- Az E és F halmazok *számosság tekintetében összehasonlíthatók*, ha E kisebb-egyenlő számosságú F-nél vagy F kisebb-egyenlő számosságú E-nél.

Az E halmaz pontosan akkor kisebb-egyenlő számosságú az F halmaznál, ha létezik $E \to F$ injekció. A Cantor-tétel szerint minden halmaz kisebb számosságú

a saját hatványhalmazánál. Ebből is látszik, hogy nem létezik az összes halmazok halmaza.

Megjegyezzük, hogy a *halmazok számosságának* fogalmát nem vezettük be. A *számosságoperáció* pontos definíciója megtalálható az I. fejezet 3. pontjának **40**. gyakorlatában.

Az eddigi axiomatikából nem következik, hogy bármely két halmaz összehasonlítható volna számosság tekintetében (feltéve, hogy az elmélet ellentmondásmentes).

Tétel. (*Schröder-Bernstein-tétel*) Ha az E halmaz kisebb-egyenlő számosságú az F halmaznál és az F halmaz kisebb-egyenlő számosságú az E halmaznál, akkor E és F ekvipotensek.

Bizonyítás. Legyenek $f : E \to F$ és $g : F \to E$ injekciók.

Először azt mutatjuk meg, hogy ha $H \subseteq E$ olyan halmaz, hogy $g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle = E \setminus H$, és $h : E \to F$ az a függvény, amelyre $x \in E$ esetén

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in H \\ g^{-1}(x) & \text{ha } x \in E \setminus H, \end{cases}$$

akkor h bijekció E és F között.

A h függvény *injektív*. Legyenek ugyanis $x, x' \in E$ és tegyük fel, hogy $h(x) = h(x')$. Ekkor lehetetlen az, hogy $x \in H$ és $x' \in E \setminus H$, különben $h(x) = f(x) \in f\langle H\rangle$ és $h(x') = g^{-1}(x') \in F \setminus f\langle H\rangle$, vagyis $h(x) \neq h(x')$. Az is lehetetlen, hogy $x \in E \setminus H$ és $x' \in H$ teljesüljön, különben $h(x) = g^{-1}(x) \in F \setminus f\langle H\rangle$ és $h(x') = f(x') \in f\langle H\rangle$, vagyis $h(x) \neq h(x')$. Ezért vagy $x, x' \in H$, vagy $x, x' \in E \setminus H$ teljesül. Az első esetben $f(x) = f(x')$, tehát f injektivitása miatt $x = x'$. A második esetben $g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$, tehát g^{-1} injektivitása miatt $x = x'$.

A h függvény ráképez F-re. Legyen ugyanis $y \in F$ tetszőleges. Ha $y \in F \setminus f\langle H\rangle$, akkor $g(y) \in E \setminus H$, így $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$. Ha $y \in f\langle H\rangle$, akkor létezik olyan $x \in H$, hogy $y = f(x)$, tehát $h(x) = f(x) = y$.

Tehát elegendő olyan $H \subseteq E$ halmazt előállítani, amelyre $g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle = E \setminus H$. Ehhez legyen $\mathscr{H} := \{X | (X \subseteq E) \wedge (g\langle F \setminus f\langle X\rangle\rangle \subseteq E \setminus X)\}$, és $H := \bigcup \mathscr{H}$. Megmutatjuk, hogy H olyan halmaz, amely rendelkezik a megkövetelt tulajdonsággal. Valóban, ha $X \in \mathscr{H}$, akkor $X \subseteq H$, tehát $g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle \subseteq g\langle F \setminus f\langle X\rangle\rangle \subseteq E \setminus X$, így $X \subseteq E \setminus g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle$. Ebből következik, hogy $H \subseteq E \setminus g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle$. Legyen most $X := E \setminus g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle$. Az imént láttuk, hogy $H \subseteq X$, ezért $g\langle F \setminus f\langle X\rangle\rangle \subseteq g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle = E \setminus X$, vagyis $X \in \mathscr{H}$, így $X \subseteq H$, azaz $X = H$. Ebből azonnal következik, hogy $E \setminus g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle = H$, azaz $g\langle F \setminus f\langle H\rangle\rangle = E \setminus H$. ■

Állítás. Ha E és F halmazok, akkor az "$f : E \to F$ *függvény*" és az "$f : E \rightarrowtail F$ *függvény*" kijelentések kollektivizálók az f változóban.

Bizonyítás. Ha $f : E \rightarrowtail F$ függvény, akkor $f \subseteq (Dom(f) \times Im(f)) \subseteq (E \times F)$, tehát $f \in \mathscr{P}(E \times F)$, ezért a részhalmaz axióma szerint az "$f : E \rightarrowtail F$ *függvény*" kijelentés kollektivizáló az f változóban, így létezik az E-ben értelmezett, F-be érkező függvények H halmaza. Ha $f : E \to F$ függvény, akkor $f \in H$, tehát ismét a részhalmaz axióma alkalmazásával kapjuk, hogy az "$f : E \to F$ *függvény*" kijelentés kollektivizáló az f változóban. ■

Jelölés. Ha E és F halmazok, akkor az

$$\mathscr{F}(E;F) := \{\ f \mid f : E \to F \textit{ függvény}\ \}$$

halmazt az *E-n értelmezett F-be érkező függvények halmazának* nevezzük. Az $\mathscr{F}(E;F)$ halmazt az F^E szimbólummal is jelöljük.

Definíció. Vezessük be a $0 := \emptyset$ és $1 := \{\emptyset\}$ jelöléseket. Ha E halmaz, akkor minden $H \subseteq E$ halmazra χ_H jelöli azt az E-n értelmezett $\{0,1\}$-be érkező függvényt, amelyre $x \in E$ esetén

$$\chi_H(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in H, \\ 0 & \text{ha } x \notin H \end{cases}$$

teljesül. Ha $H \subseteq E$, akkor a $\chi_H \in \mathscr{F}(E;\{0,1\})$ függvényt a H halmaz (E-re vonatkozó) *karakterisztikus függvényének* nevezzük.

Minden E halmazra a $\mathscr{P}(E) \to \mathscr{F}(E;\{0,1\})$; $H \mapsto \chi_H$ leképezés *bijekció*, tehát az E halmaz hatványhalmaza és az $\mathscr{F}(E;\{0,1\})$ függvényhalmaz között nagyon szoros kapcsolat van (ti. kitüntetett módon azonosíthatók).

Definíció. Az E halmaz feletti (*belső, kétváltozós*) *műveletnek* nevezünk minden $E \times E \to E$ típusú függvényt.

A műveletek adott helyen fölvett értékének jelölésére háromféle konvenciót alkalmaznak. Ha E halmaz és $\top : E \times E \to E$ művelet, akkor $(x,y) \in E \times E$ esetén a $\top((x,y)) \in E$ értéket a következőképpen jelölhetjük:

– *prefix* jelöléssel $\top\, x\, y$,

– *infix* jelöléssel $x \top y$,

– *postfix* jelöléssel $x\, y \top$.

Mi az infix jelölési konvenciót alkalmazzuk.

Definíció. Legyen E halmaz és $\top : E \times E \to E$ művelet.

- A $\top$ műveletet *asszociatívnak* nevezzük, ha minden $x, y, z \in E$ elemre

$$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$$

teljesül.

- A $\top$ műveletet *kommutatívnak* nevezzük, ha minden $x, y \in E$ elemre

$$x \top y = y \top x$$

teljesül.

- Az $\top$ műveletetet *neutráliselemesnek* nevezzük, ha létezik olyan $e \in E$, hogy minden $x \in E$ elemre

$$x \top e = e \top x = x$$

teljesül. Minden ilyen tulajdonságú $e \in E$ elemet a $\top$ művelet *neutrális elemének* nevezünk. (Megjegyezzük, hogy *legfeljebb egy* neutrális elem létezhet, mert ha $e, e' \in E$ neutrális elemek, akkor $e = e \top e' = e'$.)

- Ha $\top$ neutráliselemes és $e \in E$ a $\top$ neutrális eleme, akkor az $x \in E$ elem *inverzének* nevezünk minden olyan $x' \in E$ elemet, amelyre

$$x \top x' = x' \top x = e$$

teljesül. (Megjegyezzük, hogy ha $\top$ asszociatív és neutráliselemes művelet, akkor minden $x \in E$ elemnek *legfeljebb egy* inverze létezik, mert ha $x', x'' \in E$ inverzei x-nek, akkor $x' = e \top x' = (x'' \top x) \top x' = x'' \top (x \top x') = x'' \top e = x''$.)

- A neutráliselemes $\top$ műveletet *inverzelemesnek* nevezzük, ha az E minden elemének létezik inverze.

Definíció. Legyenek $\top$ és $\perp$ műveletek az E halmaz felett. Azt mondjuk, hogy a $\top$ művelet *disztributív* a $\perp$ műveletre nézve, ha minden $x, y, z \in E$ elemre

$$\begin{aligned} x \top (y \perp z) &= (x \top y) \perp (x \top z) \\ (y \perp z) \top x &= (y \top x) \perp (z \top x) \end{aligned}$$

teljesül.

Definíció. Egy halmaz feletti műveletet *csoportműveletnek* nevezünk, ha asszociatív, neutráliselemes és inverzelemes. A $(G, \top)$ párt *csoportnak* nevezzük, ha $\top$ csoportművelet a G halmaz felett.

Elnevezés. Azt mondjuk, hogy $(E_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer*, ha ez olyan függvény, amely az I halmazon értelmezett és minden $i \in I$ elemhez az E_i értéket rendeli. Ekkor az I halmazt (tehát a függvény definíciós tartományát) a halmazrendszer *indexhalmazának* és az I elemeit *indexeknek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszer *diszjunkt*, ha minden $i, j \in I$ indexre $i \neq j$ esetén $E_i \cap E_j = \emptyset$ teljesül.

Állítás. Legyen $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszer.

a) A $(\exists i)((i \in I) \wedge (x \in E_i))$ kijelentés kollektivizáló az x változóban.

b) Ha $I \neq \emptyset$, akkor a $(\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in E_i))$ kijelentés kollektivizáló az x változóban.

c) Az "$(f$ *függvény*$) \wedge (Dom(f) = I) \wedge ((\forall i)((i \in I) \Rightarrow (f(i) \in E_i)))$" kijelentés kollektivizáló az f változóban.

Bizonyítás. Jelölje F az $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszert.

a) Ha $(\exists i)((i \in I) \wedge (x \in E_i))$ teljesül, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x \in E_i = F(i) \in Im(F)$, tehát $x \in \bigcup Im(F)$, így a részhalmaz axióma alapján a) teljesül.

b) Legyen $i_0 \in I$ rögzített index. Ha $(\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in E_i))$ teljesül, akkor $x \in E_{i_0}$, ezért a részhalmaz axióma alapján b) teljesül.

c) Az a) szerint képezhető a $H := \{x | (\exists i)((i \in I) \wedge (x \in E_i))\}$ halmaz. Ha "$(f$ *függvény*$) \wedge (Dom(f) = I) \wedge ((\forall i)((i \in I) \Rightarrow (f(i) \in E_i)))$" teljesül, akkor $f \subseteq I \times H$, tehát $f \in \mathscr{P}(I \times H)$, ezért a részhalmaz axióma alapján c) teljesül. ■

Definíció. Legyen $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszer.

- $\bigcup_{i\in I} E_i := \{x|(\exists i)((i \in I) \wedge (x \in E_i))\}$ és ezt a halmazt az $(E_i)_{i\in I}$ *halmazrendszer uniójának* nevezzük.
- Ha $I \neq \emptyset$, akkor $\bigcap_{i\in I} E_i := \{x|(\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in E_i))\}$ és ezt a halmazt az $(E_i)_{i\in I}$ *halmazrendszer metszetének* nevezzük.
- $\prod_{i\in I} E_i := \{f|(f \text{ függvény}) \wedge (Dom(f) = I) \wedge ((\forall i)((i \in I) \Rightarrow (f(i) \in E_i)))\}$ és ezt a halmazt az $(E_i)_{i\in I}$ *halmazrendszer szorzatának* nevezzük.

Vigyázzunk arra, hogy halmazrendszer metszetének értelmezhetőségéhez szükséges az, hogy az indexhalmaz nem üres!

A halmazrendszer szorzatának fogalma a Descartes-szorzat fogalmának általánosítása (**19**. gyakorlat). A halmazrendszerek szorzatával kapcsolatban a következő függvényeket értelmezzük.

Definíció. - Legyen $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer és $E := \prod_{i\in I} E_i$. Ekkor minden $i \in I$ indexre a

$$pr_i : E \to E_i \ ; \ f \mapsto f(i)$$

függvényt az E szorzathalmaz i-edik *projekció-függvényének* nevezzük.
- Legyen E halmaz, $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer és $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{F}(E; E_i)$. Ekkor az

$$E \to \prod_{i\in I} E_i \ ; \ x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$$

függvényt az $(f_i)_{i\in I}$ *függvényrendszer együttesének* nevezzük.
- Legyenek $(E_i)_{i\in I}$ és $(F_i)_{i\in I}$ (egyenlő indexhalmazú) halmazrendszerek és legyen $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{F}(E_i; F_i)$. Ekkor a

$$\underset{i\in I}{\times} f_i : \prod_{i\in I} E_i \to \prod_{i\in I} F_i \ ; \ (x_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i\in I}$$

függvényt az $(f_i)_{i\in I}$ *függvényrendszer szorzatának* nevezzük.

Kiválasztási axióma. *Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \neq \emptyset$, akkor $\prod_{i\in I} E_i \neq \emptyset$.*

Megjegyezzük, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \neq \emptyset$, akkor a $\prod_{i\in I} E_i \neq \emptyset$ szorzathalmaz elemeit *kiválasztó függvényeknek* nevezik, mert ezek minden $i \in I$ indexhez hozzárendelik az E_i valamelyik elemét, vagyis az E_i nem üres halmazból kiválasztanak egy elemet.

A kiválasztási axióma olyan egzisztencia-axióma, amely abban az értelemben *nem konstruktív*, hogy semmiféle utalást nem tartalmaz arra vonatkozóan, hogy

milyen módon lehet kiválasztó függvényt előállítani; csak kiválasztó függvény *létezését* állítja. Ebből következik, hogy a kiválasztási axiómára hivatkozó bizonyítások szintén nem konstruktívak.

Habár a kiválasztási axiómának kigondolható olyan "természetes bizonyítása", amely első ránézésre elfogadhatónak tűnik (**46**. gyakorlat); alaposabb vizsgálatok után kiderül, hogy minden ilyen bizonyítás rossz, ha a kiválasztási axióma nélküli halmazelmélet ellentmondásmentes. Ma már ismeretes az, hogy a kiválasztási axióma *nem bizonyítható* a halmazelmélet többi axiómájából (*Cohen tétele*, 1963.), és *nem cáfolható*, vagyis a negációja sem bizonyítható (*Gödel tétele*, 1939.), feltéve, hogy a többi axióma ellentmondásmentes elméletet határoz meg. Ebből az is következik, hogy ha a halmazelmélet a kiválasztási axióma nélkül ellentmondásmentes, akkor az axiómarendszert akár a kiválasztási axiómával, akár annak negációjával bővítve szintén ellentmondásmentes elméletet kapunk.

A kiválasztási axiómát rendkívül gyakran alkalmazzuk a matematikában. A segítségével sok olyan matematikai objektum létezése igazolható, amelyek létezését eleve elvárjuk. Azonban a kiválasztási axiómára hivatkozva olyan megdöbbentő tulajdonságokkal rendelkező ún. *paradox* halmazok létezése is igazolható, amelyek előállíthatósága elképzelhetetlennek tűnik. E paradox halmazok közül az egyik leghíresebbet a *Banach-Tarski paradoxon* szolgáltatja, amely szerint bármely egységsugarú térbeli gömb szétdarabolható *véges sok* részhalmazra úgy, hogy e darabokból összeállíthatunk *két*, ugyancsak egységsugarú gömböt. Ebben nincs semmi *logikai* ellentmondás; csak *szemléleti* paradoxonról van szó.

Állítás. A kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden f függvényhez létezik olyan $g : Im(f) \to Dom(f)$ függvény, amely jobbinverze f-nek, vagyis $f \circ g = id_{Im(f)}$.

Bizonyítás. Tegyük fel a kiválasztási axiómát és legyen f tetszőleges függvény. Az $Im(f)$ halmaz definíciója szerint az $(\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle)_{y\in Im(f)}$ halmazrendszerre teljesül az, hogy minden $y \in Im(f)$ elemre $\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle \neq \emptyset$, tehát $\prod\limits_{y\in Im(f)} \overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle \neq \emptyset$. Ha g eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor g függvény és $Dom(g) = Im(f)$, továbbá $f \circ g = id_{Im(f)}$.

Megfordítva; tegyük fel, hogy minden f függvényhez létezik olyan $g : Im(f) \to Dom(f)$ függvény, amely jobbinverze f-nek, vagyis $f \circ g = id_{Im(f)}$. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \neq \emptyset$. Értelmezzük az $E := \bigcup\limits_{i\in I} E_i$ halmazt, és tekintjük az $(\{i\} \times E_i)_{i\in I}$ halmazrendszert. Legyen $E' := \bigcup\limits_{i\in I}(\{i\}\times E_i)$ és jelölje p_1 (illetve p_2) az $I\times E \to I$ (illetve $I\times E \to E$) projekció-függvényt. Ekkor $E' \subseteq I \times E$ és az $f := p_1|_{E'} : E' \to I$ függvény *ráképez* I-re, mert minden $i \in I$ indexre $E_i \neq \emptyset$. Ezért $Im(f) = I$ és $Dom(f) = E'$. Ha $g : I \to E'$ olyan függvény, hogy $f \circ g = id_{Im(f)} = id_I$, akkor az $s := p_2 \circ g : I \to E$ függvény olyan, hogy $Dom(s) = I$ és minden $i \in I$ elemre $s(i) \in E_i$, vagyis $s \in \prod\limits_{i\in I} E_i$. ■

Ennek fontos következménye, hogy ha E és F halmazok és létezik $E \to F$ szürjekció, akkor F kisebb-egyenlő számosságú E-nél.

Vannak olyan esetek, amikor szükségünk van szorzathalmaz elemének létezésére, de ehhez nem kell a kiválasztási axiómára hivatkozni. Ilyen eset az, amikor nem üres halmazok *véges* indexhalmazú rendszerének szorzatáról van szó (I. fejezet, 3. pont, **8**. gyakorlat), és ebben az esetben a halmazrendszer tagjai bármilyen méretű (nem üres) halmazok lehetnek. Ha az indexhalmaz számosságára nincs korlátozás, akkor is van ilyen eset, ami a következő állításból látható.

Állítás. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre E_i egy elemű halmaz. Ekkor $\prod\limits_{i\in I} E_i$ is egy elemű halmaz.

Bizonyítás. Jelölje E az $(E_i)_{i\in I}$ rendszert, így E az a függvény, amelyre $Dom(E)=I$ és minden $i \in I$ esetén $E(i) = E_i$. Jelölje $\mathcal{A}$ a következő kijelentést:

$$(\exists x)(\exists y)((z = (x, y)) \wedge (x \in Dom(E)) \wedge (y \in E(x))),$$

ami az E definíciója alapján ekvivalens a

$$(\exists i)(\exists y)((z = (i, y)) \wedge (i \in I) \wedge (y \in E_i))$$

kijelentéssel (természetesen az x, y és z változókat úgy választjuk, hogy E-ben ne szerepeljenek). Az $\mathcal{A}$ kijelentés kollektivizáló a z változóban, mert ha $z = (x, y)$, $x \in Dom(E)$ és $y \in E(x)$, akkor $z \in Dom(E) \times (\bigcup Im(E))$, ezért elég a részhalmaz axiómára hivatkozni. Megmutatjuk, hogy az $f := \{z|\mathcal{A}\}$ halmazra $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ teljesül. Valóban, f minden eleme pár, vagyis f reláció, továbbá f függvényreláció, mert ha $(x, y), (x, y') \in f$, akkor $x \in Dom(E)$ és $y, y' \in E(x)$, így $y = y'$, mivel $E(x)$ egy elemű halmaz. Azonkívül $Dom(f) \subseteq Dom(E) = I$ nyilvánvaló, és ha $i \in I$, akkor $E(i) = E_i \neq \emptyset$, tehát ha $y \in E(i)$ tetszőleges elem, akkor $(i, y) \in f$, így $Dom(f) = I$. Az f definíciója szerint minden $i \in I$ elemre $f(i) \in E_i$, tehát $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$. Ez azt mutatja, hogy $\prod\limits_{i\in I} E_i \neq \emptyset$. Ha $f' \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ tetszőleges, akkor minden $i \in I$ indexre $f'(i) \in E_i$ és $f(i) \in E_i$, így $f'(i) = f(i)$, mivel E_i egy elemű halmaz. Ezért $f' = f$, vagyis $\prod\limits_{i\in I} E_i$ egy elemű halmaz. ■

Definíció. Legyen R reláció.

- R *szimmetrikus*, ha

$$(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in R) \Rightarrow ((y, x) \in R))$$

teljesül, ahol az x és y változók nem szerepelnek R-ben.

- R *antiszimmetrikus*, ha

$$(\forall x)(\forall y)(((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R)) \Rightarrow x = y)$$

teljesül, ahol az x és y változók nem szerepelnek R-ben.

- R *tranzitív*, ha

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R)) \Rightarrow ((x, z) \in R))$$

teljesül, ahol az x, y és z változók nem szerepelnek R-ben.

- R *reflexív* az E halmazon, ha

$$(\forall x)((x \in E) \Rightarrow ((x,x) \in R))$$

teljesül, ahol az x változó nem szerepel R-ben.

Definíció. Ha R reláció és E halmaz, akkor az

$$R_E := R \cap (E \times E)$$

halmazt az R reláció E halmazra vett *leszűkítésének* nevezzük.

Könnyen látható, hogy szimmetrikus (ill. antiszimmetrikus, ill. tranzitív) reláció leszűkítése bármely halmazra szintén szimmetrikus (ill. antiszimmetrikus, ill. tranzitív) reláció. Ha az R reláció reflexív az E halmazon, akkor az R leszűkítése az E bármely részhalmazára szintén reflexív reláció a részhalmazon.

Állítás. Legyen R reláció.

a) R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.

b) R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq id_{pr_1 R}$.

c) R pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.

d) R pontosan akkor reflexív az E halmazon, ha $id_E \subseteq R$.

Bizonyítás. a) Az $\overset{-1}{R} = R$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy minden x-re és minden y-ra $((x,y) \in R) \Leftrightarrow ((y,x) \in R)$. Ez utóbbi állítás egyenértékű az R reláció szimmetrikusságával.

b)Az $(x,y) \in R \cap \overset{-1}{R}$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy $((x,y) \in R) \wedge ((y,x) \in R)$. Tehát ha R antiszimmetrikus, akkor $(x,y) \in R \cap \overset{-1}{R}$ esetén $x = y$, így $(x,y) \in id_{pr_1 R}$. Megfordítva, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq id_{pr_1 R}$ és $((x,y) \in R) \wedge ((y,x) \in R)$, akkor $(x,y) \in id_{pr_1 R}$, ezért $x = y$, vagyis R antiszimmetrikus.

c) Ha $(x,y) \in R \circ R$, akkor van olyan z, hogy $(x,z) \in R$ és $(z,y) \in R$, így R tranzitivitásából $(x,y) \in R$ következik, tehát ha R tranzitív, akkor $R \circ R \subseteq R$. Megfordítva, ha $R \circ R \subseteq R$, akkor $(x,y) \in R$ és $(y,z) \in R$ esetén $(x,z) \in R \circ R \subseteq R$, vagyis R tranzitív.

d) Világos, hogy $(x,y) \in id_E$ esetén $x \in E$ és $x = y$, tehát ha R reflexív az E halmazon, akkor az $(x,y) \in id_E$ állításból $(x,y) = (x,x) \in R$ következik, vagyis $id_E \subseteq R$. Megfordítva, ha $id_E \subseteq R$ és $x \in E$, akkor $(x,x) \in id_E \subseteq R$, tehát R reflexív az E halmazon. ■

Definíció. Azt mondjuk, hogy az R reláció *ekvivalencia az E halmaz felett*, ha $R \subseteq E \times E$ és R szimmetrikus, tranzitív és reflexív az E halmazon. Azt mondjuk, hogy az R reláció *rendezés az E halmaz felett*, ha $R \subseteq E \times E$ és R antiszimmetrikus, tranzitív és reflexív az E halmazon.

Példák. 1) Ha E halmaz, akkor az

$$=_E := \{(x,y)|(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (x = y)\}$$

reláció ekvivalencia az E halmaz felett; ezt nevezzük az E feletti *egyenlőség-relációnak*. Ez a reláció egyben rendezés is E felett.

2) Ha E halmaz, akkor az

$$\approx_E := \{(x,y)|(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (\text{"}x \text{ ekvipotens } y\text{-nal"})\}$$

reláció ekvivalencia az E halmaz felett; ezt nevezzük az E feletti *ekvipotencia-relációnak*.

3) Ha E halmaz, akkor az

$$\subseteq_E := \{(x,y)|(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (x \subseteq y)\}$$

reláció rendezés az E halmaz felett; ezt nevezzük az E feletti *tartalmazás-relációnak*.

4) Ha E halmaz, akkor az

$$\{(x,y)|(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (x \text{ kisebb-egyenlő számosságú } y\text{-nál})\}$$

reláció tranzitív és reflexív az E halmazon, de általában nem rendezés és nem ekvivalencia az E halmaz felett.

5) Ha E halmaz, akkor az

$$\in_E := \{(x,y)|(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (x \in y)\}$$

relációt az E feletti *elem-relációnak* nevezzük.

Jelölés. Az ekvivalenciákra és rendezésekre speciális infix jelölést alkalmazunk.

- Az ekvivalenciákat a $\approx$ szimbólummal jelöljük, és ha $\approx$ ekvivalencia az E halmaz felett, akkor $x, y \in E$ esetén $(x,y) \in \approx$ helyett azt írjuk, hogy $x \approx y$.
- A rendezéseket a $\leq$ szimbólummal jelöljük, és ha $\leq$ rendezés az E halmaz felett, akkor $x, y \in E$ esetén $(x,y) \in \leq$ helyett azt írjuk, hogy $x \leq y$.

Definíció. Ha $\approx$ evivalencia az E halmaz felett, akkor $\approx$ szerinti *ekvivalencia-osztálynak* nevezünk minden olyan $X \subseteq E$ halmazt, amelyre teljesülnek a következők.

- $X \neq \emptyset$ és minden $x, x' \in X$ elemre $x \approx x'$.
- Minden $x \in X$ és $x' \in E$ elemre, ha $x \approx x'$, akkor $x' \in X$.

Állítás. Legyen $\approx$ evivalencia az E halmaz felett.

a) Ha X és X' ekvivalencia-osztályok $\approx$ szerint és $X \cap X' \neq \emptyset$, akkor $X = X'$.

b) Minden $x \in E$ elemhez létezik egyetlen olyan X ekvivalencia-osztály $\approx$ szerint, hogy $x \in X$.

c) Az "X ekvivalencia-osztály $\approx$ szerint" kijelentés kollektivizáló az X változóban, ha X nem szerepel E-ben.

d) Legyen $E/\approx := \{X|X$ ekvivalencia-osztály $\approx$ szerint $\}$. Ekkor az $\{(x,X)|(X \in E/\approx) \wedge (x \in X)\}$ halmaz olyan E-n értelmezett, $E/\approx$-ba érkező függvény, amely ráképez $E/\approx$-ra.

Bizonyítás. a) Legyenek X és X' ekvivalencia-osztályok $\approx$ szerint és tegyük fel, hogy $X \cap X' \neq \emptyset$. Legyen $z \in X \cap X'$ tetszőlegesen rögzített elem. Ha $x \in X$, akkor $z \in X$ miatt $x \approx z$. Ekkor $z \approx x$ is teljesül és $z \in X'$, ezért $x \in X'$. Ez azt jelenti, hogy $X \subseteq X'$. Felcserélve X-t és X'-t, valamint x-t es x'-t; az előző érvelés azt adja, hogy $X' \subseteq X$, tehát a meghatározottsági axióma alapján $X = X'$.

b) Legyen $x \in E$ és tekintsük az $X := \{x'|(x' \in E) \wedge (x \approx x')\}$ halmazt. Világos, hogy $X \subseteq E$ olyan halmaz, hogy $x \in X$, mivel a $\approx$ reláció reflexív az E halmazon. Ha $x', x'' \in X$, akkor $x \approx x'$ és $x \approx x''$, tehát $\approx$ szimmetrikussága és tranzitivitása folytán $x' \approx x''$. Ha $x' \in E$, $x'' \in X$ és $x' \approx x''$, akkor $x \approx x''$, tehát ismét az $\approx$ reláció szimmetrikussága és tranzitivitása miatt $x \approx x'$, így $x' \in X$. Ez azt jelenti, hogy X ekvivalencia-osztály $\approx$ szerint és $x \in X$. Ha X' is ekvivalencia-osztály $\approx$ szerint és $x \in X'$, akkor $x \in X \cap X'$, tehát az a) alapján $X = X'$.

c) Ha X ekvivalencia-osztály $\approx$ szerint, akkor $X \in \mathscr{P}(E)$, tehát a részhalmaz axióma alapján c) teljesül.

d) Legyen $F := \{(x,X)|(X \in E/\approx) \wedge (x \in X)\}$. Ha $(x,X),(x,X') \in F$, akkor X és X' olyan ekvivalencia-osztályok $\approx$ szerint, hogy $x \in X \cap X'$, tehát az a) szerint $X = X'$. Ezért F függvény és a b) következtében pr_1F $(= Dom(F))$ egyenlő E-vel és a c) alapján nyilvánvaló, hogy pr_2F $(= Im(F))$ egyenlő az összes $\approx$ szerinti ekvivalencia-osztályok halmazával, vagyis $E/\approx$-mal. ■

Definíció. Legyen $\approx$ ekvivalencia E felett. Ekkor

$$E/\approx := \{X|X \text{ ekvivalencia-osztály } \approx \text{ szerint}\},$$

és ezt a halmazt az E halmaz $\approx$ ekvivalencia szerinti *faktorhalmazának* nevezzük. A

$$\pi_{E/\approx} := \{(x,X)|(X \in E/\approx) \wedge (x \in X)\}$$

függvényt az E és $E/\approx$ közötti *kanonikus szürjekciónak* nevezzük.

Definíció. Az $(E,\leq)$ párt *rendezett halmaznak* nevezzük, ha $\leq$ rendezés az E halmaz felett. Ha $(E,\leq)$ rendezett halmaz, akkor az $x,x' \in E$ elemeket *összehasonlíthatóknak* nevezzük a $\leq$ rendezés szerint, ha $x \leq x'$ vagy $x' \leq x$ teljesül. Az $(E,\leq)$ párt *lineárisan rendezett halmaznak* nevezzük, ha $(E,\leq)$ olyan rendezett halmaz, hogy az E bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint. Az E halmaz feletti $\leq$ relációt *lineáris rendezésnek* nevezzük, ha $(E,\leq)$ lineárisan rendezett halmaz.

Ha E legalább két elemű halmaz, akkor a $(\mathscr{P}(E), \subseteq_{\mathscr{P}(E)})$ pár rendezett halmaz, de nem lineárisan rendezett.

Megjegyezzük, hogy ha $(E,\leq)$ rendezett halmaz, akkor minden $F \subseteq E$ halmazra a $\leq_F$ leszűkített reláció szintén rendezés F felett, tehát az $(F,\leq_F)$ pár is rendezett halmaz.

Definíció. Legyen $(E,\leq)$ rendezett halmaz.

- Az $X \subseteq E$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in E$ elemet, amelyre teljesül az, hogy minden $x' \in X$ elemre $x' \leq x$ (illetve $x \leq x'$). Az $X \subseteq E$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik X-nek felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq E$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq E$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük az E minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja X-nek és eleme X-nek (Ez egyértelműen van meghatározva, de nem szükségképpen létezik.)
- Az $X \subseteq E$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *határának* nevezzük az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátját. (Ez is egyértelműen van meghatározva, de nem szükségképpen létezik.) A felső (illetve alsó) határ elnevezés helyett a *szuprémum* (illetve *infimum*) elnevezést is használjuk.

Jelölés. Legyen $(E, \leq)$ rendezett halmaz. Ha az $X \subseteq E$ halmaznak létezik szuprémuma (illetve infimuma), akkor azt a $\sup(X)$ (illetve $\inf(X)$) szimbólummal jelöljük. Ha T halmaz, és $f : T \to E$ olyan függvény, hogy az $Im(f)$ halmaznak létezik szuprémuma (illetve infimuma), akkor a

$$\sup(f) := \sup(Im(f)), \quad \inf(f) := \inf(Im(f))$$

elemet az f függvény *szuprémumának* (illetve *infimumának*) nevezzük. Speciálisan, ha $(x_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $x_i \in E$, akkor a

$$\sup_{i \in I} x_i := \sup(\{x_i | i \in I\}), \ \inf_{i \in I} x_i := \inf(\{x_i | i \in I\})$$

elemet az E-ben haladó $(x_i)_{i \in I}$ rendszer szuprémumának (illetve infimumának) nevezzük.

Jelölés. Ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, x' \in E$ esetén $x < x'$ az $(x \leq x') \wedge (x \neq x')$ kijelentés rövidítése.

Állítás. Legyen $(E, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz és $X \subseteq E$. Az $y \in E$ elem pontosan akkor szuprémuma az X halmaznak, ha y felső korlátja X-nek és minden $z \in E$ elemhez, $z < y$ esetén létezik olyan $x \in X$, hogy $z < x$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy y rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Ekkor y felső korlátja X-nek, és ha z szintén felső korlátja X-nek, akkor $z < y$ lehetetlen, különben a feltevés alapján létezne olyan $x \in X$, hogy $z < x$, ami ellentmond annak, hogy z felső korlátja X-nek. Tehát ha z felső korlátja X-nek, akkor $z < y$ nem igaz, ugyanakkor $(E, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz, ezért $y \leq z$, vagyis y a legkisebb felső korlátja X-nek. Megfordítva, legyen y szuprémuma X-nek. Ekkor y a legkisebb felső korlátja X-nek, tehát ha $z \in E$ olyan elem, hogy $z < y$, akkor z nem lehet felső korlátja X-nek, így létezik olyan $x \in X$, hogy $x \leq z$ nem igaz. De $(E, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz, ezért ekkor szükségképpen $z < x$. ■

Definíció. Ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in E$ esetén

$$[x, y] := \{z | (z \in E) \wedge (x \leq z) \wedge (z \leq y)\}, \quad [x, \to [:= \{z | (z \in E) \wedge (x \leq z)\}$$
$$[x, y[:= \{z | (z \in E) \wedge (x \leq z) \wedge (z < y)\}, \quad]x, \to [:= \{z | (z \in E) \wedge (x < z)\}$$
$$]x, y] := \{z | (z \in E) \wedge (x < z) \wedge (z \leq y)\}, \quad] \leftarrow, x] := \{z | (z \in E) \wedge (z \leq x)\}$$
$$]x, y[:= \{z | (z \in E) \wedge (x < z) \wedge (z < y)\}, \quad] \leftarrow, x[:= \{z | (z \in E) \wedge (z < x)\}.$$

Az ilyen alakú halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

Definíció. Legyenek $(E, \leq)$ és $(E', \leq')$ rendezett halmazok.

- Azt mondjuk, hogy az $f : E \to E'$ függvény *monoton növő* (illetve *monoton fogyó*), ha minden $x, y \in E$ elemre, $x \leq y$ esetén $f(x) \leq' f(y)$ (illetve $f(y) \leq' f(x)$) teljesül.

- Azt mondjuk, hogy az $f : E \to E'$ függvény *szigorúan monoton növő* (illetve *szigorúan monoton fogyó*), ha minden $x, y \in E$ elemre, $x < y$ esetén $f(x) <' f(y)$ (illetve $f(y) <' f(x)$) teljesül.

- Azt mondjuk, hogy az $f : E \to E'$ függvény *izomorfizmus* az $(E, \leq)$ és $(E', \leq')$ rendezett halmazok között, ha f bijekció és minden $x, y \in E$ elemre $f(x) \leq f(y)$ ekvivalens azzal, hogy $f(x) \leq' f(y)$.

- Az $(E, \leq)$ és $(E', \leq')$ rendezett halmazokat *izomorfaknak* mondjuk, ha létezik izomorfizmus az $(E, \leq)$ és $(E', \leq')$ rendezett halmazok között.

Könnyen látható, hogy ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz és $(E', \leq')$ lineárisan rendezett halmaz, akkor egy $f : E \to E'$ függvény pontosan akkor izomorfizmus $(E, \leq)$ és $(E', \leq')$ között, ha f szigorúan monoton növő és $Im(f) = E'$. Azonban ha $(E', \leq')$ nem lineárisan rendezett, akkor az f szigorú monoton növéséből nem következik az f injektivitása, de még ha injektív is az f függvény, akkor is előfordulhat az, hogy $x, y \in E$, $f(x) <' f(y)$, de $x < y$ nem igaz.

Definíció. A $(E, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak* nevezzük, ha rendezett halmaz és az E minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme. Az E halmaz feletti $\leq$ relációt *jólrendezésnek* nevezzük, ha $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz.

Minden $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz lineárisan rendezett, mert ha $x, y \in E$, akkor a jólrendezettség miatt az $\{x, y\}$ halmaznak van legkisebb eleme, ezért x és y összehasonlíthatók a $\leq$ rendezés szerint.

Egyáltalán nem nyilvánvaló az, hogy minden halmaz felett létezik jólrendezés, pedig ez a helyzet; ezt mondja ki a *Zermelo-féle jólrendezési tétel* (**54**. gyakorlat). Például a valós számok halmazán (amelyről a II. fejezet 1. pontjában lesz szó) szintén létezik jólrendezés, de eddig még nem sikerült konkrét jólrendezést megadni ezen a halmazon.

Definíció. Legyen $(E, \leq)$ rendezett halmaz. Az $X \subseteq E$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X-nek nem létezik x-nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

Vigyázzunk arra, hogy ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz és $X \subseteq E$, akkor az X legnagyobb (illetve legkisebb) eleme (ha létezik) az X-nek maximális (illetve minimális) eleme, azonban létezhetnek X-nek olyan maximális (illetve minimális) elemei, amelyek az X bizonyos elemeivel nem hasonlíthatók össze. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha az $x \in X$ elem nem hasonlítható össze az X egyetlen elemével sem, akkor x egyszerre maximális és minimális eleme is X-nek.

Bizonyos matematikai objektumok egyes tulajdonságai egyenértékűek valamely rendezés szerinti maximalitással, ezért ilyen tulajdonságú objektumok *létezésének* bizonyíthatósága szempontjából fontos szerepe lehet minden olyan állításnak, amely

- eléggé általános feltételek mellett - maximális elemek létezését mondja ki rendezett halmazokban. Ilyen állítás a *Kuratowski-Zorn lemma.* Ennek bizonyítását készíti elő a következő definíció és lemma.

Definíció. Az $(E, \leq)$ rendezett halmaz *szegmensének* nevezünk minden olyan $S \subseteq E$ halmazt, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in S$ elemre $]\leftarrow, x] \subseteq S$. Az $(E, \leq)$ rendezett halmaz E-től különböző szegmenseit *valódi szegmenseknek* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz, akkor minden $x \in E$ elemre az $]\leftarrow, x]$ és $]\leftarrow, x[$ intervallumok szegmensek.

Megfordítva, ha $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz, akkor minden $S \subseteq E$ valódi szegmenshez egyértelműen létezik olyan $x \in E$, hogy $S =]\leftarrow, x[$. Valóban, $E \backslash S \neq \emptyset$, tehát van olyan $x \in E \setminus S$, hogy x az $E \setminus S$ legkisebb eleme. Ekkor $y \in]\leftarrow, x[$ esetén $y \in S$, különben $y \in E \setminus S$ teljesülne, tehát $x \leq y$ igaz volna. Ezért $]\leftarrow, x[\subseteq S$. Ha pedig $y \in S$, akkor $y \leq x$ vagy $x \leq y$; világos, hogy $x \leq y$ lehetetlen, mert S szegmens, $y \in S$ és $x \notin S$, így $y \leq x$ és persze $x \neq y$, tehát $y \in]\leftarrow, x[$. Ezért $S \subseteq]\leftarrow, x[$ is teljesül.

Lemma. Ha $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz és $(S_i)_{i \in I}$ szegmensek tetszőleges rendszere, akkor $\bigcup\limits_{i \in I} S_i$ is szegmens.

Bizonyítás. Feltehető, hogy az $S := \bigcup\limits_{i \in I} S_i$ halmaz nem egyenlő E-vel (különben az állítás igaz). Legyen x az $E \setminus S$ halmaz legkisebb eleme; igazoljuk, hogy $S =]\leftarrow, x[$. Valóban, minden $y \in E \setminus S$ elemre $x \leq y$, vagyis $y \in E \backslash]\leftarrow, x[$, ezért $]\leftarrow, x[\subseteq S$. Megfordítva, ha $y \in S$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $y \in S_i$. Ha $x \leq y$ teljesülne, akkor $x \in S_i$, mert S_i szegmens, tehát $x \in S$ igaz volna, holott $x \notin S$. Ezért $y < x$, ami azt jelenti, hogy $S \subseteq]\leftarrow, x[$. ■

Tétel. (*Kuratowski-Zorn lemma*) Ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz és az E minden olyan részhalmaza felülről korlátos, amelynek bármely két eleme összehasonlítható, akkor E-nek létezik maximális eleme.

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{P}_0(E)$ az E nem üres részhalmazainak halmazát. A kiválasztási axiómából következik, hogy a $\prod\limits_{X \in \mathscr{P}_0(E)} X$ szorzathalmaz nem üres; legyen f ennek tetszőleges eleme. Tehát f olyan függvény, amely az E nem üres részhalmazainak halmazán értelmezett és minden $X \subseteq E$ nem üres halmazra $f(X) \in X$. Megjegyezzük, hogy az $(E, \leq)$ rendezett halmazra vonatkozó hipotézis alapján $E \neq \emptyset$, mert az $\emptyset \subseteq E$ halmaz bármely két eleme nyilvánvalóan összehasonlítható, tehát $\emptyset$-nak létezik felső korlátja E-ben, vagyis létezik E-nek eleme.

Nevezzünk egy $H \subseteq E$ halmazt f-regulárisnak, ha teljesülnek rá a következők.

a) A $(H, \leq_H)$ pár olyan *jólrendezett* halmaz, amelynek $f(E)$ a legkisebb eleme.

b) Minden $x \in H$ elemre fennáll az

$$x = f(\{z | (z \in E) \wedge (H \cap]\leftarrow, x[\subseteq]\leftarrow, z[)\})$$

egyenlőség.

Például az $\{f(E)\}$ egy elemű halmaz nyilvánvalóan f-reguláris. Továbbá, ha $f(E)$ nem maximális eleme E-nek, vagyis $]f(E), \rightarrow [\neq \emptyset$, akkor az $\{f(E), f(]f(E), \rightarrow [)\}$ halmaz is f-reguláris. Továbbá, ha sem $f(E)$, sem $f(]f(E), \rightarrow [)$ nem maximális E-ben, akkor az $\{f(E), f(]f(E), \rightarrow [), f(]f(]f(E), \rightarrow [), \rightarrow [)\}$ halmaz is f-reguláris, s.í.t. Most néhány megállapítást teszünk f-reguláris halmazokkal kapcsolatban.

(I) Ha H és H' f-reguláris halmazok és $x \in H$, $x' \in H'$ és $H \cap] \leftarrow, x[= H' \cap] \leftarrow, x'[$, akkor $x = x'$. Valóban, ekkor $\{z | (z \in E) \wedge (H \cap] \leftarrow, x[\subseteq] \leftarrow, z[)\} = \{z | (z \in E) \wedge (H' \cap] \leftarrow, x'[\subseteq] \leftarrow, z[)\}$, ezért az f-reguláris halmazok b) tulajdonsága miatt

$$x = f(\{z | (z \in E) \wedge (H \cap] \leftarrow, x[\subseteq] \leftarrow, z[)\}) = f(\{z | (z \in E) \wedge (H' \cap] \leftarrow, x'[\subseteq] \leftarrow, z[)\}) = x'$$

(II) Ha H és H' f-reguláris halmazok, akkor H szegmense H'-nek vagy H' szegmense H-nak (a $\leq$ rendezés megfelelő halmazokra vett leszűkítése szerint). Jelölje ugyanis S a H és H' közös szegmenseinek *unióját.* Az előző lemma szerint S szegmense H-nak is és H'-nek is, ezért ha $S \neq H$ és $S \neq H'$ teljesülne (vagyis S valódi szegmense volna H-nak is és H'-nek is), akkor a $H \setminus S$ halmaz x legkisebb elemére és a $H' \setminus S$ halmaz x' legkisebb elemére $H \cap] \leftarrow, x[= H' \cap] \leftarrow, x'[$ igaz volna. Ekkor az (I) szerint $x = x'$ teljesülne, így a

$$H \cap] \leftarrow, x] = (H \cap] \leftarrow, x[) \cup \{x\} = (H' \cap] \leftarrow, x'[) \cup \{x'\} = H' \cap] \leftarrow, x']$$

halmaz szintén szegmense volna H-nak is és H'-nek is, vagyis $x \in H \cap] \leftarrow, x] \subseteq S$ teljesülne, holott $x \notin S$. Ezért szükségképpen $H = S$ vagy $H' = S$. Az első esetben H szegmense H'-nek, míg a második esetben H' szegmense H-nak.

(III) Ha $(H_i)_{i \in I}$ az E f-reguláris részhalmazainak tetszőleges rendszere, akkor a $H := \bigcup_{i \in I} H_i$ halmaz olyan, hogy minden $i \in I$ indexre és $x \in H_i$ elemre $] \leftarrow, x[\cap H_i =] \leftarrow, x[\cap H$ teljesül. Valóban, az nyilvánvaló, hogy $] \leftarrow, x[\cap H_i \subseteq] \leftarrow, x[\cap H$. A fordított tartalmazást indirekt bizonyítjuk, tehát feltesszük, hogy létezik olyan $x' \in] \leftarrow, x[\cap H$, hogy $x' \notin] \leftarrow, x[\cap H_i$. Ekkor $x' \in H$ miatt létezik olyan $i' \in I$, hogy $x' \in H_{i'}$. A (II) alapján $H_{i'}$ szegmense H_i-nek vagy H_i szegmense $H_{i'}$-nek (a $\leq$ rendezés megfelelő halmazokra vett leszűkítése szerint). A feltevés szerint $x' < x$, $x' \in H_{i'}$ és $x \in H_i$, ezért ha H_i szegmense volna $H_{i'}$-nek, akkor $x' \in H_i$ teljesülne, holott $x' \notin H_i$. Ezért H_i nem lehet szegmense $H_{i'}$-nek, következésképpen $H_{i'}$ szegmense H_i-nek. Ekkor viszont $x' \in H_{i'} \subseteq H_i$, ami ellentmond annak, hogy $x' \notin H_i$.

(IV) Ha H f-reguláris részhalmaza E-nek és létezik E-nek olyan eleme, amely felső korlátja H-nak és nem eleme H-nak, akkor létezik E-nek olyan $\overline{H}$ f-reguláris részhalmaza, hogy $H \subseteq \overline{H}$ és $H \neq \overline{H}$. Valóban, ekkor $\{x' | (x' \in E) \wedge (H \subseteq] \leftarrow, x')\} \neq \emptyset$, és az $x := f(\{x' | (x' \in E) \wedge (H \subseteq] \leftarrow, x')\})$ elem olyan, hogy $x \notin H$ és a $\overline{H} := H \cup \{x\}$ halmaz nyilvánvalóan f-reguláris.

(V) Jelölje $\mathscr{H}$ az E összes f-reguláris részhalmazainak *unióját.* Megmutatjuk, hogy a $\mathscr{H}$ halmaz f-reguláris.

Az $\{f(E)\}$ halmaz f-reguláris, ezért $f(E) \in \mathscr{H}$. Ha $x \in \mathscr{H}$, akkor van olyan H f-reguláris részhalmaza E-nek, hogy $x \in H$, tehát $f(E) \leq x$, mert $f(E)$ minden f-reguláris halmaznak a legkisebb eleme.

Ha $x, x' \in \mathscr{H}$, akkor léteznek olyan H és H' f-reguláris halmazok, hogy $x \in H$ és $x' \in H'$. A (II)-ből következik, hogy $H \subseteq H'$ vagy $H' \subseteq H$, így $x, x' \in H$ vagy

$x, x' \in H'$. De a H és H' bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, ezért x és x' is összehasonlíthatók a $\leq$ rendezés szerint. Ez azt jelenti, hogy $\leq$ rendezés $\mathscr{H}$-ra vett leszűkítése *lineáris rendezés* $\mathscr{H}$ felett.
Legyen $F \subseteq \mathscr{H}$ nem üres halmaz; megmutatjuk, hogy F-nek létezik legkisebb eleme a $\leq_{\mathscr{H}}$ rendezés szerint (és ez azt bizonyítja, hogy a $(\mathscr{H}, \leq_{\mathscr{H}})$ pár jólrendezett halmaz). Létezik E-nek olyan H f-reguláris részhalmaza, hogy $H \cap F \neq \emptyset$, így $H \cap F$-nek létezik legkisebb eleme a $\leq$ rendezés H-ra vett leszűkítése szerint, mivel $(H, \leq_H)$ jólrendezett halmaz; legyen ez x. A (III) alapján $H \cap]\leftarrow, x[= \mathscr{H} \cap]\leftarrow, x[$, ezért a $\mathscr{H}$ minden x-nél kisebb eleme H-nak is eleme, így az F-nek nem eleme. Másként fogalmazva: az F minden eleme nagyobb-egyenlő x-nél, hiszen a $\mathscr{H}$ bármely két eleme összehasonlítható. Ez azt jelenti, hogy x az F halmaz legkisebb eleme a $\leq_{\mathscr{H}}$ rendezés szerint.
Végül, ha $x \in \mathscr{H}$ és H olyan f-reguláris részhalmaza E-nek, hogy $x \in H$, akkor a (III) alapján $H \cap]\leftarrow, x[= \mathscr{H} \cap]\leftarrow, x[$, így az f-reguláris halmazok b) tulajdonsága folytán

$$x = f(\{z | (z \in E) \wedge (H \cap]\leftarrow, x[\subseteq]\leftarrow, z[)\}) = f(\{z | (z \in E) \wedge (\mathscr{H} \cap]\leftarrow, x[\subseteq]\leftarrow, z[)\}),$$

tehát $\mathscr{H}$ f-reguláris halmaz.
Most már könnyen bizonyítható az állítás. Az (V) szerint $\mathscr{H}$ a tartalmazás tekintetében legnagyobb f-reguláris részhalmaza E-nek, így a $\mathscr{H}$ bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint. Az $(E, \leq)$ rendezett halmazra vonatkozó feltétel szerint $\mathscr{H}$-nak létezik felső korlátja. Állítjuk, hogy ha x felső korlátja $\mathscr{H}$-nak, akkor x maximális eleme E-nek. Valóban, ha x nem volna maximális, akkor létezne x-nél nagyobb eleme E-nek. Ekkor a (IV) alapján létezne $\mathscr{H}$-t valódi részhalmazként tartalmazó f-reguláris halmaz, ami lehetetlen, mert $\mathscr{H}$ az E minden f-reguláris részhalmazát tartalmazza. ■

Ha egy E halmaz feletti $\leq$ rendezésre teljesül a Kuratowski-Zorn lemma hipotézise (tehát az E minden olyan részhalmaza felülről korlátos, amelynek bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ szerint), akkor azt mondjuk, hogy $\leq$ *induktív rendezés* az E halmaz felett. Ezt a terminológiát alkalmazva, a Kuratowski-Zorn lemma úgy is megfogalmazható, hogy minden induktívan rendezett halmaznak létezik maximális eleme.

Figyeljük meg, hogy valamivel erősebb tételt bizonyítottunk, mint amit állítottunk. A bizonyítás utolsó lépésében csak azt használtuk fel, hogy $\mathscr{H}$-nak létezik felső korlátja. Ugyanakkor az E rendezésének $\mathscr{H}$-ra vett leszűkítése *jólrendezés*, amit úgy fejezhetünk ki, hogy $\mathscr{H}$ jólrendezett részhalmaza E-nek. Ezért még az is igaz, hogy ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz és az E minden *jólrendezett részhalmaza* felülről korlátos, akkor E-nek létezik maximális eleme. A Kuratowski-Zorn lemma ilyen formájú élesítésére ritkán van szükségünk.

Vegyük észre, hogy a fenti bizonyításban a kiválasztási axiómát alkalmaztuk; ez nem véletlen. Elvileg nem volna kizárt az, hogy létezik a Kuratowski-Zorn lemmának olyan bizonyítása, amely nem hivatkozik a kiválasztási axiómára. Azonban *nincs ilyen bizonyítás* (feltéve, hogy a halmazelmélet a kiálasztási axióma nélkül ellentmondásmentes), mert a Kuratowski-Zorn lemma *ekvivalens* a kiválasztási axiómával (**55**. gyakorlat).

Gyakorlatok

1. Ha R reláció, akkor minden X halmazra $X \subseteq pr_1 R$ ekvivalens az $X \subseteq \overset{-1}{R}(R(X))$ tartalmazással.

2. Ha R és S relációk, akkor $pr_1 R \subseteq pr_1 S$ ekvivalens azzal, hogy $R \subseteq R \circ \overset{-1}{S} \circ S$. Ha R reláció, akkor $R \subseteq R \circ \overset{-1}{R} \circ R$.

3. Ha R reláció, akkor $\overset{-1}{R} \circ R = \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha $R = \emptyset$.

4. Ha R reláció és E, F halmazok, akkor

$$(E \times F) \circ R = \overset{-1}{R}(E) \times F$$
$$R \times (E \times F) = E \times R\langle F \rangle.$$

5. Ha R, S és T relációk, akkor

$$(R \circ S) \cap T \subseteq (R \cap (T \circ \overset{-1}{S})) \circ (S \cap (\overset{-1}{R} \circ T)).$$

6. Ha E, F, E' és F' halmazok, akkor

$$(E \times F) \circ (E' \times F') = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } E \cap F' = \emptyset, \\ E' \times F, & \text{ha } E \cap F' \neq \emptyset. \end{cases}$$

7. Ha R reláció, akkor a következő állítások ekvivalensek.
a) Minden X és Y halmazra $\overset{-1}{R}\langle X \cap Y \rangle = \overset{-1}{R}\langle X \rangle \cap \overset{-1}{R}\langle Y \rangle$.
b) Minden X és Y halmazra, ha $X \cap Y = \emptyset$, akkor $\overset{-1}{R}\langle X \rangle \cap \overset{-1}{R}\langle Y \rangle$.
c) Minden X halmazra $R\langle \overset{-1}{R}\langle X \rangle \rangle \subseteq X$ teljesül.
d) Minden S és T relációra $(S \circ T) \cap R = (S \circ R) \cap (T \circ R)$.

8. Ha $(R_i)_{i \in I}$ relációk tetszőleges rendszere, akkor minden X halmazra

$$(\bigcup_{i \in I} R_i)\langle X \rangle = \bigcup_{i \in I} R_i \langle X \rangle,$$

és ha $I \neq \emptyset$, akkor minden X *egy elemű* halmazra

$$(\bigcap_{i \in I} R_i)\langle X \rangle = \bigcap_{i \in I} R_i \langle X \rangle.$$

Azonban léteznek olyan R, S relációk és X halmaz, amelyekre

$$(R \cap S)\langle X \rangle \neq R\langle X \rangle \cap S\langle X \rangle.$$

9. Legyenek E, F, G és H halmazok, valamint $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ függvények. Ha $g \circ f$ és $h \circ g$ bijekciók, akkor f, g és h mindhárman bijekciók.

10. Legyenek E, F és G halmazok, valamint $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$ függvények. Ha a $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ és $f \circ h \circ g$ függvények közül bármely kettő injektív és a harmadik szürjektív, vagy bármely kettő szürjektív és a harmadik injektív, akkor f, g és h mindhárman bijekciók.

11. Ha van olyan függvény, amely eleme a saját definíciós tartományának, akkor léteznek olyan E, F és G halmazok, amelyekre $E \in F \in G \in E$ teljesül. (ld. I.3.**45**. gyakorlat: *a fundáltsági axióma.*)

12. (*A halmazmetszet és halmazunió kommutativitása.*) Ha $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer, K halmaz és $\sigma : K \to I$ szürjekció, akkor $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \bigcup\limits_{k\in K} E_{\sigma(k)}$, és ha $I \neq \emptyset$, akkor $\bigcap\limits_{i\in I} E_i = \bigcap\limits_{k\in K} E_{\sigma(k)}$ teljesül.

13. (*Az unió és metszet asszociativitása.*) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer és $(I_j)_{j\in J}$ olyan halmazrendszer, amelyre $I = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$. Ekkor

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in I_j} E_i,$$

és ha $J \neq \emptyset$, valamint minden $j \in J$ indexre $I_j \neq \emptyset$, akkor

$$\bigcap_{i\in I} E_i = \bigcap_{j\in J} \bigcap_{i\in I_j} E_i$$

teljesül.

14. (*de Morgan azonosságok.*) Ha E halmaz és $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $I \neq \emptyset$, akkor

$$E \setminus \bigcup_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I} (E \setminus E_i),$$
$$E \setminus \bigcap_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} (E \setminus E_i)$$

teljesül.

15. Legyenek E, F halmazok, $f : E \to F$ függvény, továbbá $(E_i)_{i\in I}$ az E és $(F_i)_{i\in I}$ az F részhalmazainak tetszőleges rendszere. Ekkor

$$f\langle \bigcup_{i\in I} E_i \rangle = \bigcup_{i\in I} f\langle E_i \rangle,$$
$$\overset{-1}{f}\langle \bigcup_{i\in I} F_i \rangle = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}\langle E_i \rangle,$$

és ha $I \neq \emptyset$, akkor

$$\begin{aligned} f\langle \bigcap_{i\in I} E_i\rangle &\subseteq \bigcap_{i\in I} f\langle E_i\rangle, \\ \overset{-1}{f}\langle \bigcap_{i\in I} F_i\rangle &= \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}\langle E_i\rangle. \end{aligned}$$

Ha f *injektív* és $I \neq \emptyset$, akkor

$$f\langle \bigcap_{i\in I} E_i\rangle = \bigcap_{i\in I} f\langle E_i\rangle.$$

Ha $Y \subseteq F$, akkor

$$\overset{-1}{f}\langle F \setminus Y\rangle = \overset{-1}{f}\langle F\rangle \setminus \overset{-1}{f}\langle Y\rangle,$$

és ha $X \subseteq E$ és f *injektív*, akkor

$$f\langle E \setminus X\rangle = f\langle E\rangle \setminus f\langle X\rangle.$$

16. Legyenek E, F, E' és F' halmazok.
- Ha $u : E' \to E$ *szürjekció* és $v : F \to F'$ *injekció*, akkor az

$$\mathscr{F}(E;F) \to \mathscr{F}(E';F') \quad ; \quad f \longmapsto v \circ f \circ u$$

függvény *injekció*.
- Ha $u : E' \to E$ *injekció* és $v : F \to F'$ *szürjekció*, akkor az

$$\mathscr{F}(E;F) \to \mathscr{F}(E';F') \quad ; \quad f \longmapsto v \circ f \circ u$$

függvény *szürjekció*.

17. Legyenek E, F halmazok és minden $R \subseteq E \times F$ relációra értelmezzük a következő függvényt:

$$\hat{R} : E \to \mathscr{P}(F) \quad ; \quad x \longmapsto R\langle\{x\}\rangle.$$

Ekkor a

$$\mathscr{P}(E \times F) \to \mathscr{F}(E;\mathscr{P}(F)) \quad ; \quad R \longmapsto \hat{R}$$

függvény *bijekció*.

18. Legyenek E, F, G halmazok és minden $f : E \times F \to G$ függvényre, valamint $x \in E$ pontra legyen $f(x,\cdot) : F \to G$ az a függvény, amely minden $y \in F$ ponthoz az $f(x,y)$ értéket rendeli, vagyis $f(x,\cdot)(y) := f(x,y)$. Ekkor az

$$\mathscr{F}(E \times F;G) \to \mathscr{F}(E;\mathscr{F}(F;G)) \quad ; \quad f \longmapsto (x \longmapsto f(x,\cdot))$$

függvény *bijekció*. (Ezt nevezzük az $\mathscr{F}(E \times F;G)$ és $\mathscr{F}(E;\mathscr{F}(F;G))$ függvényhalmazok közötti *kanonikus bijekciónak*.)

19. Legyenek A és B halmazok. Legyen I tetszőleges *két elemű halmaz*, vagyis léteznek olyan α és β halmazok, amelyekre $\alpha \neq \beta$ és $I = \{\alpha, \beta\}$. Ha $E_\alpha := A$ és $E_\beta := B$, akkor a

$$\prod_{i \in I} E_i \to A \times B \quad ; \quad f \longmapsto (f(\alpha), f(\beta))$$

függvény *bijekció*. (Ez azt jelenti, hogy két halmaz szorzatának a fogalma a halmazrendszerek általános fogalmából származtatható, vagyis annak speciális esete, ha rögzítünk egy I két elemű halmazt, ami a fenti indexhalmaz szerepét játssza. Rendszerint az $I = \{0, 1\}$ indexhalmazt használják az azonosításhoz, ahol $0 := \emptyset$ és $1 := \{\emptyset\}$.)

20. Legyen H olyan halmaz, amelyre:
- minden $h \in H$ elemre h függvény,
- minden $h, h' \in H$ elemre, $h \subseteq h'$ vagy $h' \subseteq h$.

Ekkor az $f := \bigcup H$ halmaz függvény, és $Dom(f) = \bigcup\limits_{h \in H} Dom(h)$ és $Im(f) = \bigcup\limits_{h \in H} Im(h)$. Ha minden $h \in H$ *injektív* függvény, akkor f is injekció. (Erre az f függvényre azt mondjuk, hogy a H függvényhalmaz *összeragasztásával* keletkezett.)
Az előző állítást érdemes függvényrendszerekre is megfogalmazni. Legyen $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, amelyre:
- minden $i \in I$ indexre f_i függvény,
- minden $i, j \in I$ indexre, $f_i \subseteq f_j$ vagy $f_j \subseteq f_i$.

Ekkor az $f := \bigcup\limits_{i \in I} f_i$ halmaz függvény, és $Dom(f) = \bigcup\limits_{i \in I} Dom(f_i)$ és $Im(f) = \bigcup\limits_{i \in I} Im(f_i)$. Ha minden $i \in I$ indexre f_i *injektív* függvény, akkor f is injekció.

21. (*A halmazszorzás kommutativitása.*) Legyen $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszer, K halmaz és $\sigma : K \to I$ *bijekció*. Ekkor minden $s \in \prod\limits_{i \in I} E_i$ elemre $s \circ \sigma \in \prod\limits_{k \in K} E_{\sigma(k)}$, és a

$$\prod_{i \in I} E_i \to \prod_{k \in K} E_{\sigma(k)} \quad ; \quad s \longmapsto s \circ \sigma$$

leképezés *bijekció*.

22. Legyen $(E_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \neq \emptyset$. Ha f olyan függvény, hogy $Dom(f) \subseteq I$ és minden $i \in I$ esetén $f(i) \in E_i$, akkor létezik olyan $\bar{f} \in \prod\limits_{i \in I} E_i$ függvény, hogy $\bar{f}$ az f kiterjesztése.

23. Ha E, F halmazok és $X \subseteq E$, akkor az

$$\mathscr{F}(E; F) \to \mathscr{F}(X; F) \quad ; \quad f \longmapsto f|_X$$

leképezés *szürjekció*.

24. Legyen $(E_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \neq \emptyset$. Ekkor minden $k \in I$ indexre a

$$pr_k : \prod_{i \in I} E_i \to E_k \quad ; \quad s \longmapsto s(k)$$

projekció-függvény *szürjektív*, és minden $J \subseteq I$ halmazra a

$$pr_J : \prod_{i\in I} E_i \to \prod_{i\in J} E_i \quad ; \quad s \longmapsto s|_J$$

leképezés is *szürjetív*.

25. (*A halmazszorzás asszociativitása.*) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, amelyre $I \neq \emptyset$, és legyen $(I_j)_{j\in J}$ olyan *diszjunkt* halmazrendszer, hogy $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ és minden $j \in J$ indexre $I_j \neq \emptyset$ (ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy $(I_j)_{j\in J}$ az I halmaz *partíciója*). Ekkor a

$$\prod_{i\in I} E_i \to \prod_{j\in J} \prod_{i\in I_j} E_i \quad ; \quad s \longmapsto (j \longmapsto s|_{I_j})$$

leképezés *bijekció*. (Ezt nevezzük az I indexhalmaz $(I_j)_{j\in J}$ partíciója által meghatározott *kanonikus bijekciónak*.)

26. (*Disztributivitás-formulák.*) Legyen $(I_j)_{j\in J}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $j \in J$ indexre $I_j \neq \emptyset$. Legyen minden $j \in J$ indexre $(E_{j,i})_{i\in I_j}$ halmazrendszer. Ha $I := \prod_{j\in J} I_j$, akkor

$$\bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I_j} E_{j,i} = \bigcap_{f\in I} \bigcup_{j\in J} E_{j,f(j)}; \qquad \bigcap_{j\in J} \bigcup_{i\in I_j} E_{j,i} = \bigcup_{f\in I} \bigcap_{j\in J} E_{j,f(j)}.$$

27. Ha $(E_i)_{i\in I}$ és $(F_j)_{j\in J}$ olyan halmazrendszerek, hogy I és J nem üresek, akkor

$$(\bigcap_{i\in I} E_i) \cup (\bigcap_{j\in J} F_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (E_i \cup F_j),$$
$$(\bigcup_{i\in I} E_i) \cap (\bigcup_{j\in J} F_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (E_i \cap F_j).$$

28. Legyen $(I_j)_{j\in J}$ halmazrendszer és legyen minden $j \in J$ indexre $(E_{j,i})_{i\in I_j}$ halmazrendszer. Ha $I := \prod_{j\in J} I_j$, akkor

$$\prod_{j\in J} \bigcup_{i\in I_j} E_{j,i} = \bigcup_{f\in I} \prod_{j\in J} E_{j,f(j)},$$

és ha minden $j \in J$ indexre $I_j \neq \emptyset$, akkor

$$\prod_{j\in J} \bigcap_{i\in I_j} E_{j,i} = \bigcap_{f\in I} \prod_{j\in J} E_{j,f(j)}.$$

29. Ha $(E_i)_{i\in I}$ és $(F_j)_{j\in J}$ halmazrendszerek, akkor

$$(\bigcup_{i\in I} E_i) \times (\bigcup_{j\in J} F_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (E_i \times F_j),$$

és ha I és J nem üresek, akkor

$$(\bigcap_{i\in I} E_i) \times (\bigcap_{j\in J} F_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (E_i \times F_j).$$

30. Ha I, J halmazok, $(E_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ halmazrendszer és $J \neq \emptyset$, akkor

$$\bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I} E_{i,j} = \prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J} E_{i,j}.$$

31. Ha $(E_i)_{i\in I}$ és $(F_i)_{i\in I}$ egyenlő indexhalmazú halmazrendszerek, akkor

$$(\prod_{i\in I} E_i) \cap (\prod_{i\in I} F_i) = \prod_{i\in I}(E_i \cap F_i),$$

és ha I nem üres, akkor

$$(\bigcap_{i\in I} E_i) \times (\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcap_{i\in I}(E_i \times F_i).$$

32. Legyen E halmaz és $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ olyan függvény, amelyre minden $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ halmazra, ha $X \subseteq Y$, akkor $f(X) \subseteq f(Y)$ teljesül. Legyen E_- azon $X \subseteq E$ halmazok *metszete*, amelyekre $f(X) \subseteq X$ teljesül, továbbá legyen E_+ azon $X \subseteq E$ halmazok *uniója*, amelyekre $X \subseteq f(X)$ teljesül. Ekkor $E_- \subseteq E_+$, $f(E_-) = E_-$, $f(E_+) = E_+$, és minden $X \subseteq E$ halmazra, ha $f(X) = X$, akkor $E_- \subseteq X \subseteq E_+$ teljesül. (Ez úgy is megfogalmazható. hogy f-nek létezik tartalmazás tekintetében legkisebb és legnagyobb *fixpontja*.)

33. Az R reláció pontosan akkor ekvivalencia az E halmaz felett, ha $pr_1 R = E$, $R = \overset{-1}{R}$ és $R \circ R = R$.

34. Legyenek E, F halmazok és $f : E \to F$ tetszőleges függvény. Ekkor az

$$R_f \ := \ \{(x, x') \in E \times E \mid f(x) = f(x')\}$$

halmaz ekvivalencia E felett, és létezik egyetlen olyan $\dot{f} : E/R_f \to Im(F)$ *bijekció*, amely

$$f = \dot{f} \circ \pi_{E/R_f}$$

teljesül. (Ezt az $\dot{f}$ függvényt nevezzük az f függvény *kanonikus faktorizáltjának*.)

35. Legyenek E, F halmazok, R ekvivalencia E és S ekvivalencia F felett. Ha $f : E \to F$ olyan függvény, hogy minden $(x, y) \in R$ párra $(f(x), f(y)) \in S$, akkor létezik egyetlen olyan $\bar{f} : E/R \to F/S$ függvény, amelyre

$$\bar{f} \circ \pi_{E/R} \ = \ \pi_{F/S} \circ f$$

teljesül. (Ezt az $\bar{f}$ függvényt nevezzük az f függvény R és S ekvivalenciák szerinti *faktorizáltjának*.)

36. Ha E, F halmazok és $f : E \to F$ tetszőleges függvény, akkor létezik olyan G halmaz, és léteznek olyan $s : E \to G$, $i : G \to F$ függvények, hogy s *szürjekció*, i *injekció* és $f = i \circ s$. (Ezt a tényt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy minden függvény előáll egy szürjekció és egy azt követő injekció kompozíciójaként.) Igaz-e, hogy minden függvény előáll egy injekció és egy azt követő szürjekció kompozíciójaként?

37. Ha R és S ekvivalenciák az E halmaz felett, akkor az $R \circ S$ reláció pontosan akkor ekvivalencia E felett, ha $R \circ S = S \circ R$ teljesül. Egy halmaz feletti ekvivalenciák tetszőleges nem üres rendszerének a *metszete* ekvivalencia az adott halmaz felett.

38. Legyenek R és S ekvivalenciák az E halmaz felett. Akkor és csak akkor létezik olyan T ekvivalencia az E halmaz felett, amelyre $R \subseteq T$ és $S \subseteq T$ teljesül, ha $R \circ S = S \circ R$. Ha $R \circ S = S \circ R$, akkor $R \circ S$ az a tartalmazás tekintetében legkisebb E feletti ekvivalencia, amelyre $R \subseteq T$ és $S \subseteq T$ teljesül.

39. Minden E halmazhoz létezik olyan X halmaz, hogy $X \subseteq E$ és $X \notin E$.

40. Legyenek E_1, E_2, F_1 és F_2 olyan halmazok, hogy E_1 kisebb-egyenlő számosságú F_1-nél és E_2 kisebb-egyenlő számosságú F_2-nél. Ha F_1 és F_2 mindketten legalább két elemű halmazok, akkor $E_1 \cup E_2$ kisebb-egyenlő számosságú az $F_1 \times F_2$ halmaznál. (*Útmutatás.* Elegendő arra az esetre bizonyítani, amikor E_1 és E_2 diszjunktak. Legyenek $f_1 : E_1 \to F_1$ és $f_2 : E_2 \to F_2$ injekciók, és legyenek $a_1, b_1 \in F_1$, illetve $a_2, b_2 \in F_2$ olyanok, hogy $a_1 \neq b_1$ és $a_2 \neq b_2$. Legyen $f : E_1 \cup E_2 \to F_1 \times F_2$ az a függvény, amelyre $x_1 \in E_1$ esetén

$$f(x_1) = \begin{cases} (f_1(x_1), a_2) & \text{ha } f_1(x_1) \neq a_1 \\ (a_2, b_2) & \text{ha } f_1(x_1) = a_1 \end{cases}$$

továbbá $x_2 \in E_2$ esetén

$$f(x_2) = \begin{cases} (a_1, f_2(x_2)) & \text{ha } f_2(x_2) \neq b_2 \\ (b_1, b_2) & \text{ha } f_2(x_2) = b_2 \end{cases}.$$

Mutassuk meg, hogy f injekció, és "rajzoljuk le" ezt a függvényt!)

41. Legyenek E, F halmazok, és $f : E \to F$ olyan függvény, hogy létezik olyan G halmaz, hogy minden $y \in F$ esetén G és $\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle$ *ekvipotensek.* Ekkor az E és $F \times G$ halmazok ekvipotensek.

42. Az R reláció pontosan akkor rendezés az E halmaz felett, ha $R \cap \overset{-1}{R} = id_E$ és $R \circ R = R$ teljesül.

43. Ha R rendezés az E halmaz felett és $F \subseteq E$, akkor az $R \cap (F \times F)$ reláció rendezés az F halmaz felett; ezt a rendezést R_F jelöli, és az R rendezés F-re vett *leszűkítésének* nevezzük. Ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz és $F \subseteq E$, akkor egy $A \subseteq F$ halmazzal kapcsolatban beszélhetünk az A szuprémumáról az $(E, \leq)$ rendezett halmazban (amit $\sup_E A$ jelöl), valamint az A szuprémumáról az $(F, \leq_F)$ rendezett halmazban (amit $\sup_F A$ jelöl). Mutassuk meg, hogy ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz, $F \subseteq E$ és $A \subseteq F$, akkor $\sup_E A$ és $\sup_F A$ létezése esetén $\sup_F A \leq \sup_F A$; továbbá, ha $\sup_E A$ létezik és eleme F-nek, akkor $\sup_F A$ is létezik és $\sup_F A =$

$\sup_F A$. Azonban előfordul az, hogy $\sup_F A$ létezik, de $\sup_E A$ nem létezik, és az is lehetséges, hogy mindketten léteznek, de nem egyenlők (ekkor $\sup_E A \notin F$).

44. Legyen $(E, \leq)$ rendezett halmaz, $(x_i)_{i\in I}$ E-ben haladó rendszer és $(I_j)_{j\in J}$ olyan halmazrendszer, hogy $I = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$. Tegyük fel, hogy minden $j \in J$ esetén az $(x_i)_{i\in I_j}$ rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma)a $\leq$ rendezés szerint. Az $(x_i)_{i\in I}$ rendszernek pontosan akkor létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, ha a $(\sup\limits_{i\in I_j} x_i)_{j\in J}$ (illetve $(\inf\limits_{i\in I_j} x_i)_{j\in J}$) rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint; továbbá, ha az $(x_i)_{i\in I}$ rendszernek pontosan akkor létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, akkor

$$\sup_{i\in I} x_i = \sup_{j\in J}(\sup_{i\in I_j} x_i)$$
$$(\text{illetve: } \inf_{i\in I} x_i = \inf_{j\in J}(\inf_{i\in I_j} x_i))$$

teljesül.

45. Legyen $(E, \leq)$ rendezett halmaz és $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ E-ben haladó rendszer.

- Tegyük fel, hogy minden $j \in J$ esetén az $(x_{i,j})_{i\in I}$ rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint. Az $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ rendszernek pontosan akkor létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, ha a $(\sup\limits_{i\in I} x_{i,j})_{j\in J}$ (illetve $(\inf\limits_{i\in I} x_{i,j})_{j\in J}$) rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint; továbbá, ha az $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, akkor

$$\sup_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sup_{j\in J}(\sup_{i\in I} x_{i,j})$$
$$(\text{illetve: } \inf_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \inf_{j\in J}(\inf_{i\in I} x_{i,j}))$$

teljesül.

- Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén az $(x_{i,j})_{j\in J}$ rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint. Az $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ rendszernek pontosan akkor létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, ha a $(\sup\limits_{j\in J} x_{i,j})_{i\in I}$ (illetve $(\inf\limits_{j\in J} x_{i,j})_{i\in I}$) rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint; továbbá, ha az $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, akkor

$$\sup_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sup_{i\in I}(\sup_{j\in J} x_{i,j})$$
$$(\text{illetve: } \inf_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \inf_{i\in I}(\inf_{j\in J} x_{i,j}))$$

teljesül.

- Tegyük fel, hogy minden $j \in J$ esetén az $(x_{i,j})_{i\in I}$ rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, *és* minden $i \in I$ esetén az $(x_{i,j})_{j\in J}$

rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint. Tegyük fel, hogy az $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint. Ekkor a $(\sup\limits_{i\in I} x_{i,j})_{j\in J}$ (illetve $(\inf\limits_{i\in I} x_{i,j})_{j\in J}$) rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint, *és* a $(\sup\limits_{j\in J} x_{i,j})_{i\in I}$ (illetve $(\inf\limits_{j\in J} x_{i,j})_{i\in I}$) rendszernek létezik szuprémuma (illetve infimuma) a $\leq$ rendezés szerint; továbbá

$$\sup_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sup_{j\in J}(\sup_{i\in I} x_{i,j}) = \sup_{i\in I}(\sup_{j\in J} x_{i,j})$$
$$(\text{illetve: } \inf_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \inf_{j\in J}(\inf_{i\in I} x_{i,j}) = \inf_{i\in I}(\inf_{j\in J} x_{i,j}))$$

teljesül.

46. *Bebizonyítjuk* a kiválasztási axiómát! Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén $E_i \neq \emptyset$. Minden $i \in I$ indexhez *kiválasztunk és rögzítünk* egy $x_i \in E_i$ elemet, ami lehetséges, hiszen $E_i \neq \emptyset$. Ekkor az $f := \{(i, x_i) | i \in I\}$ halmaz olyan függvény, hogy $Dom(f) = I$ és minden $i \in I$ indexre $f(i) = x_i \in E_i$, vagyis $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$, így $\prod\limits_{i\in I} E_i \neq \emptyset$. Keressük meg a *hibát* ebben az érvelésben!

47. Ha f függvény, akkor az f *injektivitás-tartományának* nevezünk minden olyan $E \subseteq Dom(f)$ halmazt, amelyre $f|_E$ injekció. Mutassuk meg, hogy minden függvénynek létezik tartalmazás tekintetében *maximális* injektivitás-tartománya!

48. Ha E és F halmazok, akkor E kisebb-egyenlő számosságú F-nél *vagy* F kisebb-egyenlő számosságú E-nél (vagyis bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható).

(*Útmutatás.* Legyen $\mathbf{S}$ az $E \rightarrowtail F$ *injekciók* halmaza, és $\leq$ a tartalmazás-reláció $\mathbf{S}$ felett. A **20**. gyakorlatban megfogalmazott állítást alkalmazva mutassuk meg, hogy az $\mathbf{S}$ minden olyan részhalmaza felülről korlátos a $\leq$ rendezés szerint, amelynek bármely két eleme összehasonlítható $\leq$ szerint (sőt minden ilyen halmaznak még szuprémuma is létezik a $\leq$ rendezés szerint)! Ezért a Kuratowski-Zorn lemma alapján a $(\mathbf{S}, \leq)$ rendezett halmaznak létezik maximális eleme. Ha f ilyen elem, akkor $f : E \rightarrowtail F$ olyan injekció, hogy nem létezik olyan $g : E \rightarrowtail F$ injekció, amelyre $f \subseteq g$ és $f \neq g$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor a "$Dom(f) \neq E$ és $Im(f) \neq F$" kijelentés ellentmondana az f maximalitásának a $(\mathbf{S}, \leq)$ rendezett halmazban, ezért $Dom(f) = E$ (és akkor E kisebb-egyenlő számosságú F-nél) *vagy* $Im(f) = F$ (és akkor F kisebb-egyenlő számosságú E-nél.)

49. Legyen $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz és E^* az E valódi szegmenseinek hamaza. Ekkor az $f : E \to E^*;\ x \mapsto]\leftarrow, x[$ leképezés olyan *bijekció*, amely *szigorúan rendezéstartó* E-n a $\leq$ rendezést, és E^*-on a tartalmazás relációt véve (tehát minden $x, x' \in E$ elemre, $x \leq x'$ *ekvivalens* azzal, hogy $f(x) \subseteq f(x')$).

50. Legyen $((E_i, \leq_i))_{i\in I}$ jólrendezett halmazoknak olyan rendszere, hogy minden $i \in I$ indexre a következő állítások valamelyike teljesül:
- E_i szegmense az $(E_j, \leq_j)$ jólrendezett halmaznak és $\leq_i$ egyenlő a $\leq_j$ rendezés E_i-re vett leszűkítésével,

- E_j szegmense az $(E_i, \leq_i)$ jólrendezett halmaznak és $\leq_j$ egyenlő a $\leq_i$ rendezés E_j-re vett leszűkítésével.
a) Az $E := \bigcup_{i \in I} E_i$ halmaz felett létezik egyetlen olyan $\leq$ rendezés, hogy minden $i \in I$ indexre $\leq_i$ egyenlő a $\leq$ rendezés E_i-re vett leszűkítésével; ez a rendezés *jólrendezés* E felett.
b) Minden $i \in I$ esetén az $(E_i, \leq_i)$ jólrendezett halmaz minden szegmense az $(E, \leq)$ jólrendezett halmaznak is szegmense.
c) Minden $i \in I$ és $x \in E_i$ esetén az $]\leftarrow, x[$ intervallum az $(E_i, \leq_i)$ jólrendezett halmazban ugyanaz, mint az $(E, \leq)$ jólrendezett halmazban.
d) Az $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz minden S valódi szegmenséhez létezik olyan $i \in I$, hogy S szegmense az $(E_i, \leq_i)$ jólrendezett halmaznak.

51. Legyen $(E_1, \leq_1)$ *jólrendezett* és $(E_2, \leq_2)$ *lineárisan rendezett* halmaz, és tegyük fel, hogy $f, g : E_1 \to E_2$ olyan monoton növő függvények, hogy $Im(f)$ szegmens E_2-ben és g szigorúan monoton növő. Ekkor minden $x \in E_1$ elemre $f(x) \leq_2 g(x)$ teljesül.

(*Útmutatás.* Indirekt tegyük fel, hogy az $S := \{x \in E_1 | g(x) <_2 f(x)\}$ halmaz nem üres. A $\leq_1$ rendezés jólrendezés, ezért létezik S-nek legkisebb eleme $\leq_1$ szerint; legyen ez x. Ekkor $g(x) <_2 f(x) \in Im(f)$ és $Im(f)$ szegmense $(E_2, \leq_2)$-nek, ezért $g(x) \in Im(f)$, így létezik olyan $x' \in E_1$, amelyre $f(x') = g(x)$. Ha $x' <_1 x$ teljesülne, akkor a g szigorú monoton növése folytán $g(x') <_2 g(x) = f(x')$ teljesülne, tehát $x' \in S$ is igaz lenne. Ez viszont lehetetlen, mert x az S legkisebb eleme $\leq_1$ szerint. Ezért $x \leq_1 x'$ így az f monoton növése miatt $f(x) \leq_2 f(x') = g(x)$, holott $g(x) <_2 f(x)$; ez ellentmondás.)

52. Ha $(E_1, \leq_1)$ *jólrendezett* és $(E_2, \leq_2)$ *lineárisan rendezett* halmaz, akkor legfeljebb egy olyan $E_1 \to E_2$ szigorúan monoton növő függvény létezik, amelynek értékkészlete szegmense $(E_2, \leq_2)$-nek. (Azonban sok olyan $E_1 \to E_2$ szigorúan monoton növő függvény létezhet, amelynek értékkészlete nem szegmense $(E_2, \leq_2)$-nek.)

53. Ha $(E, \leq)$ rendezett halmaz és $H \subseteq E$ olyan halmaz, amelynek bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, akkor létezik olyan $\overline{H} \subseteq E$ halmaz, hogy $H \subseteq \overline{H}$ és a $\overline{H}$ bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, továbbá $\overline{H}$ az E egyetlen ilyen tulajdonságokkal rendelkező részhalmazának sem valódi részhalmaza.

(*Útmutatás.* Alkalmazzuk a Kuratowski-Zorn lemmát egy alkalmasan értelmezett rendezett halmazra!)

54. (*Zermelo-féle jólrendezési tétel.*) Minden halmaz felett *létezik* jólrendezés.

(*Útmutatás.* Legyen E halmaz és tekintsük a következő $\mathcal{A}(x)$ kijelentést:

$$(\exists H)(\exists R)((x{=}(H, R)) \wedge (H \subseteq E) \wedge \text{"}R \text{ jólrendezés } H \text{ felett"}).$$

Ez a kijelentés kollektivizáló az x változóban, mert $\mathcal{A}(x)$-ből következik, hogy $x \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E \times E)$, tehát elég a részhalmaz-axiómát alkalmazni. Ezért tekinthetjük az

$$\mathbf{S} := \{(H, R) | (H \subseteq E) \wedge \text{"}R \text{ jólrendezés } H \text{ felett"}\}$$

halmazt. Az $\mathbf{S}$ halmazon bevezetjük a $\leq$ relácót úgy, hogy $(H,R),(H',R') \in \mathbf{S}$ esetén $(H,R) \leq (H',R')$ pontosan akkor teljesüljön, ha H szegmense a (H',R') jólrendezett halmaznak és $R = R' \cap (H \times H)$. Ekkor $(\mathbf{S},\leq)$ rendezett halmaz, tehát az **53.** szerint van olyan $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{S}$ halmaz, amit a $\leq$ reláció lineárisan rendez és amely tartalmazás tekintében maximális ilyen tulajdonságú részhalmaza $\mathbf{S}$-nek. Ekkor a $((H,R))_{(H,R)\in\mathbf{L}}$ rendszer jólrendezett halmazoknak olyan rendszere, amelyre az **50.** gyakorlat feltételei teljesülnek, tehát ha $H := \bigcup\limits_{(H',R')\in\mathbf{L}} H'$, akkor a H halmazon létezik egyetlen olyan R rendezés, hogy minden $(H',R') \in \mathbf{L}$ párra H' szegmense a (H,R) rendezett halmaznak és $R' = R \cap (H' \times H')$; ekkor a (H,R) pár jólrendezett halmaz. Ha $H \neq E$ teljesülne, akkor véve tetszőleges $x \in E \setminus H$ pontot, a $H' := H \cup \{x\}$ halmazt rendezhetjük azzal az R' relációval, amelynek leszűkítése H-ra megegyezik R-rel és amely szerint x a legnagyobb elem H'-ben. Ekkor R' automatikusan jólrendezés H' felett, tehát $(H',R') \in \mathbf{S}$, ugyanakkor (H',R') a $\leq$ rendezés szerint *nagyobb* az $\mathbf{L}$ halmaz minden eleménél. Ekkor viszont $\mathbf{L}$ *valódi része* az $\mathbf{L}' := \mathbf{L} \cup \{(H',R')\}$ halmaznak, ugyanakkor az $\mathbf{L}'$ bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint. Ez azonban ellentmond az $\mathbf{L}$ maximalitásának, így $H = E$, tehát R jólrendezés az E halmaz felett.)

55. A kiválasztási axióma, a Kuratowski-Zorn lemma és a Zermelo-féle jólrendezési tétel *ekvivalensek* egymással. (Ez pontosan azt jelenti, hogy ha a halmazelméletnek azt a részelméletét tekintjük, amelynek axiómái a meghatározottsági axióma, a részhalmaz axiómaséma, a páraxióma, a hatványhalmaz-axióma és az unió axióma, akkor ebben az elméletben a fenti három kijelentés páronként ekvivalens.)

(*Útmutatás.* Bebizonyítottuk, hogy a kiválasztási axiómából következik a Kuratowski-Zorn lemma, és az **53.** gyakorlatban a Kuratowski-Zorn lemmából (a kiválasztási axióma alkalmazása nélkül) levezettük a Zermelo-féle jólrendezési tételt. Ezért elegendő a Zermelo-tételből (a Kuratowski-Zorn lemma alkalmazása nélkül) bizonyítani a kiválasztási axiómát.
Ehhez legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \neq \emptyset$. Az unió axióma szerint képezhetjük az $E := \bigcup\limits_{i\in I} E_i$ halmazt. A Zermelo-tétel alapján létezik E felett olyan $\leq$ reláció, hogy $(E,\leq)$ jólrendezett halmaz. Minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq E$ és $E_i \neq \emptyset$, így létezik E_i-nek legkisebb eleme a $\leq$ rendezés szerint. Ekkor az

$$f := \{(i,x) \in I \times E | (x \in E_i) \wedge (\forall x')((x' \in E_i) \Rightarrow (x \leq x'))\}$$

halmaz a részhalmaz-axióma szerint létezik, és ez olyan függvény(!), hogy $Dom(f) = I$ és minden $i \in I$ indexre $f(i) \in E_i$, vagyis $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$.)

56. Ha (E,R) és (E',R') jólrendezett halmazok, akkor a következő esetek közül az egyik teljesül:
a) Az (E',R') rendezett halmaznak létezik egyetlen olyan S' szegmense, hogy az (E,R) és $(S',R'_{S'})$ rendezett halmazok izomorfak.
b) Az (E,R) rendezett halmaznak létezik egyetlen olyan S szegmense, hogy az (E',R') és (S,R_S) rendezett halmazok izomorfak.
Ha a) és b) egyszerre teljesül, akkor az (E,R) és (E',R') jólrendezett halmazok izomorfak.

(*Útmutatás.* Jelölje $\mathbf{F}$ azon $f : E \to E'$ függvények halmazát, amelyekre $Dom(f)$ szegmense az (E, R) rendezett halmaznak, $Im(f)$ szegmense az (E', R') rendezett halmaznak, és f izomorfizmus a $(Dom(f), R_{Dom(f)})$ és $(Im(f), R'_{Im(f)})$ rendezett halmazok között. Jelölje $\leq$ a tartalmazás relációt az $\mathbf{F}$ halmaz felett. Ellenőrizhető, hogy az $(F, \leq)$ pár *induktívan rendezett halmaz*, tehát a Kuratowski-Zorn lemma alapján létezik maximális eleme; legyen $f \in \mathbf{F}$ ilyen. Könnyen belátható, hogy ha $Dom(f) \neq E$ *és* $Im(f) \neq E'$, akkor létezik $\mathbf{F}$-nek olyan f' eleme, amely f-nek kiterjesztése és f-től különbözik. Ez viszont ellentmond f maximalitásának, így $Dom(f) = E$ (és akkor b) teljesül) *vagy* $Im(f) = E'$ (és akkor a) teljesül).)

3. A természetes számok halmaza

Definíció. Ha E halmaz, akkor $E^+ := E \cup \{E\}$, és ezt a halmazt az E *szukcesszorának* nevezzük. Az M halmazt *monotonnak* nevezzük, ha

$$(\emptyset \in M) \wedge (\forall x)((x \in M) \Rightarrow (x^+ \in M))$$

teljesül.

Végtelenségi axióma - Létezik monoton halmaz.

Tétel. Létezik egyetlen olyan monoton halmaz, amely minden monoton halmaznak részhalmaza.

Bizonyítás. A végtelenségi axióma alapján rögzítsünk egy M monoton halmazt, és jelölje $\mathscr{M}$ az M monoton részhalmazainak halmazát, vagyis

$$\mathscr{M} := \{X \subseteq M | (\emptyset \in X) \wedge (\forall x)((x \in X) \Rightarrow (x^+ \in X))\}.$$

Az $(X)_{X \in \mathscr{M}}$ rendszer indexhalmaza nem üres, mert $M \in \mathscr{M}$, így képezhető az $\mathbf{N} := \bigcap\limits_{X \in \mathscr{M}} X$ metszethalmaz. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{N}$ is monoton halmaz és $\mathbf{N} \subseteq M$, vagyis $\mathbf{N} \in \mathscr{M}$. Ha N tetszőleges monoton halmaz, akkor $N \cap M \in \mathscr{M}$, ezért a definíció szerint $\mathbf{N} \subseteq N \cap M \subseteq N$, vagyis az $\mathbf{N}$ monoton halmaz minden monoton halmaznak részhalmaza.
Ha N és N' olyan monoton halmazok, amelyek minden monoton halmaznak részhalmazai, akkor $N \subseteq N'$ és $N' \subseteq N$, következésképpen a meghatározottsági axióma szerint $N = N'$. ■

Definíció. A *természetes számok halmazának* nevezzük azt a monoton halmazt, amely minden monoton halmaznak részhalmaza, és ezt a halmazt az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük. Az $\mathbb{N}$ elemeit *természetes számoknak* nevezzük.

Néhány nevezetes természetes szám definíciója és "szerkezete":

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset, \\ 1 &:= 0^+ = \{\emptyset\}, \\ 2 &:= 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ 3 &:= 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \end{aligned}$$

és így tovább.

Tétel. (*A teljes indukció tétele.*)
- Ha $E \subseteq \mathbb{N}$ olyan halmaz, hogy $0 \in E$ és minden $n \in E$ elemre $n^+ \in E$ teljesül, akkor $E = \mathbb{N}$. (*Halmazelméleti forma.*)
- Ha $\mathcal{A}$ olyan kijelentés és x olyan változó, hogy $\mathcal{A}(0)$ tétel és $(\forall x)(((x \in \mathbb{N}) \wedge \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (\mathcal{A}(x^+)))$ is tétel, akkor $(\forall x)((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{A}(x))$ is tétel. (*Logikai forma.*)

Bizonyítás. Az első állításban az E-re vonatkozó feltétel éppen azt jelent, hogy E monoton részhalmaza $\mathbb{N}$-nek, így a $\mathbb{N}$ definíciója és a meghatározottsági axióma alapján $E = \mathbb{N}$ teljesül. A második állítás feltételei mellett az

$$E := \{x|(x \in \mathbb{N}) \wedge \mathcal{A}(x)\}$$

halmazra az első állítás feltételei teljesülnek, tehát $E = \mathbb{N}$, ami éppen azt jelenti, hogy $(\forall x)((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{A}(x))$ teljesül. ■

A természetes számok definíciója nem ad "belső" jellemzést a természetes számokra. Létezik olyan kijelentés, amely a természetes számok jellemzését adja, de meglehetősen bonyolult szerkezetű (**37.** gyakorlat k) pontja). Ennél jóval fontosabb annak a ténynek megállapítása, hogy $\mathbb{N}$ felett létezik egy kitüntetett jólrendezés. Ehhez szükség van néhány egyszerű állítás ismeretére.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az E halmaz *tranzitív*, ha minden $x \in E$ elemre $x \subseteq E$ teljesül, vagyis az E minden elemének minden eleme az E-nek is eleme.

Állítás. Teljesülnek a következők.
a) $\mathbb{N}$ tranzitív halmaz.
b) Minden természetes szám tranzitív halmaz.
c) Minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $n \notin n$.
d) Minden $m, n \in \mathbb{N}$ elemre $(m \in n) \Leftrightarrow ((m \subseteq n) \wedge (m \neq n))$.

Bizonyítás. a) Legyen $E := \{n \in \mathbb{N}|n \subseteq \mathbb{N}\}$. Triviális, hogy $0 \in E$, hiszen a definíció szerint $0 := \emptyset$. Ha $n \in E$, akkor $n \subseteq \mathbb{N}$ és $n \in \mathbb{N}$ miatt $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$, így $n^+ := n \cup \{n\} \subseteq \mathbb{N}$, vagyis $n^+ \in E$. Ebből a teljes indukció elve alapján kapjuk, hogy $E = \mathbb{N}$, ami éppen azt jelent, hogy $\mathbb{N}$ tranzitív halmaz.
b) Legyen $E := \{n \in \mathbb{N}|(\forall k)((k \in n) \Rightarrow (k \subseteq n))\}$. Triviális, hogy $0 \in E$, különben létezne olyan $k \in 0$, hogy k nem részhalmaza 0-nak, holott 0-nak egyáltalán nincs eleme. Tegyük fel, hogy $n \in E$; megmutatjuk, hogy $n^+ \in E$. Ehhez legyen $k \in n^+$, ekkor $k \in n$ vagy $k = n$. Ha $k \in n$, akkor $k \in n^+$, mert $n \subseteq n^+$. Ha $k = n$, akkor a szukcesszor definíciója szerint $k \in n^+$. Ezzel beláttuk, hogy $n \in E$ esetén $n^+ \in E$, tehát a teljes indukció elve alapján $E = \mathbb{N}$, ami éppen azt jelent, hogy minden természetes szám tranzitív halmaz.
c) Legyen $E := \{n \in \mathbb{N}|n \notin n\}$. Triviális, hogy $0 \in E$, különben $0 \in 0$ teljesülne, ami nem igaz, mert $0 := \emptyset$. Legyen $n \in E$, megmutatjuk, hogy ekkor $n^+ \in E$ is teljesül. Indirekt, tegyük fel, hogy $n^+ \notin E$, vagyis $n^+ \in n^+$. Ekkor a szukcesszor definíciója szerint $n^+ \in n$ vagy $n^+ = n$. Ha $n^+ \in n$, akkor $n \in n^+ \subseteq n$, hiszen n tranzitív halmaz, ezért $n \in n$, ami viszont ellentmond annak, hogy $n \in E$. Ebből következik, hogy $n^+ = n$, tehát $n \in n$, ami ismét ellentmond az $n \in E$ hipotézisnek. Ezért $n^+ \notin E$ szükségképpen teljesül, így a teljes indukció elve alapján $E = \mathbb{N}$, ami pontosan azt jelenti, hogy minden természetes szám nem eleme önmagának.
d) Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \in n$, akkor $m \subseteq n$, mert n tranzitív halmaz, ugyanakkor $m \neq n$, különben $n \in n$ teljesülne. Ezért $m, n \in \mathbb{N}$ esetén az $(m \in n) \Rightarrow ((m \subseteq n) \wedge (m \neq n))$ következtetés helyes. A fordított implikáció bizonyításához legyen $E := \{n \in \mathbb{N}|(\forall m)(((m \subseteq n) \wedge (m \neq n)) \Rightarrow (m \in n))$. Azt kell igazolni, hogy $E = \mathbb{N}$. Világos, hogy $0 \in E$, mert minden $m \in \mathbb{N}$ esetén az $(m \subseteq 0) \wedge (m \neq 0)$ kijelentés hamis, így az $((m \subseteq 0) \wedge (m \neq 0)) \Rightarrow (m \in 0)$ következtetés igaz (*a hamisból bármi*

következik). Tegyük most fel, hogy $n \in E$ és legyen $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $m \subseteq n^+$ és $m \neq n^+$; megmutatjuk, hogy $m \in n^+$, vagyis $n^+ \in E$.
Először azt igazoljuk, hogy a feltevések mellett $m \subseteq n$ teljesül. Ha nem így volna akkor létezne olyan $k \in m$, amelyre $k \notin n$. Ekkor $k \in m \subseteq n^+$, tehát $k \in n^+$, így $k \in n$ vagy $k = n$. De $k \notin n$, ezért szükségképpen $k = n$. Ebből kapjuk, hogy $n \in m$, tehát $\{n\} \subseteq m$, ugyanakkor $n \subseteq m$, mert m tranzitív halmaz. Ezért $n^+ := n \cup \{n\} \subseteq m$, így $n^+ = m$ is teljesül, hiszen az m-re vonatkozó hipotézis szerint $m \subseteq n^+$. Ez a következmény viszont ellentmond a $m \neq n^+$ hipotézisnek, amivel igazoltuk, hogy $m \subseteq n$.
Ha most $m = n$, akkor $m \in n^+$. Ha viszont $m \neq n$, akkor az előzőek szerint $(m \subseteq n) \wedge (m \neq n)$ teljesül, így $n \in E$ miatt $m \in n \subseteq n^+$, tehát $m \in n^+$. ■

Következmény. Minden $m, n \in \mathbb{N}$ elemre teljesülnek a következő állítások:

$$(m \subseteq n) \Leftrightarrow ((m \in n) \vee (m = n)),$$
$$m \cap n \in \mathbb{N},$$
$$(m \subseteq n) \vee (n \subseteq m),$$
$$(m \subseteq n) \Leftrightarrow (n \notin m),$$
$$(m \neq n) \Leftrightarrow ((m \in n) \vee (n \in m)).$$

Bizonyítás. Ha $m \subseteq n$ és $m \neq n$, akkor az előző állítás d) pontja szerint $m \in n$. Megfordítva, ha $m \in n$, akkor $m \subseteq n$, mert n tranzitív halmaz. Ezért $(m \subseteq n) \Leftrightarrow ((m \in n) \vee (m = n))$ teljesül.

Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzítve és $E := \{n \in \mathbb{N} | m \cap n \in \mathbb{N}\}$. Triviális, hogy $m \cap 0 = 0 \in \mathbb{N}$, tehát $0 \in E$. Tegyük fel, hogy $n \in E$. A szukcesszor definíciója alapján

$$m \cap n^+ = m \cap (n \cup \{n\}) = (m \cap n) \cup (m \cap \{n\})$$

teljesül. Ha $n \in m$, akkor $\{n\} \subseteq m$ és $n \subseteq m$, mert m tranzitív halmaz, így $m \cap \{n\} = \{n\}$ és $m \cap n = n$, vagyis $m \cap n^+ = n \cup \{n\} = n^+ \in \mathbb{N}$. Ha $n \notin m$, akkor $m \cap \{n\} = \emptyset$, így az $n \in E$ hipotézis alapján $m \cap n^+ = m \cap n \in \mathbb{N}$ adódik. Ezért $m \cap n^+ \in \mathbb{N}$, vagyis $n^+ \in E$. A teljes indukció elve alapján $E = \mathbb{N}$, ami éppen azt jelenti, hogy adott $m \in \mathbb{N}$ esetén minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $m \cap n \in \mathbb{N}$ teljesül. Ez *minden* $m \in \mathbb{N}$ elemre így van tehát (az általánosítás logikai szabálya szerint) minden $m, n \in \mathbb{N}$ elemre $m \cap n \in \mathbb{N}$ teljesül.

Az előzőek szerint $m \cap n \in \mathbb{N}$ és persze $m \cap n \subseteq m$ és $m \cap n \subseteq n$ is teljesül. Ha $m \cap n \neq m$, akkor az előző állítás d) pontja szerint $m \cap n \in m$. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $m \cap n \neq n$, akkor $m \cap n \in n$. Tehát ha $m \cap n \neq m$ *és* $m \cap n \neq n$, akkor $m \cap n \in m$ *és* $m \cap n \in n$, így $m \cap n \in m \cap n$, ami ellentmond az előző állítás c) pontjának. Ezért $m \cap n = m$ *vagy* $m \cap n = n$, ami éppen azt jelenti, hogy $m \subseteq n$ vagy $n \subseteq m$.

Ha $n \notin m$, akkor az előző állítás d) pontja szerint $n = m$ *vagy* n nem részhalmaza m-nek; ez utóbbi esetben a fentiek alapján $m \subseteq n$, így $(n \notin m) \Rightarrow (m \subseteq n)$ teljesül. Megfordítva, ha $m \subseteq n$, akkor $n \in m$ lehetetlen, különben $n \in n$ is teljesülne, ami ellentmond az előző állítás c) pontjának; ezért $(m \subseteq n) \Rightarrow (n \notin m)$ is teljesül.

Ha $m \neq n$, akkor $(m \subseteq n) \wedge (m \neq n)$ vagy $(n \subseteq m) \wedge (n \neq m)$ teljesül, tehát az előző állítás d) pontja szerint $m \in n$ vagy $n \in m$ igaz. Megfordítva, akár $m \in n$, akár $n \in m$ teljesül, az előző állítás c) pontja miatt $m \neq n$ is teljesül. ■

Tétel. Az $\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (m \in n) \vee (m = n)\}$ reláció *jólrendezés* a $\mathbb{N}$ halmaz felett.

Bizonyítás. Jelölje $\leq$ ezt a relációt, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\leq_n$ a $\leq$ reláció leszűkítése az $n \subseteq \mathbb{N}$ halmazra ($\mathbb{N}$ tranzitív halmaz!).

Először megjegyezzük, hogy az előzőek alapján a $\leq$ reláció egyenlő az $\subseteq$ relációval $\mathbb{N}$ felett, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\leq_n$ reláció egyenlő a tartalmazás relációval az n halmaz felett. Ebből azonnal következik, hogy ezek a relációk *rendezések*, sőt *lineáris* rendezések, hiszen láttuk, hogy bármely két $j, k \in \mathbb{N}$ esetén $(j \subseteq k) \vee (k \subseteq j)$ teljesül.

Most megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ elemre a $\leq_n$ reláció jólrendezés, vagyis minden $H \subseteq n$ nem üres halmaznak létezik legkisebb eleme a $\leq_n$ rendezés szerint. Ehhez jelölje E azon $n \in \mathbb{N}$ számok halmazát, amelyekre $\leq_n$ jólrendezés. Világos, hogy $0 \in E$, mert 0-nak nincs nem üres részhalmaza. Tegyük fel, hogy $n \in E$, és legyen $H \subseteq n^+$ nem üres halmaz; megmutatjuk, hogy H-nak létezik legkisebb eleme a $\leq_{n^+}$ rendezés szerint, ami azt jelenti, hogy $n^+ \in E$. Ha $H \cap n = \emptyset$, akkor $H \subseteq n^+$ és $H \neq \emptyset$ miatt $H = \{n\}$, így H-nak n a legkisebb eleme a $\leq_{n^+}$ rendezés szerint. Ezért feltehető, hogy $H \cap n \neq \emptyset$, tehát $H \cap n$ nem üres részhalmaza n-nek. Ekkor $n \in E$ miatt létezik $H \cap n$-nek legkisebb eleme a $\leq_n$ reláció szerint; legyen ez k. Ha k nem volna a H legkisebb eleme $\leq_{n^+}$ rendezés szerint, akkor létezne olyan $j \in n^+$, amelyre $j <_{n^+} k$ teljesülne. Ekkor $j \in k \in n$ miatt $j \in H \cap n$ és $j <_n k$, ami ellentmond annak, hogy k a $H \cap n$ legkisebb eleme $\leq_n$ szerint. Ezzel beláttuk, hogy $n \in E$ esetén $n^+ \in E$, így a teljes indukció elve alapján $E = \mathbb{N}$, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ elemre a $\leq_n$ reláció jólrendezés.

Legyen most $H \subseteq \mathbb{N}$ tetszőleges nem üres halmaz, és legyen $m \in H$ rögzítve. Jelöljön n egy tetszőleges természetes számot, amelyre $m < n$ teljesül; például $n := m^+$ megfelelő, de nem szükséges ezt választani. Ekkor $m \in H \cap n$, vagyis $H \cap n$ nem üres részhalmaza n-nek. A $\leq_n$ reláció jólrendezés, tehát $H \cap n$-nek létezik legkisebb eleme a $\leq_n$ rendezés szerint; legyen ez k. Ha k nem volna a H legkisebb eleme a $\leq$ rendezés szerint, akkor létezne olyan $j \in H$, amelyre $j < k$ teljesülne. Ekkor $j \in k \in n$ miatt $j \in H \cap n$ és $j <_n k$, ami ellentmond annak, hogy k a $H \cap n$ legkisebb eleme $\leq_n$ szerint. Ezért $\leq$ jólrendezés az $\mathbb{N}$ halmaz felett. ■

Definíció. Az $\mathbb{N}$ halmaz feletti *természetes rendezésnek* nevezzük a

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (m \in n) \vee (m = n)\}$$

jólrendezést, és ezt a $\leq$ vagy $\leq_{\mathbb{N}}$ szimbólummal jelöljük.

Fontos az, hogy az előzőek szerint $m, n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \Leftrightarrow (m \in n) \vee (m = n) \Leftrightarrow n \notin m$$

teljesül. Továbbá, ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$m < n \Leftrightarrow (m \subseteq n) \wedge (m \neq n) \Leftrightarrow m \in n$$

teljesül.

Állítás. a) Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $m = n \Leftrightarrow m^+ = n^+$ teljesül.
b) Minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz, $n \neq 0$ esetén egyértelműen létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre $m^+ = n$ teljesül.

Bizonyítás. a) Ha $m^+ = n^+$, akkor $m \in m^+$ miatt $m \in n^+$, tehát $m \in n$ vagy $m = n$. Megmutatjuk, hogy $m \in n$ lehetetlen, tehát szükségképpen $m = n$. Ha ugyanis $m \in n$ teljesülne, akkor $n \in n^+ = m^+$ miatt $n \in m$ vagy $n = m$. Az első esetben $n \subseteq m$, mert m tranzitív halmaz, ezért $m \in m$, ami lehetetlen. A második esetben szintén $m \in m$, ami lehetetlen. Ezért $m^+ = n^+$ esetén szükségképpen $m = n$ teljesül.

b) Az egyértelműség a)-ból nyilvánvalóan következik. A létezés bizonyításához legyen $E := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} | (n \neq 0) \wedge (\exists m)((m \in \mathbb{N}) \wedge (m^+ = n))\}$. A definíció alapján triviális, hogy $0 \in E$ és ha $n \in E$, akkor $n^+ \in E$, így a teljes indukció elve alapján $E = \mathbb{N}$, amit bizonyítani kellett. ■

Definíció. Az $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ szám *predesszorának* nevezzük és n^--szal jelöljük azt a természetes számot, amelyre $(n^-)^+ = n$ teljesül.

Definíció. *Sorozatoknak* nevezzük a természetes számok halmazán értelmezett függvényeket. Ha E halmaz, akkor *E-ben haladó sorozatoknak* nevezzük azokat a sorozatokat, amelyek értékkészlete részhalmaza E-nek. Az $\boldsymbol{s}$ sorozat *részsorozatának* nevezünk minden $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ alakú függvényt, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény. Az $\boldsymbol{s}$ sorozatot *stacionáriusnak* nevezzük, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számra, $k > n$ esetén $\boldsymbol{s}(k) = \boldsymbol{s}(n)$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényeket *indexsorozatoknak* is szokás nevezni. Könnyen belátható, hogy ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ elemre fennáll az $n \leq \sigma(n)$ egyenlőtlenség, hiszen ha $E := \{n \in \mathbb{N} | n \leq \sigma(n)\}$, akkor nyilvánvalóan $0 \in E$, és ha $n \in E$, akkor $n < n^+$ és a σ szigorú monoton növése miatt $n \leq \sigma(n) < \sigma(n^+)$, ezért $n^+ \leq \sigma(n^+)$, vagyis $n^+ \in E$, így a teljes indukció elve alapján $E = \mathbb{N}$.

Tétel. (*A rekurzív definíció tétele.*) Legyen E halmaz, $e \in E$ rögzített elem, és $g : \mathbb{N} \times E \to E$ tetszőleges függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, amelyre $\boldsymbol{s}(0) = e$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}(n^+) = g(n, \boldsymbol{s}(n))$ teljesül.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz *létezik egyetlen* olyan $f : n \to E$ függvény, amelyre teljesülnek a következők:

- ha $0 \in n$, akkor $f(0) = e$;
- minden $k \in n$ számra, ha $k^+ \in n$, akkor $f(k^+) = g(k, f(k))$.

Ehhez minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen S_n azon $f : n \to E$ függvények halmaza, amelyekre teljesülnek a fenti tulajdonságok. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén S_n *egy elemű* halmaz; jelölje N azon $n \in \mathbb{N}$ számok halmazát, amelyekre S_n egy elemű halmaz. Nyilvánvaló, hogy $0 \in N$, mert $S_0 = \{\emptyset\}$. Tegyük fel, hogy $n \in N$ és legyen $\boldsymbol{s}_n$ az S_n halmaz egyetlen eleme. Legyen $f : n^+ \to E$ az a függvény, amelyre $k \in n$ esetén $f(k) := \boldsymbol{s}_n(k)$ és $f(n) := g(n^-, \boldsymbol{s}_n(n^-))$, ha $0 \in n$ (ha $0 \notin n$, akkor $n = 0$, és akkor $f = \emptyset$). A definícióból látszik, hogy $f \in S_{n^+}$.

Ha $f' : n^+ \to E$ szintén olyan függvény, amelyre $f' \in S_{n^+}$, akkor világos, hogy $f'|_n \in S_n$, így $f'|_n = \boldsymbol{s}_n = f|_n$, vagyis $f' = f$ az n halmazon. Ugyanakkor, $0 \in n$ esetén

$$f'(n) = f'((n^-)^+) = g(n^-, f'(n^-)) = g(n^-, f(n^-)) =: f(n),$$

tehát $f' = f$. Ez azt jelenti, hogy $S_{n^+} = \{f\}$, vagyis $n^+ \in N$, így a teljes indukció elve alapján $N = \mathbb{N}$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén S_n egy elemű halmaz.

Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n \subseteq \mathscr{F}_0(\mathbb{N}; E)$, ahol $\mathscr{F}_0(\mathbb{N}; E)$ jelöli az $\mathbb{N} \rightarrowtail E$ függvények halmazát. Ezért jól értelmezett az az $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény, amely minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz S_n-t rendeli. Valóban, ez a függvény azonos a

$$\{x|(\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, S_n)))\}$$

halmazzal, és az előzőek szerint a $(\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, S_n)))$ kijelentés kollektivizáló az x változóban, hiszen következik belőle az, hogy $x \in \mathbb{N} \times \mathscr{P}(\mathscr{F}_0(\mathbb{N}; E))$, így a részhalmaz axióma alkalmazható. Ilymódon tekinthetjük az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert.

Korábban láttuk, hogy egy elemű halmazok tetszőleges rendszerének a szorzata szintén egy elemű halmaz; legyen $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a halmaz, amelyre $\{(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \prod_{n\in\mathbb{N}} S_n$ teljesül. Ekkor $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a függvény, amely az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett (tehát sorozat), továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $\boldsymbol{s}_n : n \to E$ az a függvény, amelyre teljesülnek a következők:

- ha $0 \in n$, akkor $\boldsymbol{s}_n(0) = e$;
- minden $k \in n$ számra, ha $k^+ \in n$, akkor $\boldsymbol{s}_n(k^+) = g(k, \boldsymbol{s}_n(k))$.

Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$, akkor $\boldsymbol{s}_n|_m \in S_m$, ezért $\boldsymbol{s}_n|_m = \boldsymbol{s}_m$, hiszen S_m egy elemű. Ezért létezik egyetlen olyan $\boldsymbol{s}$ függvény, amelyre

$$Dom(\boldsymbol{s}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Dom(\boldsymbol{s}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n = \mathbb{N},$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $\boldsymbol{s}|_n = \boldsymbol{s}_n$, így $\boldsymbol{s}(0) = \boldsymbol{s}_1(0) = e$, továbbá $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{s}(n^+) = \boldsymbol{s}_{(n^+)^+}(n^+) = g(n, \boldsymbol{s}_{(n^+)^+}(n)) = g(n, \boldsymbol{s}(n)),$$

tehát $\boldsymbol{s}$ olyan sorozat, amelynek a létezését állítottuk. ■

Definíció. Ha E halmaz, $e \in E$ rögzített elem, és $g : \mathbb{N} \times E \to E$ függvény, akkor az e kezdőpont és g függvény által meghatározott *rekurzív sorozatnak* nevezzük azt az E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot, amelyre $\boldsymbol{s}(0) = e$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}(n^+) = g(n, \boldsymbol{s}(n))$ teljesül.

Gyakran előfordul, hogy a rekurziónak csak egy speciális esetét alkalmazzuk: az *iterációt.*

Következmény. (*Az iterációs definíció tétele.*) Legyen E halmaz, $e \in E$ rögzített elem, és $f : E \to E$ tetszőleges függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, amelyre $\boldsymbol{s}(0) = e$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}(n^+) = f(\boldsymbol{s}(n))$ teljesül.

Bizonyítás. Elegendő a rekurzív definíció tételét alkalmazni a E halmazra, az $e \in E$ kezdőpontra és a $g : \mathbb{N} \times E \to E;\ \ (n, x) \mapsto f(x)$ függvényre. ■

Definíció. Ha E halmaz, $e \in E$ rögzített elem, és $f : E \to E$ függvény, akkor az e kezdőpont és f függvény által meghatározott *iterációs sorozatnak* nevezzük azt az E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot, amelyre $\boldsymbol{s}(0) = e$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}(n^+) = f(\boldsymbol{s}(n))$ teljesül.

Most az iteráció két fontos, elvi jelentőségű alkalmazását mutatjuk be.

Definíció. (*Az* $\mathbb{N}$ *feletti összeadás értelmezése.*) Jelölje f az $\mathbb{N} \to \mathbb{N};\ \ n \mapsto n^+$ függvényt. Minden $m \in \mathbb{N}$ esetén legyen s_m az f függvény és az m kezdőpont által meghatározott iterációs sorozat; tehát $s_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre $s_m(0) = m$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$ teljesül. Ekkor az

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad (m, n) \mapsto s_m(n)$$

függvényt az $\mathbb{N}$ feletti *összeadásnak* nevezzük, és infix jelölésben a $+$ szimbólummal jelöljük.

Tehát az $\mathbb{N}$ feletti összeadás olyan, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\begin{gathered} m + 0 = m; \\ m + n^+ = (m + n)^+ \end{gathered}$$

teljesül. Az $1 \in \mathbb{N}$ szám és a $+$ definíciója alapján nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 = n + 0^+ = (n + 0)^+ = n^+$.

Állítás. Az $\mathbb{N}$ feletti összeadás asszociatív, kommutatív és 0 a neutrális eleme.

Bizonyítás. (I) Legyenek $m, n \in \mathbb{N}$ rögzítettek; teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(m + n) + k = m + (n + k)$ teljesül. Az összeadás értelmezése alapján $(m + n) + 0 = m + n = m + (n + 0)$, tehát az állítás igaz $k := 0$ esetén. Ha $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $(m + n) + k = m + (n + k)$, akkor

$$(m + n) + k^+ = ((m + n) + k)^+ = (m + (n + k))^+ = m + (n + k)^+ = m + (n + k^+),$$

tehát az állítás k^+-ra is igaz, amivel a teljes indukciót végrehajtottuk. Ez azt jelenti, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén minden $k \in \mathbb{N}$ számra $(m + n) + k = m + (n + k)$ teljesül, vagyis az $\mathbb{N}$ feletti összeadás asszociatív.

(II) Megmutatjuk, hogy 0 az összeadás neutrális eleme. Ehhez n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 0 = 0 + n = n$ teljesül. Ez $n := 0$-ra triviálisan igaz, és ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n + 0 = 0 + n = n$, akkor

$$0 + n^+ = (0 + n)^+ = n^+ = (n + 0)^+.$$

(III) Most n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 = 1 + n$ teljesül. Láttuk, hogy 0 az összeadás neutrális eleme, ezért

$0+1=1=1+0$, így az állítás 0-ra igaz. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n+1=1+n$. Ekkor a definíciók és az előzőek szerint

$$1+n^+=(1+n)^+=(n+1)^+=(n+1)+1=n^++1.$$

Legyen végül $m \in \mathbb{N}$ rögzített elem; teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $m+n=n+m$ teljesül. Ez $n:=0$ esetén igaz, mert 0 az összeadás neutrális eleme. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $m+n=n+m$, akkor az összeadás asszociativitását és (III)-t alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} m+n^+=(m+n)^+=(n+m)^+=(n+m)+1= \\ =n+(m+1)=n+(1+m)=(n+1)+m=n^++m, \end{aligned}$$

amivel a teljes indukciót végrehajtottuk, ami azt jelenti, hogy az $\mathbb{N}$ feletti összeadás kommutatív. ■

Azonban könnyen belátható, hogy az $\mathbb{N}$ feletti összeadásra nézve csak a 0-nak létezik inverze.

Definíció. (*Az $\mathbb{N}$ feletti szorzás értelmezése.*) Minden $m \in \mathbb{N}$ esetén jelölje f_m az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $n \mapsto n+m$ függvényt. Minden $m \in \mathbb{N}$ esetén legyen p_m az f_m függvény és a 0 kezdőpont által meghatározott iterációs sorozat; tehát $p_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre $p_m(0)=0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $p_m(n^+)=p_m(n)+m$ teljesül. Ekkor az

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad (m,n) \mapsto p_m(n)$$

függvényt az $\mathbb{N}$ feletti *szorzásnak* nevezzük, és infix jelölésben a $\cdot$ szimbólummal jelöljük.

Tehát az $\mathbb{N}$ feletti szorzás olyan, hogy minden $m,n \in \mathbb{N}$ számra

$$\begin{aligned} m \cdot 0 &= 0; \\ m \cdot n^+ &= (m \cdot n)+m \end{aligned}$$

teljesül.

Állítás. Az $\mathbb{N}$ feletti szorzás asszociatív, kommutatív és 1 a neutrális eleme. A szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy 1 a szorzás neutrális eleme, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \cdot 1 = n = 1 \cdot n$ teljesül. A definíció szerint $1 \cdot 0 = 0$, ezért $0 \cdot 1 = 0 \cdot 0^+ = (0+0)+0 = 0+0 = 0 = 1 \cdot 0$, vagyis az állítás $n:=0$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \cdot 1 = n = 1 \cdot n$ teljesül. Ekkor $1 \cdot n^+ = 1 \cdot n + 1 = n+1 = n^+$, ugyanakkor $n^+ \cdot 1 = n^+ \cdot 0^+ = n^+ \cdot 0 + n^+ = 0 + n^+ = n^+$, vagyis $1 \cdot n^+ = n^+ = n^+ \cdot 1$, így az állítás n^+-ra is igaz. Tehát a teljes indukció elve alapján kapjuk, hogy 1 a szorzás neutrális eleme.

(II) Most igazoljuk, hogy a szorzás *balról* disztributív az összeadásra nézve. Ehhez legyen $k,m \in \mathbb{N}$ rögzített; teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $k \cdot (m+n) = (k \cdot m)+(k \cdot n)$. Ez igaz $n:=0$ esetén, mert

$$k \cdot (m+0) = k \cdot m = (k \cdot m)+0 = (k \cdot m)+(k \cdot 0).$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre teljesül az egyenlőség, akkor

$$k \cdot (m + n^+) = k \cdot (m + n)^+ = (k \cdot (m + n)) + k = ((k \cdot m) + (k \cdot n)) + k = \\ = (k \cdot m) + ((k \cdot n) + k) = (k \cdot m) + (k \cdot n^+),$$

tehát az állítás n^+-ra is igaz.

(III) Megmutatjuk, hogy a szorzás asszociatív. Ehhez legyen $k, m \in \mathbb{N}$ rögzített; teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n$. Ez igaz $n := 0$ esetén, mert

$$k \cdot (m \cdot 0) = k \cdot 0 = 0 = (k \cdot m) \cdot 0.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre teljesül az egyenlőség, akkor kihasználva azt, hogy a szorzás balról disztributív az összeadásra nézve, és felhasználva azt, hogy 1 a szorzás neutrális eleme, kapjuk, hogy

$$k \cdot (m \cdot n^+) = k \cdot ((m \cdot n) + m) = (k \cdot (m \cdot n)) + (k \cdot m) = \\ = ((k \cdot m) \cdot n) + ((k \cdot m) \cdot 1) = (k \cdot m) \cdot (n + 1) = (k \cdot m) \cdot n^+$$

tehát az állítás n^+-ra is igaz.

(IV) Igazoljuk azt, hogy a szorzás *jobbról* disztributív az összeadásra nézve. Ehhez legyen $k, m \in \mathbb{N}$ rögzített; teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(k + m) \cdot n = (k \cdot n) + (m \cdot n)$. Ez igaz $n := 0$ esetén, mert

$$(k + m) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = (k \cdot 0) + (m \cdot 0).$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre teljesül az egyenlőség, akkor az összeadás asszociativitását és kommutativitását, valamint a szorzás összeadásra vonatkozó baloldali disztributivitását alkalmazva kapjuk, hogy

$$(k + m) \cdot n^+ = ((k + m) \cdot n) + (k + m) = ((k \cdot n) + (m \cdot n)) + (k + m) = \\ = (k \cdot n) + ((m \cdot n) + (k + m)) = (k \cdot n) + (((m \cdot n) + k) + m) = \\ = (k \cdot n) + ((k + (m \cdot n)) + m) = (k \cdot n) + (k + ((m \cdot n) + m)) = \\ = (k \cdot n) + (k + (m \cdot n^+)) = ((k \cdot n) + k) + (m \cdot n^+) = (k \cdot n^+) + (m \cdot n^+),$$

tehát az állítás n^+-ra is igaz.

(V) Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \cdot n = 0$ teljesül. Ez $n := 0$ esetén nyilvánvalóan igaz. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $0 \cdot n = 0$, akkor $0 \cdot n^+ = (0 \cdot n) + 0 = 0 \cdot n = 0$, tehát az állítás n^+-ra is igaz.

(VI) Végül bebizonyítjuk, hogy a szorzás kommutatív. Ehhez legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített; n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $m \cdot n = n \cdot m$. Ez igaz $n := 0$ esetén, mert az (V) alapján $m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$ teljesül. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $m \cdot n = n \cdot m$, akkor kihasználva a szorzás összeadásra vonatkozó jobboldali disztributivitását kapjuk, hogy

$$m \cdot n^+ = (m \cdot n) + m = (n \cdot m) + m = (n \cdot m) + (1 \cdot m) = (n + 1) \cdot m = n^+ \cdot m,$$

tehát az állítás n^+-ra is igaz. ■

Azonban könnyen belátható, hogy az $\mathbb{N}$ feletti szorzásra nézve csak az 1-nek létezik inverze.

A matematikában sokszor szükségünk van olyan sorozatok előállítására, amelyek *szeletei* előírt tulajdonságokkal rendelkeznek. Pontosabban; ha $\boldsymbol{s}$ olyan sorozat, amely az E halmazban halad, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\boldsymbol{s}|_n : n \to E$ leszűkített függvényt az $\boldsymbol{s}$ sorozat *n-edik szeletének* nevezzük. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számra rögzítünk egy $F_n \subseteq \mathscr{F}(n; E)$ függvényhalmazt, akkor azt kérdezzük, hogy létezik-e olyan E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\boldsymbol{s}$ sorozat n-edik szelete eleme F_n-nek? A következő tétel elégséges (és mellesleg nyilvánvalóan szükséges) feltételt ad ahhoz, hogy erre a kérdésre pozitív választ lehessen adni.

Tétel. (*A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele.*) Legyen E halmaz és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, amelyre teljesül az, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq \mathscr{F}(n; E)$. Tegyük fel, hogy

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \boldsymbol{a} \in F_n)(\exists \boldsymbol{a}' \in F_{n+1}) : \ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'|_n$$

teljesül. Ha $e \in E$ tetszőleges olyan pont, amelyre az $1 \to E;\ 0 \mapsto e$ függvény eleme F_1-nek, akkor *létezik* olyan $\boldsymbol{s}$ sorozat, amely az E halmazban halad, $\boldsymbol{s}(0) = e$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}|_n \in F_n$ teljesül.

Bizonyítás. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\boldsymbol{a} \in F_n$, akkor az $\{\boldsymbol{a}' \in F_{n+1} |\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'|_n\}$ halmaz a hipotézis alapján *nem üres*, ezért a kiválasztási axióma szerint minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\prod_{\boldsymbol{a}\in F_n} \{\boldsymbol{a}' \in F_{n+1} |\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'|_n\} \ \neq\ \emptyset.$$

Ismét a kiválasztási axiómának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \prod_{\boldsymbol{a}\in F_n} \{\boldsymbol{a}' \in F_{n+1} |\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'|_n\} \ \neq\ \emptyset;$$

legyen f eleme ennek a szorzathalmaznak. Tehát f olyan függvény, amely az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett (vagyis sorozat), és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) : F_n \to F_{n+1}$ olyan függvény, hogy minden $\boldsymbol{a} \in F_n$ esetén az $f(n)(\boldsymbol{a})$ függvény leszűkítése n-re egyenlő $\boldsymbol{a}$-val.

Legyen most $\mathscr{E} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ha $\boldsymbol{a} \in \mathscr{E}$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\boldsymbol{a} \in F_n$, tehát $\boldsymbol{a} : n \to E$ függvény, így $Dom(\boldsymbol{a}) = n \in \mathbb{N}$. Ezért értelmezhetjük a

$$g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}; \quad \boldsymbol{a} \mapsto f(Dom(\boldsymbol{a}))(\boldsymbol{a})$$

függvényt. Jelölje $\boldsymbol{e}$ azt az $1 \to E$ függvényt, amelyre $\boldsymbol{e}(0) := e$ teljesül. Ekkor a hipotézis alapján $\boldsymbol{e} \in F_1$, így $\boldsymbol{e} \in \mathscr{E}$, tehát az iterációs tétel alapján tekinthetjük az $\boldsymbol{e} \in \mathscr{E}$ kezdőpont és a g függvény által meghatározott $\boldsymbol{S}$ iterációs sorozatot. Tehát $\boldsymbol{S}$ az a függvény, amelyre $Dom(\boldsymbol{S}) = \mathbb{N}$ és $Im(\boldsymbol{S}) \subseteq \mathscr{E}$, és $\boldsymbol{S}(0) = \boldsymbol{e}$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{S}(n+1) = g(\boldsymbol{S}(n)) = f(Dom(\boldsymbol{S}(n)))(\boldsymbol{S}(n))$ teljesül.

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{S}(n) \in F_{n+1}$ teljesül. Valóban, a hipotézis szerint $S(0) = \boldsymbol{e} \in F_1$, és ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\boldsymbol{S}(n) \in F_{n+1}$, akkor $Dom(\boldsymbol{S}(n)) = n + 1$, így

$$\boldsymbol{S}(n+1) = f(Dom(\boldsymbol{S}(n)))(\boldsymbol{S}(n)) \in F_{Dom(\boldsymbol{S}(n))+1} = F_{(n+1)+1}.$$

A definícióból következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{S}(n+1)|_n = f(Dom(\boldsymbol{S}(n)))(\boldsymbol{S}(n))|_n = f(n+1)(\boldsymbol{S}(n))|_n = \boldsymbol{S}(n),$$

vagyis $\boldsymbol{S}(n) = \boldsymbol{S}(n+1)|_n$. Ezért értelmezhetjük azt az $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \to E$ függvényt, amelyre teljesül az, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, minden $k \in n$ számra $\boldsymbol{s}(k) = \boldsymbol{S}(n)(k)$. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre teljesül az, hogy $\boldsymbol{s}(0) = e$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}|_n \in F_n$. ■

Definíció. Azt mondjuk, hogy a E halmaz
- *véges*, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy E és n ekvipotensek;
- *végtelen*, ha nem véges, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ számra E és n nem ekvipotensek;
- *megszámlálható*, ha kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{N}$-nél;
- *kontinuum-számosságú*, ha ekvipotens a $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ hatványhalmazzal.

A véges halmazok *számosságának* bevezetéséhez szükséges a következő állítás.

Állítás. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor nem létezik olyan $H \subseteq n$ halmaz, amelyre $H \neq n$ és H ekvipotens n-nel. (Tehát egyetlen természetes szám sem ekvipotens egyetlen valódi részhalmazával sem.)

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, minden $H \subseteq n$ halmazra, ha $H \neq n$, akkor H nem ekvipotens n-nel. Ez igaz az $n := 0$ számra, mert a $0 := \emptyset$ halmaznak nincs nem üres részhalmaza. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $H \subseteq n$ halmazra, ha $H \neq n$, akkor H nem ekvipotens n-nel. Azt kell igazolni, hogy minden $H \subseteq n^+$ halmazra, ha $H \neq n^+$, akkor H nem ekvipotens n^+-szal.

Indirekt tegyük fel, hogy $H \subseteq n^+$ olyan, hogy $H \neq n^+$, de H ekvipotens n^+-szal; ebből ellentmondásra fogunk jutni. Ehhez jelöljön f egy $n^+ \to H$ bijekciót!

(I) Először tegyük fel, hogy $n \notin H$; ekkor a $H \subseteq n^+$ feltevés szerint $H \subseteq n$ teljesül. Ha $k \in n$, akkor $k \neq n$, így az f injektivitása folytán $f(k) \neq f(n)$, vagyis $f(k) \in H \setminus \{f(n)\}$. Ekkor az $f|_n : n \to H \setminus \{f(n)\}$ függvény injektív (mert injekció leszűkítése injekció), továbbá szürjektív is, mert $m \in H \setminus \{f(n)\}$ esetén az f szürjektivitása következtében van olyan $k \in n^+$, hogy $f(k) = m$; ekkor $k = n$ lehetelen, különben $f(n) = f(k) = m \in H \setminus \{f(n)\}$, ami lehetetlen; ezért $k \in n$, így $f|_n(k) = f(k) = m$. Természetesen $H \setminus \{f(n)\}$ valódi részhalmaza H-nak, hiszen $f(n) \in H$. Tehát $H \setminus \{f(n)\}$ olyan valódi részhalmaza n-nek, amely az $f|_n$ függvény által ekvipotens n-nel. Ez ellentmond az indukciós hipotézisnek, tehát az $n \notin H$ feltevés helytelen.

(II) Tegyük fel, hogy $n \in H$. Ekkor $H \setminus \{n\}$ valódi részhalmaza n-nek, különben $H = (H \setminus \{n\}) \cup \{n\} = n \cup \{n\} = n^+$, holott $H \neq n^+$.

Most két eset lehetséges: $f(n) = n$ vagy $f(n) \neq n$.

Ha $f(n) = n$, akkor $k \in n$ esetén $k \neq n$, így az f injektivitása folytán $f(k) \neq f(n) = n$, vagyis $f(k) \in H \setminus \{n\}$. Ekkor az $f|_n : n \to H \setminus \{n\}$ függvény bijekció

az n és $H \setminus \{n\}$ halmazok között. Valóban, az $f|_n$ függvény injektív, és ráképez $H \setminus \{n\}$-re, hiszen ha $m \in H \setminus \{n\}$, akkor az f szürjektivitása folytán létezik olyan $k \in n^+$, hogy $f(k) = m$; ekkor $k \neq n$, különben $n = f(n) = f(k) = m$ teljesülne, holott $m \neq n$, így $k \in n$, tehát $f|_n(k) = f(k) = m$. Azonban az indukciós hipotézis szerint nem létezhet bijekció n és $H \setminus \{n\}$ között.

Az előző ellentmondás azt mutatja, hogy szükségképpen $f(n) \neq n$ teljesül. Ugyanakkor $n \in H = Im(f)$, ezért létezik (egyetlen) olyan $k \in n^+$, amelyre $f(k) = n$. Ekkor $k \neq n$, különben $n = f(k) = f(n)$ teljesülne, holott a hipotézis szerint $f(n) \neq n$. Ezért $k \in n$ teljesül. Minden $j \in n$ számra, ha $j \neq k$, akkor $f(j) \neq f(k) = n$, vagyis $f(j) \in H \setminus \{n\}$. Továbbá, az $f(n) \neq n$ feltevés alapján $f(n) \in H \setminus \{n\}$ is teljesül. Legyen most $f' : n \to H \setminus \{n\}$ az a függvény, amelyre minden $j \in n$ esetén

$$f'(j) = \begin{cases} f(j) & \text{ha } j \neq k \\ f(n) & \text{ha } j = k \end{cases}$$

teljesül. Nyilvánvaló, hogy f' bijekció az n és $H \setminus \{n\}$ halmazok között, és $H \setminus \{n\}$ valódi részhalmaza n-nek. Ez ellentmond az indukciós hipotézisnek.

Ebből az következik, hogy minden $H \subseteq n^+$ halmazra, ha $H \neq n^+$, akkor H nem ekvipotens n^+-szal, amivel a teljes indukciót végrehajtottuk. ■

Következmény. Minden E véges halmazhoz *egyértelműen létezik* olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre E ekvipotens n-nel.

Bizonyítás. Legyenek $m, n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy m és n ekvipotensek E-vel; ekkor m és n ekvipotensek. Ha $m \neq n$, akkor m valódi részhalmaza n-nek (amellyel n ekvipotens), vagy n valódi részhalmaza m-nek (amellyel m ekvipotens). Az előző állítás szerint mindkét eset lehetetlen, ezért $m = n$. ■

Definíció. Az E véges halmaz *számosságának* nevezzük azt az egyértelműen meghatározott $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, amelyre teljesül az, hogy E ekvipotens n-nel; ezt az n számot a $Card(E)$ szimbólummal jelöljük.

Következmény. Az $\mathbb{N}$ halmaz végtelen és $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$.

Bizonyítás. Létezik $\mathbb{N}$-nek olyan valódi részhalmaza, amely $\mathbb{N}$-nel ekvipotens. Például az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto n^+$$

leképezés injekció és az értékkészlete egyenlő $\mathbb{N} \setminus \{0\}$-val, így $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ekvipotensek. Ezért $\mathbb{N}$ nem lehet véges halmaz. Ha $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$ teljesülne, akkor $\mathbb{N}$ ekvipotens volna egy természetes számmal, tehát $\mathbb{N}$ véges volna. Ezért $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ is teljesül. ■

Gyakorlatok

1. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor létezik egyetlen olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $m + k = n$ teljesül (ezt a k számot $n - m$ jelöli).

(*Útmutatás.* Legyen E azon $n \in \mathbb{N}$ számok halmaza, amelyekre teljesül az, hogy minden $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ számhoz létezik egyetlen olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $m + k = n$. A teljes indukció elvét alkalmazva igazolható, hogy $E = \mathbb{N}$.)

2. Ha E halmaz és $A, B \subseteq E$, akkor minden $x \in E$ elemre

$$\chi_{E \setminus A}(x) = 1 - \chi_A(x);$$
$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x);$$
$$\chi_{A \cup B}(x) + \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$$

teljesül.

3. Ha E véges halmaz és $H \subseteq E$, akkor H is véges és $Card(H) \leq Card(E)$. Minden olyan halmaz végtelen, amely tartalmaz végtelen részhalmazt.

(*Útmutatás.* A második állítás következik az elsőből. Az első bizonyításához először azt mutatjuk meg, hogy az

$$N := \{n \in \mathbb{N} | (\forall H \subseteq n)(\exists m \in \mathbb{N})((m \leq n) \wedge (m \text{ és } H \text{ ekvipotensek}))\}$$

halmaz egyenlő $\mathbb{N}$-nel. Világos, hogy $0 \in N$. Tegyük fel, hogy $n \in N$; megmutatjuk, hogy ekkor $n^+ \in N$. Ehhez legyen $H \subseteq n^+$ tetszőleges; olyan $m \in \mathbb{N}$ számot keresünk, amely ekvipotens H-val és amelyre $m \leq n^+$ teljesül. Ha $n \notin H$, akkor $H \subseteq n$, így az $n \in N$ hipotézis alapján van olyan $m \in \mathbb{N}$, amely ekvipotens H-val és amelyre $m \leq n$ teljesül, tehát $m \leq n^+$ is igaz. Ezért tegyük fel, hogy $n \in H$; ekkor $H \setminus \{n\} \subseteq n$, tehát az $n \in N$ hipotézis alapján van olyan $m \in \mathbb{N}$, amely ekvipotens $H \setminus \{n\}$-nel és amelyre $m \leq n$ teljesül. Legyen $f : m \to H \setminus \{n\}$ tetszőleges bijekció, és jelölje f' azt a függvényt, amely az m^+ halmazon értelmezett, f-nek kiterjesztése, és olyan, hogy $f'(m) := n$. Ekkor $f' : m^+ \to H$ bijekció és $m^+ \leq n^+$. Ez azt jelenti, hogy $n^+ \in N$ is igaz, így a teljes indukció elve alapján $N = \mathbb{N}$.
Legyen most E véges halmaz és $H \subseteq E$ tetszőleges halmaz. Ekkor E ekvipotens a $Card(E) \in \mathbb{N}$ számmal; legyen $f : E \to Card(E)$ tetszőleges bijekció. Ekkor az $f|_H$ függvény bijekció H és az $f\langle H \rangle \subseteq Card(E)$ halmaz között. Az előzőek szerint van olyan $m \in \mathbb{N}$, amely ekvipotens $f\langle H \rangle$-val és amelyre $m \leq Card(E)$ teljesül. Ekkor H és m ekvipotensek, tehát H véges és $Card(H) = m \leq Card(E)$.)

4. (*A véges összegek és szorzatok rekurzív értelmezése.*)
a) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $f : n \to \mathbb{N}$ tetszőleges függvény. Jelölje f^0 az f 0-val vett kiterjesztését $\mathbb{N}$-re, tehát $f^0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amely f-nek kiterjesztése, és amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n \leq k$, akkor $f^0(k) := 0$ teljesül. Ekkor létezik egyetlen olyan $\boldsymbol{s}_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, hogy $\boldsymbol{s}_f(0) = 0$ és minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}_f(k+1) = \boldsymbol{s}_f(k) + f^0(k)$ teljesül. Ez az $\boldsymbol{s}_f$ sorozat *stacionárius*; ha $k \in \mathbb{N}$ és $k > n$, akkor $\boldsymbol{s}_f(k) = \boldsymbol{s}_f(n)$. Ekkor a

$$\sum_{k \in n} f(k) := \boldsymbol{s}_f(n)$$

jelölést alkalmazzuk, és ezt a számot az f *függvény összegének* nevezzük.
Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $f : n \to \mathbb{N}$ függvény, valamint $\sigma : n \to n$ *bijekció*, akkor fennáll a

$$\sum_{k \in n} (f \circ \sigma)(k) = \sum_{k \in n} f(k)$$

egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ha I véges halmaz, $f : I \to \mathbb{N}$ függvény és $\sigma, \sigma' : Card(I) \to I$ tetszőleges bijekciók, akkor

$$\sum_{k \in Card(I)} (f \circ \sigma)(k) = \sum_{k \in Card(I)} (f \circ \sigma')(k)$$

teljesül; ezt a σ-tól független számot az $f : I \to \mathbb{N}$ *függvény összegének* nevezzük, és a

$$\sum_{i \in I} f(i)$$

szimbólummal jelöljük. Speciálisan, ha $(n_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy I véges és minden $i \in I$ esetén $n_i \in \mathbb{N}$, akkor az előzőek alapján jól értelmezett a

$$\sum_{i \in I} n_i$$

véges összeg.

b) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $f : n \to \mathbb{N}$ tetszőleges függvény. Jelölje f^1 az f 1-gyel vett kiterjesztését $\mathbb{N}$-re, tehát $f^1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amely f-nek kiterjesztése, és amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n \leq k$, akkor $f^1(k) := 1$ teljesül. Ekkor létezik egyetlen olyan $\boldsymbol{p}_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, hogy $\boldsymbol{p}_f(0) = 1$ és minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{p}_f(k+1) = \boldsymbol{p}_f(k) \cdot f^1(k)$ teljesül. Ez a $\boldsymbol{p}_f$ sorozat *stacionárius*; ha $k \in \mathbb{N}$ és $k > n$, akkor $\boldsymbol{p}_f(k) = \boldsymbol{p}_f(n)$. Ekkor a

$$\prod_{k \in n} f(k) := \boldsymbol{p}_f(n)$$

jelölést alkalmazzuk, és ezt a számot az f *függvény szorzatának* nevezzük.
Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $f : n \to \mathbb{N}$ függvény, valamint $\sigma : n \to n$ *bijekció*, akkor fennáll a

$$\prod_{k \in n} (f \circ \sigma)(k) = \prod_{k \in n} f(k)$$

egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ha I véges halmaz, $f : I \to \mathbb{N}$ függvény és $\sigma, \sigma' : Card(I) \to I$ tetszőleges bijekciók, akkor

$$\prod_{k \in Card(I)} (f \circ \sigma)(k) = \prod_{k \in Card(I)} (f \circ \sigma')(k)$$

teljesül; ezt a σ-tól független számot az $f : I \to \mathbb{N}$ *függvény szorzatának* nevezzük, és a

$$\prod_{i \in I} f(i)$$

szimbólummal jelöljük. Speciálisan, ha $(n_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy I véges és minden $i \in I$ esetén $n_i \in \mathbb{N}$, akkor az előzőek alapján jól értelmezett a

$$\prod_{i\in I} n_i$$

véges szorzat.

(Megjegyezzük, hogy a véges szorzatokra bevezetett $\prod_{i\in I} f(i)$ jelölés *félrevezető*, mert itt egyáltalán nem az $(f(i))_{i\in I}$ rendszer halmazszorzatáról van szó; ezért pontosabb lenne a $\prod_{i\in I} f(i)$ jelölés helyett valamilyen más jelölést alkalmazni a véges numerikus szorzatokra; például a $\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} f(i)$ jelet alkalmazhatjuk. Azonban történeti okokból nem szokás más jelölést alkalmazni a numerikus véges szorzatokra, ezért maradunk az eredeti jelölésnél.)

5. (*A véges összegek és szorzatok tulajdonságai.*)

a) Legyenek I, J véges halmazok, és $\sigma : J \to I$ tetszőleges *bijekció*. Ekkor minden $f : I \to \mathbb{N}$ függvényre teljesülnek a

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{j\in J} (f \circ \sigma)(j)$$
$$\prod_{i\in I} f(i) = \prod_{j\in J} (f \circ \sigma)(j)$$

egyenőségek. (*A véges összegek és szorzatok kommutativitása.*)

Legyen I véges halmaz és $(I_j)_{j\in J}$ olyan diszjunkt halmazrendszer, hogy $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ és minden $j \in J$ indexre $I_j \neq \emptyset$ (tehát $(I_j)_{j\in J}$ az I halmaz *partíciója*). Ekkor J is véges halmaz és minden $f : I \to \mathbb{N}$ függvényre

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} f(i)$$
$$\prod_{i\in I} f(i) = \prod_{j\in J} \prod_{i\in I_j} f(i)$$

teljesül. (*A véges összegek és szorzatok asszociativitása.*)

Legyen $(I_j)_{j\in J}$ halmazrendszer és minden $j \in J$ indexre $(n_{j,i})_{i\in I_j}$ természetes számok tetszőleges rendszere. Ha J véges és minden $j \in J$ indexre I_j is véges, akkor az $I := \prod_{j\in J} I_j$ halmazra fennáll a

$$\prod_{j\in J} \sum_{i\in I_j} n_{j,i} = \sum_{f\in I} \prod_{j\in J} n_{j,f(j)}$$

egyenlőség. (*A véges szorzás disztributív a véges öszeadásra nézve.*)

6. Ha I véges halmaz és $f : I \to \mathbb{N}$ tetszőleges függvény, akkor teljesülnek a

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{k\in Im(f)} k \cdot Card(\overset{-1}{f}\langle\{k\}\rangle)$$

$$\prod_{i\in I} f(i) = \prod_{k\in Im(f)} k^{Card(\overset{-1}{f}\langle\{k\}\rangle)}$$

egyenlőségek.

7. Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén E_i is véges, akkor az $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$ és $\prod\limits_{i\in I} E_i$ halmazok is végesek, és fennállnak a

$$Card(\bigcup_{i\in I} E_i) \leq \sum_{i\in I} Card(E_i)$$

$$Card(\prod_{i\in I} E_i) = \prod_{i\in I} Card(E_i)$$

egyenlőségek. Ha az $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer *diszjunkt*, akkor

$$Card(\bigcup_{i\in I} E_i) = \sum_{i\in I} Card(E_i)$$

is teljesül.

8. Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy I véges halmaz és minden $i \in I$ esetén $E_i \neq \emptyset$, akkor $\prod\limits_{i\in I} E_i \neq \emptyset$.

(*Útmutatás.* Az I halmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyíthatunk.)

9. (*A hatványozás rekurzív értelmezése.*) Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor egyértelműen létezik olyan $\boldsymbol{w}_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, hogy $\boldsymbol{w}_m(0) = 1$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{w}_m(n+1) = \boldsymbol{w}_m(n) \cdot m$ teljesül. Minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra az $m^n := \boldsymbol{w}_m(n)$ jelölést alkalmazzuk, és az m^n számot az m szám *n-edik hatványának* nevezzük. Vizsgáljuk meg az

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad ; \quad (m, n) \mapsto m^n$$

hatványozás-függvény algebrai tulajdonságait, és a többi művelettel való kapcsolatait! Mutassuk meg, hogy ha E és F véges halmazok, akkor a $\mathscr{F}(E; F)$ halmaz is véges és

$$Card(\mathscr{F}(E; F)) = Card(F)^{Card(E)}$$

teljesül. (Ezért szokás a $\mathscr{F}(E; F)$ függvényhalmazt az F^E szimbólummal is jelölni.)

10. Értelmezzük az *oszthatóság* relációt $\mathbb{N}$ felett, és vizsgáljuk meg annak elemi tulajdonságait! Mutassuk meg, hogy minden $p, q \in \mathbb{N}$ esetén, ha $q \neq 0$, akkor egyértelműen léteznek olyan $r, s \in \mathbb{N}$ számok, amelyekre $p = s \cdot q + r$ és $r < q$ teljesül (*euklidészi osztás*).

11. Értelmezzük rekurzióval a $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ *faktoriális-sorozatot*! Minden $k, n \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha } k \leq n \\ 0 & \text{ha } k > n. \end{cases}$$

(*Binomiális együtthatók.*)

a) Minden $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ párra, ha $k < n$, akkor

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

teljesül.

b) Ha $a, b \in \mathbb{N}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k\in n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

teljesül. (*Binomiális formula* $\mathbb{N}$*-re.*)

c) Ha E és F véges halmazok, akkor az az $E \to F$ *injekciók* halmazának számossága 0, ha $Card(E) > Card(F)$, és egyenlő a

$$\frac{Card(F)!}{(Card(F) - Card(E))!}$$

számmal, ha $Card(E) \leq Card(F)$.

d) Ha E véges halmaz, akkor az $E \to E$ *bijekciók* halmazának számosság egyenlő a $Card(E)!$ számmal.

e) Ha E véges halmaz és $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $k \leq Card(E)$, akkor az E halmaz k számosságú részhalmazainak halmaza

$$\binom{Card(E)}{k}$$

számosságú.

f) Minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ számra

$$\sum_{k\in n+1} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k\in n+1} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

teljesül. (Itt felhasználjuk az *egész számok* fogalmát; ld. **35**. gyakorlat.) Speciálisan, ha E véges halmaz, akkor a $\mathscr{P}(E)$ hatványhalmaz is véges, és fennáll a

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)}$$

egyenlőség. (Ezért szokás a $\mathscr{P}(E)$ hatványhalmazt a 2^E szimbólummal is jelölni.)

12. Ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, akkor

$$Card(\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ 1 \leq i \leq j \leq n\}) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$Card(\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ 1 \leq i < j \leq n\}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

teljesül.

13. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket. (Itt felhasználjuk az *egész számok* fogalmát; ld. **35**. gyakorlat.)

a) Ha $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $p \leq n$, akkor

$$\sum_{k \in p+1} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$
$$\sum_{k \in p+1} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$$

teljesül.

b) Ha $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, akkor

$$\sum_{k \in p+1} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{n+p-k}{p} = 0$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Az a) pontban szereplő formulák a binomiális együtthatók definíciójából közvetlenül kaphatóak, míg a b) pontban található formula az a) második kifejezéséből nyerhető, ha az ottani n helyére az $n+p$ értéket helyettesítjük, és némi egyszerűsítést végzünk.)

14. Tekintsük a következő függvényeket:

$$C : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \quad ; \quad \boldsymbol{s} \mapsto \left(n \mapsto \sum_{k \in n+1} \binom{n}{k} \boldsymbol{s}(k) \right)$$
$$T : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \quad ; \quad \boldsymbol{s} \mapsto (n \mapsto (-1)^n \boldsymbol{s}(n)) .$$

Mutassuk meg, hogy $C \circ T \circ C \circ T = id_{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}}$, tehát $C \circ T : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *bijekció*, és $(C \circ T)^{-1} = C \circ T$. Ebből következik, hogy C is bijekció és $C^{-1} = T \circ C \circ T$. (Itt felhasználjuk az *egész számok* fogalmát; ld. **35**. gyakorlat.)

15. Legyen minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra $S_{m,n}$ az $m \to n$ *szürjekciók* halmazának a számossága. (Itt felhasználjuk az *egész számok* fogalmát; ld. **35**. gyakorlat.)

a) Minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra:

$$S_{m,n} = \sum_{k \in n+1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m .$$

(*Útmutatás.* Az előző gyakorlatban bevezetett C függvényt alkalmazva igazoljuk, hogy minden $m, p \in \mathbb{N}$ számra, ha $p \leq m$, akkor $p^m = C((S_{m,n})_{n\in\mathbb{N}})(p)$ teljesül. Ebből a C inverzének ismeretében kapjuk az állítást.)

b) Minden $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ számra:

$$S_{m,n} = n \cdot (S_{m-1,n} + S_{m-1,n-1}).$$

c) Minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ számra:

$$S_{n+1,n} = \frac{(n+1)!n}{2}$$
$$S_{n+2,n} = \frac{(n+2)!(3n+1)n}{24}.$$

16. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és p_n azon $f : n \to n$ bijekciók halmazának számossága, amelyekre minden $k \in n$ esetén $f(k) \neq k$. Mutassuk meg, hogy:

$$p_n = \sum_{k\in n+1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!.$$

(Itt felhasználjuk az *egész számok* fogalmát; ld. **35**. gyakorlat.)

(*Útmutatás.* Alkalmazzuk ugyanazt a módszert, mint a **15.** gyakorlat a) pontjában!)

17. Legyenek $m, n \in \mathbb{N}$ és jelölje $p_{m,n}$ azon $f : [1, m] \to [1, n]$ szigorúan monoton növő függvények halmazának számosságát, amelyekre teljesül az, hogy minden $k \in [1, m]$ páros (ill. páratlan) számra az $f(k) \in [1, n]$ szám páros (ill. páratlan).

a) Ha $m > 0$ és $n > 1$, akkor

$$p_{m,n} = p_{m-1,n-1} + p_{m,n-2}.$$

b) Ha $m \leq n$, akkor

$$p_{m,n} = \binom{\left[\frac{m+n}{2}\right]}{m},$$

ahol $\left[\frac{m+n}{2}\right]$ az $\frac{m+n}{2}$ racionális szám egész részét jelöli.

18. Adjunk meg konkrét bijekciót $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ között.

(*Útmutatás.* Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz egyértelműen létezik olyan $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pár, hogy $n = j + \frac{k(k+1)}{2}$ és $j \leq k$, ezért az

$$f := \{(n, (j, k)) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) | \left(n = j + \frac{k(k+1)}{2}\right) \wedge (j \leq k)\}$$

halmaz $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ függvény. Könnyen belátható, hogy ekkor az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ; \quad n \mapsto (pr_1(f(n)) \ , \ pr_2(f(n)) - pr_1(f(n)))$$

leképezés bijekció. "Rajzoljuk le" azt, hogyan sorszámozza meg ez a függvény az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmaz elemeit!)

19. Minden végtelen halmaznak létezik megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.

(*Útmutatás.* Legyen E végtelen halmaz és R jólrendezés az E halmaz felett (2. **54**. gyakorlat). Az $(\mathbb{N}, \leq)$ pár jólrendezett halmaz, ezért a 2. **56**. gyakorlat szerint két eset lehetséges:

a) Létezik olyan $S \subseteq \mathbb{N}$ halmaz, amely szegmense az $(\mathbb{N}, \leq)$ jólrendezett halmaznak, és az (E, R) és $(S, \leq_S)$ jólrendezett halmazok izomorfak.

b) Létezik olyan $S' \subseteq E$ halmaz, amely szegmense az (E, R) jólrendezett halmaznak, és az $(\mathbb{N}, \leq)$ és $(S', R_{S'})$ jólrendezett halmazok izomorfak.

A b) esetben S' megszámlálhatóan végtelen részhalmaza E-nek. Az a) esetben S nem lehet $\mathbb{N}$-től különböző (valódi) szegmense az $(\mathbb{N}, \leq)$ jólrendezett halmaznak, hiszen ennek minden valódi szegmense $]\leftarrow, n[$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}$; vagyis az $(\mathbb{N}, \leq)$ minden valódi szegmense *természetes szám*, ugyanakkor S ekvipotens E-vel, így S végtelen, tehát nem létezik bijekció S és egy természetes szám között. Ezért az a) esetben $S = \mathbb{N}$, és S ekvipotens E-vel, így E megszámlálhatóan végtelen.)

20. Megszámlálható halmaz minden részhalmaza megszámlálható. Ha $(E_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy I *megszámlálható* halmaz és minden $i \in I$ esetén E_i megszámlálható halmaz, akkor $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ megszámlálható halmaz. Ha $(E_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy I *véges* halmaz és minden $i \in I$ esetén E_i megszámlálható halmaz, akkor $\prod\limits_{i \in I} E_i$ megszámlálható halmaz.

(*Útmutatás.* Legyen $g : I \to \mathbb{N}$ injekció és a kiválasztási axióma alkalmazásával vegyünk olyan $(f_i)_{i \in I}$ rendszert, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : E_i \to \mathbb{N}$ injekció. Ekkor az

$$\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times E_i) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad ; \quad (i, x) \mapsto (g(i), f_i(x))$$

függvény injekció. Az $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazok ekvipotensek (**18**. gyakorlat), és az $\bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times E_i)$ halmaz *ráképezhető* az $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ halmazra, ezért $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{N}$-nél, vagyis megszámlálható. A $\prod\limits_{i \in I} E_i$ halmaz megszámlálhatósága (ha I véges) az I halmaz számossága szerinti teljes indukcióval igazolható. Az indukciós lépés végrehajtásához ismét azt használjuk ki, hogy $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ekvipotensek.)

21. Ha E végtelen halmaz és F megszámlálható halmaz, akkor $E \cup F$ ekvipotens E-vel.

(*Útmutatás.* Elég arra az esetre bizonyítani, amikor $E \cap F = \emptyset$. Ha $N \subseteq E$ megszámlálhatóan végtelen halmaz (**19**. gyakorlat), akkor a **20**. gyakorlat szerint $N \cup F$ megszámlálhatóan végtelen halmaz, és ha $f : N \cup F \to N$ bijekció, akkor az

$$E \cup F \to E \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in N \cup F \\ x & \text{ha } x \notin N \cup F \end{cases}$$

függvény bijekció.)

22. (*A számosságaritmetika alaptétele.*) Ha E végtelen halmaz, akkor E és $E \times E$ ekvipotens halmazok.

(*Útmutatás.* Legyen $D \subseteq E$ rögzített megszámlálhatóan végtelen halmaz (**19**. gyakorlat), és jelölje $\mathfrak{S}$ azon $f : E \rightarrowtail E \times E$ függvények, amelyek injektívek, $D \subseteq Dom(f)$ és $Im(f) = Dom(f) \times Dom(f)$, tehát f bijekció a $Dom(f)$ és $Dom(f) \times Dom(f)$ halmazok között. Láttuk, hogy D és $D \times D$ ekvipotensek (**18**. gyakorlat), ezért $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Jelölje $\leq$ a tartalmazás-relációt a $\mathfrak{S}$ halmaz felett; ekkor $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmaz.

Megmutatjuk, hogy $(\mathfrak{S}, \leq)$ *induktívan* rendezett halmaz. Valóban, ha $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$ olyan halmaz, amelynek bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, akkor a 2. **20**. gyakorlat szerint $f := \bigcup \mathfrak{H}$ olyan injektív függvény, amely minden $h \in \mathfrak{H}$ függvénynek kiterjesztése, és $Dom(f) = \bigcup\limits_{h \in \mathfrak{H}} Dom(h)$, valamint $Im(f) = \bigcup\limits_{h \in \mathfrak{H}} Im(h)$. Ekkor $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ esetén $D \subseteq Dom(f)$ nyilvánvalóan teljesül. (Ha $\mathfrak{H} = \emptyset$, akkor az $\mathfrak{S}$ bármely eleme felső korlátja $\mathfrak{H}$-nak, ezért létezik felső korlátja $\mathfrak{H}$-nak, hiszen $\mathfrak{S} \neq \emptyset$; ilymódon feltehető, hogy $\mathfrak{H} \neq \emptyset$.) Minden $h \in \mathfrak{H}$ esetén $Im(h) = Dom(h) \times Dom(h) \subseteq Dom(f) \times Dom(f)$, ezért $Im(f) \subseteq Dom(f) \times Dom(f)$. Ha $(x, x') \in Dom(f) \times Dom(f)$, akkor léteznek olyan $h, h' \in \mathfrak{H}$ függvények, amelyekre $x \in Dom(h)$ és $x' \in Dom(h')$; ekkor $h \leq h'$ esetén $x, x' \in Dom(h)$, tehát $(x, x') \in Dom(h) \times Dom(h) = Im(h) \subseteq Im(f)$; és hasonlóan kapjuk, hogy ha $h' \leq h$, akkor szintén $(x, x') \in Im(f)$. Ez azt jelenti, hogy $Dom(f) \times Dom(f) \subseteq Im(f)$, így $Im(f) = Dom(f) \times Dom(f)$ teljesül. Tehát $f \in \mathfrak{S}$, és f a $\mathfrak{H}$ halmaznak *felső korlátja* (sőt szuprémuma) a $\mathfrak{H}$ halmaznak a $\leq$ rendezés szerint.

Tehát az $(\mathfrak{S}, \leq)$ pár induktívan rendezett halmaz, így a Kuratowski-Zorn lemma alapján létezik maximális eleme; legyen $f \in \mathfrak{S}$ ilyen elem, és legyen $F := Dom(f)$.

Megmutatjuk, hogy az F halmaz *ekvipotens* E-vel. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy F kisebb számosságú E-nél. Ekkor F az $E \setminus F$ halmaznál kisebb-egyenlő számosságú. Ennek bizonyításához először megjegyezzük, hogy az $E \setminus F$ halmaz biztosan legalább két elemű, különben volna olyan P egy elemű halmaz, amelyre $E \setminus F \subseteq P$ teljesül; ekkor $E = F \cup (E \setminus F) \subseteq F \cup P$ is igaz volna, tehát az F végtelensége miatt $F \cup P$ ekvipotens lenne F-fel (**21**. gyakorlat), így E kisebb-egyenlő számosságú volna F-nél, ellentétben az indirekt feltevéssel. Ugyanakkor F legalább két elemű (sőt $D \subseteq F$ miatt *végtelen*). Ha F nem volna kisebb-egyenlő számosságú $E \setminus F$-nél, akkor a 2. **48.** gyakorlat szerint $E \setminus F$ kisebb számosságú volna F-nél, tehát a fentiek, és a 2. **40**. gyakorlat szerint az $E = F \cup (E \setminus F)$ kisebb-egyenlő számosságú volna $F \times F$-nél, ami ekvipotens F-fel, holott az indirekt feltevés alapján F kisebb számosságú E-nél.

Tehát F kisebb-egyenlő számosságú az $E \setminus F$ halmaznál; legyen $H \subseteq E \setminus F$ olyan halmaz, hogy F ekvipotens H-val. Az $F \times H$ és $H \times F$ halmazok ekvipotensek $F \times F$-fel, tehát F-fel, ezért a 2. **40**. gyakorlat alapján $(F \times H) \cup (H \times F)$ kisebb-egyenlő számosságú $F \times F$-nél, így F-nél is kisebb-egyenlő számosságú. A $H \times H$ halmaz ekvipotens $F \times F$-fel, így F-fel is, ezért ismét a 2. **40**. gyakorlat szerint az $(F \times H) \cup (H \times F) \cup (H \times H)$ kisebb-egyenlő számosságú $F \times F$-nél, tehát F-nél is kisebb-egyenlő számosságú. Az nyilvánvaló, hogy F kisebb-egyenlő számosságú a $(F \times H) \cup (H \times F) \cup (H \times H)$ halmaznál, tehát a Schröder-Bernstein tétel alapján $(F \times H) \cup (H \times F) \cup (H \times H)$ és F ekvipotens halmazok. Ezért az $(F \times H) \cup (H \times F) \cup (H \times H)$ és H halmazok is ekvipotensek; legyen

$$g : H \to (F \times H) \cup (H \times F) \cup (H \times H)$$

rögzített bijekció. Ekkor az

$$(F \cup H) \times (F \cup H) = (F \times F) \cup (F \times H) \cup (H \times F) \cup (H \times H)$$

egyenlőség miatt a

$$h : F \cup H \to (F \cup H) \times (F \cup H) \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in F \\ g(x) & \text{ha } x \in H \end{cases},$$

függvény *bijekció*, tehát $h \in \mathfrak{S}$ és $f \subseteq h$, és természetesen $f \neq h$, vagyis $f < h$ az $\mathfrak{S}$ feletti $\leq$ rendezés szerint; ez viszont ellentmond az f maximalitásának.

Ez azt jelenti, hogy F *ekvipotens* E-vel, ugyanakkor F ekvipotens $F \times F$-fel is, így E ekvipotens $E \times E$-vel.)

23. Ha E nem üres véges halmaz és F végtelen halmaz, akkor az $\mathscr{F}(E; F)$ függvényhalmaz ekvipotens F-fel.

(*Útmutatás.* Az E halmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyíthatunk, felhasználva a számosságaritmetika alaptételét és azt, hogy ha x olyan halmaz, amelyre $x \notin E$, akkor az

$$\mathscr{F}(E \cup \{x\}; F) \to \mathscr{F}(E; F) \times F \quad ; \quad f \mapsto (f|_E, f(x))$$

leképezés bijekció.)

24. Ha E végtelen halmaz és F nem üres megszámlálható halmaz, akkor $E \times F$ ekvipotens E-vel. Ha E végtelen halmaz és az F halmaz ekvipotens $\mathscr{P}(E)$-vel, akkor az $\mathscr{F}(E; F)$ függvényhalmaz ekvipotens F-fel.

(*Útmutatás.* Az első állítás a számosságaritmetika alaptételéből, a Schröder-Bernstein tételből, és abból következik, hogy minden végtelen halmaznak létezik megszámlálhatóan végtelen részhalmaza (**19**. gyakorlat). A második állítás azért igaz, mert a hipotézis alapján F ekvipotens a $\mathscr{F}(E; \{0, 1\})$ halmazzal, tehát $\mathscr{F}(E; F)$ ekvipotens a $\mathscr{F}(E; \mathscr{F}(E; \{0, 1\}))$ függvényhalmazzal, és ez utóbbi a 2. **18**. gyakorlat szerint ekvipotens $\mathscr{F}(E \times E; \{0, 1\})$ halmazzal, vagyis $\mathscr{P}(E \times E)$-vel; ezután elég a számosságaritmetika alaptételére hivatkozni.)

25. Ha I végtelen halmaz és $(E_i)_{i \in I}$ olyan *diszjunkt* halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén E_i nem üres megszámlálható halmaz, akkor a $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ halmaz ekvipotens I-vel.

(*Útmutatás.* Az $(E_i)_{i \in I}$ rendszer diszjunktsága miatt jól értelmezett az a

$$\iota : \bigcup_{i \in I} E_i \to I$$

függvény, amely minden $x \in \bigcup\limits_{i \in I} E_i$ elemhez *azt* a $\iota(x) \in I$ indexet rendeli, amelyre $x \in E_{\iota(x)}$. Minden $i \in I$ esetén $E_i \neq \emptyset$, ezért a ι függvény *szürjektív*, így I kisebb-egyenlő számosságú $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$-nél. (Ehhez nem volt szükség arra, hogy minden $i \in I$ indexre E_i megszámlálható legyen.)

Ha minden $i \in I$ esetén E_i megszámlálható, akkor a kiválasztási axióma alkalmazásával kapunk olyan $(f_i)_{i\in I}$ függvényrendszert, hogy minden $i \in I$ indexre $f_i : E_i \to \mathbb{N}$ *injekció.* Ekkor az

$$\bigcup_{i\in I} E_i \to I \times \mathbb{N} \quad ; \quad x \mapsto (\iota(x), f_{\iota(x)}(x))$$

függvény injektív, tehát a $\bigcup_{i\in I} E_i$ halmaz kisebb-egyenlő számosságú $I \times \mathbb{N}$-nél, és a **24**. gyakorlat szerint $I \times \mathbb{N}$ kisebb-egyenlő számosságú I-nél. Ezután elég a Schröder-Bernstein tételre hivatkozni.)

26. Ha E és F halmazok, F végtelen és $f : E \to F$ olyan szürjekció, hogy minden $y \in F$ esetén az $\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle$ halmaz megszámlálható, akkor E és F ekvipotensek.

(*Útmutatás.* Megfelelő szereposztással alkalmazzuk a **25**. gyakorlatban megfogalmazott állítást!)

27. Ha E végtelen halmaz, akkor az E véges részhalmazainak halmaza ekvipotens E-vel.

(*Útmutatás.* Minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen $\mathscr{P}_n(E)$ az E halmaz n-elemű részhalmazainak halmaza; ekkor $\mathscr{P}_n(E)$ kisebb-egyenlő számosságú az $\mathscr{F}(n; E)$ függvényhalmaznál, mert minden $X \in \mathscr{P}_n(E)$ halmazhoz létezik $n \to X$ bijekció, amely egyben $n \to E$ injekció is. Ezért a számosságaritmetika alaptétele szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathscr{P}_n(E)$ kisebb-egyenlő számosságú E-nél. Ezért az E véges részhalmazainak halmaza, vagyis a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n(E)$ halmaz kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{N} \times E$-nél, tehát E-nél is. Ezután elég a Schröder-Bernstein tételre hivatkozni.)

28. Ha E végtelen halmaz, akkor az E-ben haladó sorozatok halmaza ekvipotens $\mathscr{P}(E)$-vel, és az E-ben haladó stacionárius sorozatok halmaza ekvipotens E-vel.

29. Ha E, F, E' és F' olyan halmazok, hogy E *kisebb* számosságú E'-nél, és F *kisebb* számosságú F'-nél, akkor $E \cup F$ *kisebb* számosságú $E' \cup F'$-nél, és $E \times F$ *kisebb* számosságú $E' \times F'$-nél.

(*Útmutatás.* Elég azt az esetet vizsgálni, amikor E *vagy* F végtelen, és ekkor azt kell kihasználni, hogy a számosságaritmetika alaptétele szerint $E \cup F$ (illetve $E \times F$) ekvipotens az E és F közül nagyobb-egyenlő számosságú halmazzal; és ugyanez állítható az E' és F' halmazokra is.)

30. Ha E végtelen halmaz, akkor az E halmaz E-vel ekvipotens részhalmazainak halmaza ekvipotens $\mathscr{P}(E)$-vel.

(*Útmutatás.* Legyen $\mathbf{A}$ az E halmaz E-vel ekvipotens részhalmazainak halmaza, és legyen $\mathbf{B}$ az E halmaz E-nél kisebb számosságú részhalmazainak halmaza. Ekkor $\mathscr{P}(E) = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, és minden $H \in \mathbf{B}$ halmazra $E \setminus H \in \mathbf{A}$ teljesül a **29**. gyakorlat szerint. Továbbá, a

$$\mathbf{B} \to \mathbf{A} \quad ; \quad H \mapsto E \setminus H$$

leképezés injektív, így $\mathbf{B}$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbf{A}$-nál. Ha $\mathbf{A}$ kisebb számosságú volna $\mathscr{P}(E)$-nél, akkor ismét a **29**. gyakorlat szerint $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ kisebb számosságú volna $\mathscr{P}(E)$-nél, ami lehetetlen.)

31. Ha E végtelen halmaz, akkor az $E \to E$ bijekciók halmaza ekvipotens $\mathscr{P}(E)$-vel.

(*Útmutatás.* Világos, hogy $\mathscr{F}(E;E) \subseteq \mathscr{P}(E \times E)$, és a számosságaritmetika alaptétele szerint $\mathscr{P}(E \times E)$ és $\mathscr{P}(E)$ ekvipotensek, így még az összes $E \to E$ függvények halmaza is kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{P}(E)$-nél.

Legyen minden $H \subseteq E$ halmazra $\mathbb{S}_H(E)$ azon $f : E \to E$ bijekciók halmaza, amelyekre $H = \{x|(x \in E) \wedge (f(x) = x)\}$ (vagyis H egyenlő az f *fixpontjainak* halmazával). Ekkor $\bigcup\limits_{H \in \mathscr{P}(E)} \mathbb{S}_H(E)$ egyenlő az $E \to E$ bijekciók halmazával, és az $((\mathbb{S}_H(E))_{H \in \mathscr{P}(E)})$ halmazrendszer diszjunkt.

Megmutatjuk, hogy minden X nem üres halmaz felett létezik olyan R jólrendezés, hogy létezik X-nek legnagyobb eleme R szerint. Ha X véges, akkor minden X feletti jólrendezés ilyen. Tegyük fel, hogy X végtelen, és legyen S tetszőleges jólrendezés X felett. Ha $\mathfrak{a}$ olyan halmaz, hogy $\mathfrak{a} \notin X$, akkor az $X' := X \cup \{\mathfrak{a}\}$ halmaz felett az $S' := S \cup (X \times \{\mathfrak{a}\}) \cup \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\}$ reláció olyan jólrendezés, amely szerint $\mathfrak{a}$ az X' legnagyobb eleme. Az X végtelensége miatt X és X' ekvipotensek (**21**. gyakorlat); legyen $f : X \to X'$ tetszőleges bijekció. Ekkor az

$$R := \{(x_1, x_2) \in X \times X | (f(x_1), f(x_2)) \in S'\}$$

reláció olyan jólrendezés X felett, amely szerint $f^{-1}(\mathfrak{a})$ az X legnagyobb eleme.

Bebizonyítjuk, hogy minden X nem egy elemű halmazhoz létezik olyan $f : X \to X$ bijekció, amelyre minden $x \in X$ esetén $f(x) \neq x$ teljesül. Ez nyilvánvalóan igaz $X = \emptyset$ esetén, ezért legyen $X \neq \emptyset$. Legyen $\leq$ olyan jólrendezés X felett, amely szerint létezik X-nek legnagyobb eleme. Jelölje x_{min} (illetve x_{max}) az X halmaz $\leq$ szerinti legkisebb (illetve legnagyobb) elemét. Legyen $f : X \to X$ az a függvény, amelyre $f(x_{max}) = x_{min}$, és minden $x \in X \setminus \{x_{max}\}$ esetén $f(x)$ az $\{x'|(x' \in X) \wedge (x < x')\}$ halmaz legkisebb eleme $\leq$ szerint. Ekkor f olyan bijekció, amelynek létezését állítottuk.

Megmutatjuk, hogy ha $H \subseteq E$ és $E \setminus H$ nem egy elemű halmaz, akkor $\mathbb{S}_H(E) \neq \emptyset$. Ha $E \setminus H = \emptyset$, azaz $E = H$, akkor $id_E \in \mathbb{S}_E(E)$, ezért feltehető, hogy $E \setminus H \neq \emptyset$ (és persze nem is egy elemű). Az előző bekezdés szerint van olyan $g : E \setminus H \to E \setminus H$ bijekció, amelyre minden $x \in E \setminus H$ esetén $g(x) \neq x$. Ekkor az

$$E \to E \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{ha } x \in E \setminus H \\ x & \text{ha } x \in H \end{cases}$$

leképezés olyan bijekció, amely eleme $\mathbb{S}_H(E)$-nek. Megjegyezzük, hogy ha $E \setminus H$ éppen egy elemű, akkor nyilvánvalóan $\mathbb{S}_H(E) = \emptyset$.

A bizonyítás utolsó lépéseként jelölje $\mathbf{A}$ azon $H \subseteq E$ halmazok halmazát, amelyekre $E \setminus H$ nem egy elemű. Legyen továbbá $\mathbf{B} := \mathscr{P}(E) \setminus \mathbf{A}$. Az előzőek alapján, ha $H \in \mathbf{A}$, akkor $\mathbb{S}_H(E) \neq \emptyset$, ugyanakkor $H \in \mathbf{B}$ esetén $\mathbb{S}_H(E) = \emptyset$. Ezért $\bigcup\limits_{H \in \mathscr{P}(E)} \mathbb{S}_H(E) = \bigcup\limits_{H \in \mathbf{A}} \mathbb{S}_H(E)$, így $\mathbf{A}$ kisebb-egyenlő számosságú az $E \to E$ bijekciók halmazánál. Ha $H \in \mathbf{B}$, akkor $E \setminus H$ egy elemű halmaz, ezért $\mathbf{B}$ ekvipotens E-vel, vagyis a Cantor-tétel szerint kisebb számosságú $\mathscr{P}(E)$-nél. De $\mathscr{P}(E) = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, ezért a **29**. gyakorlat alapján $\mathbf{A}$ nem lehet kisebb számosságú $\mathscr{P}(E)$-nél; tehát

$\mathbf{A}$ és $\mathscr{P}(E)$ ekvipotensek. Ilymódon $\mathscr{P}(E)$ kisebb-egyenlő számosságú az $E \to E$ bijekciók halmazánál.

A bizonyítás befejezéséhez elegendő a Schröder-Bernstein tételre hivatkozni.)

32. Minden E és F halmazra jelölje $\mathbb{I}(E;F)$ (illetve $\mathbb{S}(E;F)$) az $E \to F$ injekciók (illetve szürjekciók) halmazát, továbbá legyen $\Phi(E;F)$ az $E \rightarrowtail F$ függvények halmaza.

a) Ha E és F végtelen halmazok, és F kisebb-egyenlő számosságú E-nél, akkor az $\mathbb{S}(E;F)$, $\mathscr{F}(E;F)$, $\Phi(E;F)$ és $\mathscr{P}(E)$ halmazok ekvipotensek.

b) Ha E és F végtelen halmazok, és E kisebb-egyenlő számosságú F-nél, akkor az $\mathbb{I}(E;F)$, $\mathscr{F}(E;F)$ és $\Phi(E;F)$ függvényhalmazok ekvipotensek az F halmaz E-vel ekvipotens részhalmazainak halmazával.

(*Útmutatás.* a) Világos, hogy $\Phi(E;F) \subseteq \mathscr{P}(E \times F)$ és a hipotézis alapján $E \times F$ kisebb-egyenlő számosságú $E \times E$-nél, ezért a számosságaritmetika alaptétele szerint $\Phi(E;F)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{P}(E)$-nél. Ugyanakkor $\mathbb{S}(E;F) \subseteq \mathscr{F}(E;F) \subseteq \Phi(E;F)$, így a Schröder-Bernstein tételt alkalmazva kapjuk, hogy az a) bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $\mathscr{P}(E)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{S}(E;F)$-nél (feltéve, hogy E és F végtelen halmazok, és F kisebb-egyenlő számosságú E-nél).

Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{P}(E)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{F}(E;F)$-nél, hiszen $\mathscr{P}(E)$ és $\mathscr{F}(E;\{0,1\})$ ekvipotensek, és $\{0,1\}$ kisebb-egyenlő számosságú F-nél (ti. F végtelen). Ezért az a) bizonyításának befejezéséhez elég azt megmutatni, hogy $\mathscr{F}(E;F)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{S}(E;F)$-nél. Ehhez először megjegyezzük, hogy

$$\mathscr{F}(E;F) = \bigcup_{H \in \mathscr{P}(F)} \mathbb{S}(E;H),$$

és minden $H \in \mathscr{P}(F)$ elemre $\mathbb{S}(E;H)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{F}(E;F)$-nél, ezért $\mathscr{F}(E;F)$ kisebb-egyenlő számosságú a $\mathscr{P}(F) \times \mathbb{S}(E;F)$ halmaznál. Ha most $\mathbf{S}(F)$ jelöli az $F \to F$ bijekciók halmazát, és $g : E \to F$ rögzített szürjekció, akkor az

$$\mathbf{S}(F) \to \mathbb{S}(E;F) \quad ; \quad f \mapsto f \circ g$$

leképezés injekció, tehát $\mathbf{S}(F)$ kisebb-egyenlő számosságú a $\mathbb{S}(E;F)$ halmaznál. A **31**. gyakorlat szerint $\mathbf{S}(F)$ ekvipotens $\mathscr{P}(F)$-fel, mert F végtelen. Ebből következik, hogy $\mathscr{F}(E;F)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{S}(E;F) \times \mathbb{S}(E;F)$-nál, ami viszont a számosságaritmetika alaptétele szerint ekvipotens $\mathbb{S}(E;F)$-vel.

b) Legyen $\mathbf{A}$ az F halmaz E-vel ekvipotens részhalmazainak halmaza. Az

$$\mathbb{I}(E;F) \to \mathbf{A} \quad ; \quad f \mapsto Im(f)$$

függvény szürjektív, ezért $\mathbf{A}$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{I}(E;F)$-nél. Ugyanakkor $\mathbb{I}(E;F) \subseteq \mathscr{F}(E;F) \subseteq \Phi(E;F)$, így a Schröder-Bernstein tétel alapján a b) bizonyításához elegendő azt megmutatni, hogy $\Phi(E;F)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbf{A}$-nál.

Ha $f \in \Phi(E;F)$, akkor $f \subseteq E \times Im(f)$, és $Im(f)$ az F-nek E-nél kisebb-egyenlő számosságú részhalmaza, tehát van olyan $H \in \mathbf{A}$, amelyre $f \subseteq E \times H$. Másként

fogalmazva: ez azt jelenti, hogy $\Phi(E;F) \subseteq \bigcup_{H\in\mathbf{A}} \mathscr{P}(E\times H)$. Ha $H \in \mathbf{A}$, akkor a számosságaritmetika alaptétele szerint $\mathscr{P}(E\times H)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{P}(E)$-nél, ezért $\Phi(E;F)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbf{A}\times\mathscr{P}(E)$-nél. Ha $g : E \to F$ rögzített injekció, akkor a

$$\mathscr{P}(E) \to \mathbf{A} \quad ; \quad H \mapsto g\langle H\rangle$$

leképezés injekció, tehát $\mathbf{A}\times\mathscr{P}(E)$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$-nál, ami a számosságaritmetika alaptétele szerint ekvipotens $\mathbf{A}$-val.)

33. Ha E végtelen halmaz, akkor az E feletti jólrendezések halmaza ekvipotens $\mathscr{P}(E)$-vel.

(*Útmutatás.* Nyilvánvaló, hogy az E feletti relációk halmaza kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{P}(E\times E)$-nél, tehát a számosságaritmetika alaptétele szerint kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{P}(E)$-nél.

Megfordítva; legyen R rögzített jólrendezés E felett, ami a Zermelo-féle jólrendezési tétel szerint létezik. Ha $f : E \to E$ bijekció, akkor az

$$f_*(R) := \{(x_1,x_2)\in E\times E|(f(x_1),f(x_2))\in R\}$$

reláció szintén jólrendezés E felett, méghozzá olyan, hogy f izomorfizmus az (E,R) és $(E,f_*(R))$ jólrendezett halmazok között. Nyilvánvaló, hogy ha f és g mindketten $E\to E$ bijekciók, akkor a $g^{-1}\circ f$ függvény izomorfizmus az $(E,f_*(R))$ és $(E,g_*(R))$ jólrendezett halmazok között, így a 2. **52**. gyakorlat szerint $g^{-1}\circ f = id_E$, vagyis $f = g$. Ez azt jelenti, hogy ha $\mathbf{S}(E)$ jelöli az $E\to E$ bijekciók halmazát, és $\mathbf{W}(E)$ jelöli az E feletti jólrendezések halmazát, akkor az

$$\mathbf{S}(E) \to \mathbf{W}(E) \quad ; \quad f \mapsto f_*(R)$$

leképezés *injekció*, vagyis $\mathbf{S}(E)$ kisebb-egyenlő számosságú az E feletti jólrendezések halmazánál. Ezért a **31**. gyakorlat szerint $\mathscr{P}(E)$ kisebb-egyenlő számosságú az E feletti jólrendezések halmazánál.

A bizonyítást ismét a Schröder-Bernstein tételre hivatkozással fejezzük be.)

34. Az E halmaz pontosan akkor végtelen, ha minden $f : E \to E$ függvényhez létezik olyan $S \subseteq E$ halmaz, hogy $S \neq \emptyset$, $S \neq E$ és $f\langle S\rangle \subseteq S$ (amit úgy is kifejezhetünk, hogy létezik f-hez nemtriviális *invariáns részhalmaza* E-nek).

(*Útmutatás.* Minden $f : E \to E$ függvényre és $\mathfrak{a} \in E$ elemre jelölje $\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}$ azt az iterációval meghatározott, E-ben haladó sorozatot, amelyre $\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(0) = \mathfrak{a}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(n^+) = f(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(n))$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy ha $f : E \to E$ függvény és $\mathfrak{a} \in E$, akkor $Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}) \subseteq E$ olyan halmaz, hogy $f\langle Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}})\rangle \subseteq Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}})$, vagyis az $Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}})$ halmaz f-invariáns.

Először megmutatjuk, hogy ha E olyan halmaz, hogy létezik olyan $f : E \to E$ szürjekció, amelyre valamely $\mathfrak{a} \in E$ pontra $E = Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}})$ teljesül, akkor E *véges.* Ekkor ugyanis

$$\mathfrak{a} \in E = Im(f) = f\langle E\rangle = f\langle Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}})\rangle,$$

tehát van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathfrak{a} = f(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(n)) = \boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(n^+)$, vagyis az $\{m|(m \in \mathbb{N}^*) \wedge (\mathfrak{a} = \boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(m))\}$ halmaz nem üres. Legyen $\mathfrak{n}$ a legkisebb eleme ennek a

halmaznak. Minden $m \in \mathbb{N}$ számhoz egyértelműen léteznek olyan $q, p \in \mathbb{N}$ számok, hogy $m = p \cdot \mathfrak{n} + q$ és $q < \mathfrak{n}$; így $\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(m) = \boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}(q)$. ez azt jelenti, hogy $E = Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}) = \boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}}\langle] \leftarrow, \mathfrak{n}[\rangle$, tehát E véges halmaz.

Ha E végtelen halmaz és $f : E \to E$ tetszőleges függvény, akkor
- $Im(f) = E$ esetén az előző bekezdés alapján minden $\mathfrak{a} \in E$ pontra $E \neq Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}})$; és ekkor $S := Im(\boldsymbol{s}_{f,\mathfrak{a}})$ olyan, hogy $S \neq E$, $S \neq \emptyset$ és $f\langle S\rangle \subseteq S$;
- $Im(f) \neq E$ esetén $S := Im(f)$ olyan, hogy $S \neq E$, $S \neq \emptyset$ és $f\langle S\rangle \subseteq S$.

Ha viszont E véges halmaz, akkor létezik olyan $f : E \to E$ függvény, hogy minden $S \subseteq E$ halmazra, ha $S \neq E$ és $S \neq \emptyset$, akkor $f\langle S\rangle \subseteq S$ *nem teljesül.* Ez az E halmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen belátható.)

35. (*Az egész számok értelmezése.*) Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon bevezetjük a következő relációt:

$$R := \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid m + n' = m' + n\}.$$

Ekkor R ekvivalencia az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmaz felett; legyen $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ és értelmezzük a következő leképezést:

$$j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad ; \quad n \mapsto R\langle\{(n,0)\}\rangle,$$

vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $j(n)$ az $(n,0)$ elem R szerinti ekvivalencia-osztálya $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-ben. Mutassuk meg, hogy a j függvény injektív, és egyértelműen léteznek $\mathbb{Z}$ felett olyan s és p műveletek, amelyekre:
- s kommutatív csoportművelet, és minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra:

$$s(j(m), j(n)) = j(m + n),$$

- p asszociatív, kommutatív, neutráliselemes művelet, amely disztributív az s műveletre nézve, és minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra:

$$p(j(m), j(n)) = j(m \cdot n).$$

Igazoljuk, hogy minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}$ esetén léteznek olyan $m, n \in \mathbb{N}$ számok, hogy $\mathfrak{a} = j(m) - j(n)$, ahol $-$ az s művelet szerinti kivonást jelöli. Mutassuk meg továbbá, hogy az

$$S := \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | (\exists (m,n) \in \mathfrak{a})(\exists (m',n') \in \mathfrak{b}) : m + n' \leq m' + n\}$$

reláció *lineáris rendezés* $\mathbb{Z}$ felett, és a $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ függvény *szigorúan rendezéstartó* az $\mathbb{N}$ feletti természetes rendezésre és S-re nézve (vagyis minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $m \leq n$ pontosan akkor teljesül $\mathbb{N}$-ben, ha $(j(m), j(n)) \in S$). Vizsgáljuk meg, hogy ez a $\mathbb{Z}$ feletti S rendezés milyen kapcsolatban van a $\mathbb{Z}$ halmazon bevezetett s és p műveletekkel!

A $\mathbb{Z}$ halmazt az *egész számok* halmazának nevezzük; a $\mathbb{Z}$ elemei az *egész számok.* A j injekció által a természetes számok halmazát *azonosítjuk* a $j\langle\mathbb{N}\rangle \subseteq \mathbb{Z}$ halmazzal, és a jelölések egyszerűsítése céljából azt írjuk, hogy $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. A $\mathbb{Z}$ halmazon bevezetett s műveletet a $+$, és a p műveletet a $\cdot$ infix szimbólummal jelöljük. Az additív

neutrális elemet $\mathbb{Z}$-ben 0, és a multiplikatív neutrális elemet $\mathbb{Z}$-ben 1 jelöli. Továbbá, a $\mathbb{Z}$ halmaz feletti S rendezést is a $\leq$ infix szimbólummal jelöljük, és a $\mathbb{Z}$ feletti *természetes rendezésnek* nevezzük. A fentiek alapján ez a jelölés-rendszer nem vezet félreértésre.

36. (*A racionális számok értelmezése.*) A $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ halmazon bevezetjük a következő relációt:

$$R := \{((m,n),(m',n')) \in (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \mid m \cdot n' = m' \cdot n\}.$$

Ekkor R ekvivalencia a $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ halmaz felett; legyen $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/R$ és értelmezzük a következő leképezést:

$$j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad ; \quad n \mapsto R\langle\{(n,1)\}\rangle,$$

vagyis minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $j(n)$ az $(n,1)$ elem R szerinti ekvivalencia-osztálya $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$-ben. Mutassuk meg, hogy a j függvény injektív, és egyértelműen léteznek $\mathbb{Q}$ felett olyan s és p műveletek, amelyekre:

- s kommutatív csoportművelet, és minden $m, n \in \mathbb{Z}$ számra:

$$s(j(m), j(n)) = j(m+n),$$

- p asszociatív, kommutatív, neutráliselemes művelet, amely disztributív az s műveletre nézve, és minden $m, n \in \mathbb{Z}$ számra:

$$p(j(m), j(n)) = j(m \cdot n),$$

- a $\mathbb{Q}$ halmaz minden olyan elemének létezik inverze a p művelet szerint, amely különbözik az s művelet szerinti neutrális elemtől.

Igazoljuk, hogy minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{Q}$ esetén léteznek olyan $m, n \in \mathbb{Z}$ számok, hogy $n > 0$ és $\mathfrak{a} = j(m)/j(n)$, ahol / a p művelet szerinti osztást jelöli. Mutassuk meg továbbá, hogy az

$$S := \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} | (\exists (m,n) \in \mathfrak{a})(\exists (m',n') \in \mathfrak{b}) : \\ (n > 0) \wedge (n' > 0) \wedge (m \cdot n' \leq m' \cdot n)\}$$

reláció *lineáris rendezés* $\mathbb{Q}$ felett, és a $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ függvény *szigorúan rendezéstartó* a $\mathbb{Z}$ feletti természetes rendezésre és S-re nézve (vagyis minden $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén $m \leq n$ pontosan akkor teljesül $\mathbb{Z}$-ben, ha $(j(m), j(n)) \in S$). Vizsgáljuk meg, hogy ez a $\mathbb{Q}$ feletti S rendezés milyen kapcsolatban van a $\mathbb{Q}$ halmazon bevezetett s és p műveletekkel!

A $\mathbb{Q}$ halmazt a *racionális számok* halmazának nevezzük; a $\mathbb{Q}$ elemei az *racionális számok*. A j injekció által az egész számok halmazát *azonosítjuk* a $j\langle\mathbb{Z}\rangle \subseteq \mathbb{Q}$ halmazzal, és a jelölések egyszerűsítése céljából azt írjuk, hogy $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. A $\mathbb{Q}$ halmazon bevezetett s műveletet a $+$, és a p műveletet a $\cdot$ infix szimbólummal jelöljük. Az additív neutrális elemet $\mathbb{Q}$-ban 0, és a multiplikatív neutrális elemet $\mathbb{Q}$-ban 1 jelöli. Továbbá, a $\mathbb{Q}$ halmaz feletti S rendezést is a $\leq$ infix szimbólummal

jelöljük, és a $\mathbb{Q}$ feletti *természetes rendezésnek* nevezzük. A fentiek alapján ez a jelölés-rendszer nem vezet félreértésre.

37. Azt mondjuk, hogy az α halmaz *rendszám*, ha teljesülnek rá a következők:

(I) Az α halmaz *tranzitív*, vagyis minden $x \in \alpha$ elemre $x \subseteq \alpha$.

(II) Minden $x \in \alpha$ elemre $x \notin x$.

(III) Az $\mathbf{E}_\alpha := \{(x, y) \in \alpha \times \alpha | (x = y) \vee (x \in y)\}$ reláció *jólrendezés* az α halmaz felett.

Az "α *rendszám*" kijelentést az $Ord(\alpha)$ szimbólummal jelöljük. A rendszámokat általában görög kisbetűkkel jelöljük. A kiválasztási axióma alkalmazásal nélkül bizonyítsuk be a következő állításokat!

a) Minden természetes szám rendszám, és az $\mathbb{N}$ halmaz is rendszám. (Az $\mathbb{N}$ halmazt, mint rendszámot, az ω betűvel szokás jelölni.)

b) Minden α rendszámra $\alpha \notin \alpha$ teljesül.

c) Ha α rendszám, és $\beta \subseteq \alpha$ olyan tranzitív halmaz, hogy $\beta \neq \alpha$, akkor $\beta \in \alpha$.

d) Ha α és β rendszámok, akkor

$$(\beta \in \alpha) \Leftrightarrow ((\beta \subseteq \alpha) \wedge (\beta \neq \alpha)),$$
$$(\beta \subseteq \alpha) \Leftrightarrow ((\beta \in \alpha) \vee (\beta = \alpha))$$

teljesül.

e) Ha α és β rendszámok, akkor a "$\beta \in \alpha$", "$\alpha \in \beta$" és "$\beta = \alpha$" kijelentések közül pontosan az egyik teljesül. Ha α és β rendszámok, akkor $\beta \subseteq \alpha$ vagy $\alpha \subseteq \beta$ teljesül.

f) Ha α rendszám, akkor az α minden eleme is rendszám.

g) Ha H tetszőleges olyan halmaz, amelynek minden eleme rendszám, akkor az

$$\mathbf{E}_H := \{(x, y) \in H \times H | (x = y) \vee (x \in y)\}$$

reláció *jólrendezés* a H halmaz felett. Ha α és β rendszámok, akkor az $\alpha \subseteq \beta$ kijelentés helyett azt írjuk, hogy $\alpha \leq \beta$. Továbbá; ha α és β rendszámok, akkor az $(\alpha \subseteq \beta) \wedge (\alpha \neq \beta)$ (vagy az ezzel ekvivalens $\alpha \in \beta$) kijelentés helyett azt írjuk, hogy $\alpha < \beta$. Figyeljük meg, hogy minden α rendszámra $\mathbf{E}_{\{\alpha\}} = \mathbf{E}_\alpha$!

h) Ha α rendszám, akkor az α^+ szukcesszor is rendszám.

i) Ha α rendszám, akkor nem létezik olyan β rendszám, amelyre $\alpha < \beta < \alpha^+$ teljesülne.

j) Ha α és β rendszámok, akkor $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^+ = \beta^+$.

k) Azt mondjuk, hogy az α rendszám *elsőfajú*, ha $\alpha = 0$ vagy létezik olyan β rendszám, hogy $\alpha = \beta^+$ (ez utóbbi esetben azt mondjuk, hogy α *szukcesszor*). A nem elsőfajú rendszámokat *limeszrendszámoknak* nevezzük, és az "α limeszrendszám" kijelentést a $Lim(\alpha)$ szimbólummal rövidítjük. Igazoljuk, hogy az

"α elsőfajú rendszám és minden α-nál kisebb rendszám elsőfajú"

kijelentés *kollektivizáló az α változóban*, és ha $\mathcal{N}(\alpha)$ jelöli ezt a kijelentést, akkor

$$\mathbb{N} = \{\alpha | \mathcal{N}(\alpha\}$$

teljesül. Az ω rendszám a legkisebb limeszrendszám.

l) Az "α rendszám" kijelentés *nem kollektivizáló* az α változóban, tehát *nem létezik* az összes rendszámok halmaza.

m) Ha H rendszámok tetszőleges halmaza, akkor $\bigcup H$ is rendszám, és erre teljesülnek az alábbiak:

- minden $\alpha \in H$ rendszámra $\alpha \leq \bigcup H$;

- minden β rendszámra, ha minden $\alpha \in H$ esetén $\alpha \leq \beta$, akkor $\bigcup H \leq \beta$.

(Ezért az $\bigcup H$ halmazt a H rendszám-halmaz *szuprémumának* nevezzük.)

n) Ha H rendszámok olyan nem üres halmaza, amelynek nincs legnagyobb eleme (tehát minden $\alpha \in H$ esetén van olyan $\beta \in H$, hogy $\alpha < \beta$), akkor $\bigcup H$ limeszrendszám.

o) Ha az α rendszám szukcesszor, akkor $\alpha = (\bigcup \alpha)^+$. Ha α limeszrendszám, akkor $\alpha = \bigcup \alpha$.

p) Ha α és β olyan rendszámok, hogy $\alpha \in \beta$, akkor minden $H \subseteq \alpha$ halmazra a $(H, \mathbf{E}_H)$ és $(\beta, \mathbf{E}_\beta)$ jólrendezett halmazok *nem izomorfak.*

q) Ha α és β olyan rendszámok, hogy $\alpha \neq \beta$, akkor az $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ és $(\beta, \mathbf{E}_\beta)$ jólrendezett halmazok *nem izomorfak.*

r) Ha α rendszám, akkor *egyetlen* izomorfizmus létezik az $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ és $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ jólrendezett halmazok között (és persze az egyenlő az id_α függvénnyel).

(*Útmutatás.* e) Könnyen belátható, hogy ha α és β rendszámok, akkor $\alpha \cap \beta$ szintén rendszám, így az $\alpha \cap \beta \neq \alpha$ és $\alpha \cap \beta \neq \beta$ kijelentések együttes teljesülése a c) alapján azt jelentené, hogy $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, ami ellentmond b)-nek.

g) Legyen H rendszámok halmaza, és legyen $\beta \in H$ rögzített elem. Ha $\beta \cap H \neq \emptyset$, akkor van olyan $\alpha \in \beta \cap H$, amely az $\mathbf{E}_\beta$ jórendezés szerint a legkisebb; ekkor az e) alkalmazásával könnyen adódik, hogy α a H legkisebb eleme az $\mathbf{E}_H$ rendezés szerint. Ha $\beta \cap H = \emptyset$, akkor ismét az e) alkalmazásával kapjuk, hogy β a H legkisebb eleme az $\mathbf{E}_H$ rendezés szerint.

k) Megmutatjuk, hogy $(\forall \alpha)(\mathcal{N}(\alpha) \Rightarrow \alpha \in \omega)$ igaz. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy α olyan halmaz, amelyre $\mathcal{N}(\alpha)$ teljesül, de $\alpha \notin \omega$ (azaz $\alpha \notin \mathbb{N}$). Legyen

$$H := \{\beta | \mathcal{N}(\beta) \wedge (\beta \leq \alpha) \wedge (\beta \notin \omega)\}.$$

Ekkor H minden eleme olyan rendszám, amely részhalmaza az α rendszámnak, tehát $H \subseteq \alpha^+$. Az $(\alpha^+, \mathbf{E}_{\alpha^+})$ pár jólrendezett halmaz, ezért létezik H-nak legkisebb eleme a $\mathbf{E}_{\alpha^+}$ rendezés szerint; legyen ez β. Világos, hogy $0 \in \omega$, ezért $\mathcal{N}(\beta)$ miatt $\beta \neq 0$, így van olyan γ rendszám, amelyre $\beta = \gamma^+$, hiszen β elsőfajú rendszám. Ekkor $\gamma < \beta$, tehát $\mathcal{N}(\beta)$ miatt γ is elsőfajú rendszám. Ha egy rendszám kisebb γ-nál, akkor β-nál is kisebb, tehát $\mathcal{N}(\beta)$ alapján elsőfajú. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{N}(\gamma)$ teljesül. Ugyanakkor a β minimalitási tulajdonsága és $\gamma < \beta$ miatt $\gamma \notin H$, tehát $\gamma \in \omega = \mathbb{N}$. Ekkor azonban $\beta = \gamma^+ \in \mathbb{N} = \omega$, ami ellentmond annak, hogy $\beta \notin \omega$.

Ez azt jelenti, hogy $(\forall \alpha)(\mathcal{N}(\alpha) \Rightarrow \alpha \in \omega)$ tétel, tehát a részhalmaz-axióma szerint az $\mathcal{N}(\alpha)$ kijelentés kollektivizáló az α változóban, sőt az is igaz, hogy $\{\alpha | \mathcal{N}(\alpha)\} \subseteq \omega = \mathbb{N}$. Másfelől, a teljes indukció tételének alkalmazásával könnyen belátható, hogy $(\forall n)((n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{N}(n))$ igaz, így $\mathbb{N} \subseteq \{\alpha | \mathcal{N}(\alpha)\}$ is teljesül.

l) Ha az "α rendszám" (vagyis $Ord(\alpha)$) kijelentés kollektivizáló volna az α változóban, akkor elkészíthetnénk az $\mathbf{On} := \{\alpha | Ord(\alpha)\}$ halmazt, amelyre könnyen igazolható, hogy szintén rendszám, vagyis az $\mathbf{On}$ halmaz definíciója szerint $\mathbf{On} \in \mathbf{On}$, ami viszont ellentmond b)-nek.

p) Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy α és β olyan rendszámok, és $H \subseteq \alpha$ olyan halmaz, amelyekre teljesül az, hogy $\alpha \in \beta$ és a $(H, \mathbf{E}_H)$ és $(\beta, \mathbf{E}_\beta)$ jólrendezett halmazok *izomorfak*; legyen $h : \beta \to H$ izomorfizmus. Ekkor $h : \beta \to \beta$ olyan függvény, amely szigorúan monoton növő az $\mathbf{E}_\beta$ rendezés szerint, továbbá $h(\alpha) \in Im(h) = H \subseteq \alpha$, vagyis $h(\alpha) \in \alpha$, azaz $h(\alpha) < \alpha$ az $\mathbf{E}_\beta$ rendezés szerint. Ugyanakkor az $id_\beta : \beta \to \beta$ leképezés is szigorúan monoton növő az $\mathbf{E}_\beta$ rendezés szerint, és $Im(id_\beta) = \beta$ szegmense a $(\beta, \mathbf{E}_\beta)$ jólrendezett halmaznak. Ezért a 2. **51**. gyakorlat szerint minden $\gamma \in \beta$ elemre $\gamma = id_\beta(\gamma) \leq h(\gamma)$, tehát $\alpha \leq h(\alpha)$, ami ellentmondás.

r) Elegendő a 2. **52**. gyakorlatban megfogalmazott állítást alkalmazni.)

38. (*A transzfinit indukció elve.*) Legyen $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz és $\mathfrak{S}$ az $(E, \leq)$ szegmenseinek olyan halmaza, amelyre teljesülnek a következők:

a) Minden $\mathfrak{S}$-ben haladó $(S_i)_{i \in I}$ rendszerre $\bigcup\limits_{i \in I} S_i \in \mathfrak{S}$.

b) Minden $x \in E$ elemre, ha $]\leftarrow, x[\in \mathfrak{S}$, akkor $]\leftarrow, x] \in \mathfrak{S}$.

Ekkor $\mathfrak{S}$ *egyenlő* az $(E, \leq)$ *összes* szegmenseinek halmazával, tehát az is igaz, hogy $E \in \mathfrak{S}$.

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\mathfrak{S}$ nem egyenlő az $(E, \leq)$ összes szegmenseinek halmazával. Tudjuk, hogy az $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz összes szegmenseinek halmaza felett a tartalmazás-reláció jólrendezés (2. **49**. gyakorlat), így az indirekt feltevés alapján van olyan S szegmense $(E, \leq)$-nek, amelyre $S \notin \mathfrak{S}$, és amely tartalmazás tekintetében legkisebb ilyen tulajdonságú szegmense $(E, \leq)$-nek. Ha S-nek nincs legnagyobb eleme a $\leq$ rendezés szerint, akkor $S = \bigcup\limits_{x \in S}]\leftarrow, x[$, ugyanakkor minden $x \in S$ elemre $]\leftarrow, x[$ olyan szegmense $(E, \leq)$-nek, amely S-nek valódi részhalmaza, tehát az S minimalitása miatt $]\leftarrow, x[\in \mathfrak{S}$. Ekkor azonban az a) alapján $S \in \mathfrak{S}$ is teljesülne, ami nem igaz; ezért S-nek létezik legnagyobb eleme; legyen ez x. Tehát $S =]\leftarrow, x]$ teljesül, ugyanakkor $]\leftarrow, x[$ olyan szegmense $(E, \leq)$-nek, amely S-nek valódi részhalmaza, így $]\leftarrow, x[\in \mathfrak{S}$. Ebből viszont a b) alapján következik, hogy $S =]\leftarrow, x] \in \mathfrak{S}$, ami ellentmondás.)

39. Ha $\mathcal{A}$ kijelentés, x változó és T halmaz, akkor $(T|x)\mathcal{A}$ jelöli azt a kijelentést, amit úgy nyerünk, hogy $\mathcal{A}$-ban az x minden előfordulásának helyére T-t helyettesítünk. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ kijelentés *egyértelmű az x változóban*, ha a

$$(\forall z)(\forall z')(((z|x)\mathcal{A}) \wedge ((z'|x)\mathcal{A})) \Rightarrow (z = z'))$$

kijelentés tétel, ahol a z és z' változók nem szerepelnek $\mathcal{A}$-ban. A halmazelmélet új, nevezetes axiómája a következő:

A helyettesítés axiómája. Ha $\mathcal{A}$ kijelentés, x, y változók, és $\mathcal{A}$ az y változóban egyértelmű, akkor minden olyan E halmazra, amelyben x és y nem szerepel, a

$$(\exists x)((x \in E) \wedge \mathcal{A})$$

kijelentés kollektivizáló az y változóban, tehát létezik olyan F halmaz, hogy minden y-ra az $y \in F$ kijelentés ekvivalens azzal, hogy $(\exists x)((x \in E) \wedge \mathcal{A})$.

Mutassuk meg, hogy a kiválasztási axióma helyett a helyettesítés axiómáját felvéve igaz az, hogy ha $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz, akkor egyértelműen létezik olyan α rendszám, amelyre az $(E, \leq)$ és $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ jólrendezett halmazok *izomorfak*.

(*Útmutatás.* A **37**. gyakorlat q) pontja szerint az α unicitása nyilvánvaló, és persze ahhoz nem szükséges a helyettesítés axiómája. Az α létezésének bizonyításához jelölje $\mathfrak{S}$ az $(E, \leq)$ jólrendezett halmaz azon S szegmenseinek halmazát, amelyekhez létezik olyan α rendszám, hogy az $(S, \leq_S)$ és $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ jólrendezett halmazok izomorfak. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{S}$-re teljesülnek a **38**. gyakorlat a) és b) feltételei, ezért $E \in \mathfrak{S}$, ami az állítást bizonyítja.

Legyen $(S_i)_{i \in I}$ tetszőleges $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer, és legyen $S := \bigcup_{i \in I} S_i$. Minden $i \in I$ esetén jelölje $\leq_i$ a $\leq$ rendezés S_i-re vett leszűkítését. Legyen $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a következő kijelentés rövidítése:

$$(\exists H)(\exists R)(\mathbf{x} = (H, R) \wedge \text{"}(H, R) \text{ jólrendezett halmaz"}) \wedge Ord(\mathbf{y}) \wedge$$
$$\text{"az } \mathbf{x} \text{ és } (\mathbf{y}, \mathbf{E}_\mathbf{y}) \text{ jólrendezett halmazok izomorfak"}.$$

A **37**. gyakorlat q) pontja szerint az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kijelentés az $\mathbf{y}$ változóban egyértelmű, így a helyettesítés axiómája alapján a $\mathscr{H} := \{(S_i, \leq_i) | i \in I\}$ halmaz olyan, hogy a $(\exists \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathscr{H}) \wedge \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ kijelentés az $\mathbf{y}$ változóban kollektivizáló, tehát az

$$\{\mathbf{y} | (\exists \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathscr{H}) \wedge \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\}$$

halmaz rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $\mathbf{y}$-ra: $\mathbf{y}$ pontosan akkor eleme neki, ha $(\exists \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathscr{H}) \wedge \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ teljesül. A $\mathscr{H}$ halmaz értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy

$$(\exists \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathscr{H}) \wedge \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\} \Leftrightarrow (\exists i)((i \in I) \wedge \mathcal{A}((S_i, \leq_i), \mathbf{y})),$$

ahol a $((S_i, \leq_i) | \mathbf{x}) \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kifejezést a szokásosabb $\mathcal{A}((S_i, \leq_i), \mathbf{y})$ kifejezéssel rövidítettük. Tehát jól értelmezett az

$$A := \{\mathbf{y} | (\exists i)((i \in I) \wedge \mathcal{A}((S_i, \leq_i), \mathbf{y}))\}$$

rendszám-halmaz. (A helyettesítés axiómájára kizárólag azért volt szükség, hogy ezt a halmazt értelmezhessük!) A **37**. gyakorlat m) pontja szerint képezhető az $\alpha := sup(A)$ rendszám; megmutatjuk, hogy az $(S, \leq_S)$ és $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ rendezett halmazok izomorfak. Ehhez minden $i \in I$ esetén legyen E_i azon $f : S_i \to \alpha$ függvények halmaza, amelyekre $Im(f)$ rendszám és f izomorfizmus az $(S_i, \leq_i)$ és $(Im(f), \mathbf{E}_{Im(f)})$ rendezett halmazok között. A részhalmaz-axióma alapján az $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszer jól értelmezett, és ismét a **37**. gyakorlat q) pontja szerint E_i egy elemű halmaz. Ezért a $\prod_{i \in I} E_i$ szorzathalmaz is egy elemű; legyen $(f_i)_{i \in I}$ az egyetlen eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $(f_i)_{i \in I}$ olyan függvényrendszer, hogy minden $i \in I$ indexre $f_i : S_i \to \alpha$ szigorúan monoton növő a $\leq_i$ és $\mathbf{E}_\alpha$ rendezések szerint, továbbá $Im(f)$ egy α-nál kisebb-egyenlő rendszám. Könnyen

látható, hogy minden $i, j \in I$ esetén $f_i \subseteq f_j$ vagy $f_j \subseteq f_i$ teljesül, ezért jól értelmezett az $f := \bigcup_{i \in I} f_i : S \to \alpha$ függvény, ami izomorfizmus az $(S, \leq_S)$ és $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ rendezett halmazok között. Ezért $S \in \mathfrak{S}$, vagyis $\mathfrak{S}$-re teljesül a **38**. gyakorlat a) feltétele.

Legyen most $x \in E$ olyan, hogy $S :=]\leftarrow, x[\in \mathfrak{S}$. Ekkor létezik egyetlen olyan α rendszám, hogy az $(S, \leq_S)$ és $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ rendezett halmazok izomorfak; legyen $f : S \to \alpha$ izomorfizmus. Értelmezzük azt az $]\leftarrow, x] \to \alpha^+$ függvényt, amely f-nek kiterjesztése, és az x-hez α-t rendeli. Ez a függvény izomorfizmus az $(]\leftarrow, x], \leq_{]\leftarrow, x]})$ és $(\alpha^+, \mathbf{E}_{\alpha^+})$ rendezett halmazok között, így $]\leftarrow, x] \in \mathfrak{S}$, vagyis $\mathfrak{S}$-re teljesül a **38**. gyakorlat b) feltétele is.)

40. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{a}$ halmaz *számosság* (vagy *kardinális szám*), ha $\mathfrak{a}$ olyan rendszám, amely semmilyen nála kisebb rendszámmal nem ekvipotens. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

a) Minden természetes szám számosság, és $\mathbb{N}$ is számosság. A természetes számok éppen a véges számosságok. (A természetes számok halmazát, mint számosságot az $\aleph_0$ szimbólummal jelöljük.)

b) Minden α rendszámhoz létezik egyetlen olyan $\mathfrak{a}$ számosság, hogy α és $\mathfrak{a}$ ekvipotensek.

c) Két számosság pontosan akkor ekvipotens, ha egyenlők.

d) A kiválasztási axiómát a helyettesítés axiómájával kicserélve belátható, hogy ha E olyan halmaz, amely felett létezik jólrendezés (ilyenkor azt mondjuk, hogy E *jólrendezhető*), akkor egyértelműen létezik olyan $\mathfrak{a}$ számosság, hogy E és $\mathfrak{a}$ ekvipotensek. Ha E jólrendezhető halmaz, akkor ebben a halmazelméletben az E halmaz *számosságának* nevezzük és a $Card(E)$ szimbólummal jelöljük azt a számosságot, amely E-vel ekvipotens.

e) A helyettesítés axiómájával bővített halmazelméletben minden halmaznak létezik számossága, és teljesül az, hogy bármely két E és F halmazra $Card(E) = Card(F)$ ekvivalens azzal, hogy az E és F halmazok ekvipotensek.

(*Útmutatás.* b) Legyen α rendszám és $H_\alpha := \{\beta | (\beta \in \alpha^+) \wedge \text{"}\beta \text{ ekvipotens } \alpha\text{-val"}\}$. Ekkor H_α nem üres részhalmaza α^+-nak és $(\alpha^+, \mathbf{E}_{\alpha^+})$ jólrendezett halmaz, tehát H_α-nak létezik legkisebb eleme α^+-ban az $\mathbf{E}_{\alpha^+}$ rendezés szerint. Ez az elem olyan számosság, amelynek a létezését állítjuk.

c) Ha két számosság nem egyenlő, akkor közülük az egyik kisebb rendszám a másiknál, ezért nem lehetnek ekvipotensek.

d) A helyettesítés axiómáját alkalmazva, a **39**. gyakorlat szerint minden E feletti R jólrendezéshez létezik egyetlen olyan α rendszám, hogy az (E, R) és $(\alpha, \mathbf{E}_\alpha)$ rendezett halmazok izomorfak. Ekkor E és α ekvipotensek, ezért a b) alapján létezik olyan számosság, amely E-vel ekvipotens. A c) szerint ez a számosság egyértelműen van meghatározva.

e) A kiválasztási axióma alkalmazásával bizonyítottuk a Zermelo-féle jólrendezési tételt (2. **54**. gyakorlat), tehát azt, hogy minden halmaz jólrendezhető. Ezért elég a d)-re hivatkozni.)

41. (*Számosságaritmetika.*) A következő definíciók és állítások a helyettesítés axiómájával bővített halmazelméletben értelmesek, illetve igazak.

a) Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ számosságok, akkor a következő definíciókat adjuk:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := Card((\{0\} \times \mathfrak{a}) \cup (\{1\} \times \mathfrak{b}));$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := Card(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b});$$
$$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}} := Card(\mathscr{F}(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})).$$

Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ véges számosságok (vagyis természetes számok), akkor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ és $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ megegyeznek az $\mathbb{N}$ halmaz feletti korábban értelmezett összeadás, szorzás és hatványozás műveletek eredményeivel.

b) Legyen $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosságok tetszőleges rendszere. Ekkor definíció szerint:

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := Card(\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \mathfrak{a}_i)),$$

és ezt a számosságot az $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosság-rendszer *összegének* nevezzük; továbbá:

$$\mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mathfrak{a}_i := Card(\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i),$$

és ezt a számosságot az $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosság-rendszer *szorzatának* nevezzük. Ha I véges halmaz és minden $i \in I$ indexre $\mathfrak{a}_i$ véges számosság, akkor $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ és $\mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ megegyezik a **4**. gyakorlatban rekurzívan értelmezett véges összeggel és véges szorzattal.

c) Számosságok között a $\leq$ kapcsolatot ugyanúgy értelmezzük, mint a rendszámok között, ami értelmes, hiszen a számosságok speciális rendszámok. Tehát ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ számosságok, akkor $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ azt jelenti, hogy $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, és $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ azt jelenti, hogy $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$. Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosságok tetszőleges rendszere, akkor definíció szerint:

$$\sup_{i \in I} \mathfrak{a}_i := Card(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i).$$

Ekkor az $\mathfrak{a} := \sup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ számosság olyan, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{a}_i \leq \mathfrak{a}$, továbbá minden $\mathfrak{b}$ számosságra, ha minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{a}_i \leq \mathfrak{b}$, akkor $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ teljesül.

d) Ha E és F olyan halmazok, hogy létezik $E \to F$ *szürjekció*, akkor $Card(F) \leq Card(E)$.

e) Ha $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszer, akkor $Card(\bigcup_{i \in I} E_i) \leq \sum_{i \in I} Card(E_i)$, és ha az $(E_i)_{i \in I}$ halmazrendszer diszjunkt, akkor $Card(\bigcup_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} Card(E_i)$.

f) (*A számosságok összeadásának és szorzásának kommutativitása.*) Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosságok tetszőleges rendszere, J halmaz és $\sigma : J \to I$ bijekció, akkor

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \sum_{j \in J} \mathfrak{a}_{\sigma(j)},$$
$$\mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \mathop{\mathrm{P}}_{j \in J} \mathfrak{a}_{\sigma(j)}$$

teljesül. Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ számosságok, akkor

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$$

teljesül.

g) (*A számosságok összeadásának és szorzásának asszociativitása.*) Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosságok tetszőleges rendszere és $(I_j)_{j \in J}$ az I halmaz partíciója, akkor

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \mathfrak{a}_i,$$
$$\mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \mathop{\mathrm{P}}_{j \in J} \mathop{\mathrm{P}}_{i \in I_j} \mathfrak{a}_j$$

teljesül. Ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ és $\mathfrak{c}$ számosságok, akkor

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}),$$
$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$$

teljesül.

h) (*A számosságok szorzásának disztributivitása a számosságok összegzésére nézve.*) Legyen $(I_j)_{j \in J}$ halmazrendszer és minden $j \in J$ esetén $(\mathfrak{a}_{j,i})_{i \in I_j}$ tetszőleges számosság-rendszer. Ha $I := \prod_{j \in J} I_j$, akkor

$$\mathop{\mathrm{P}}_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \mathfrak{a}_{j,i} = \sum_{f \in I} \mathop{\mathrm{P}}_{j \in J} \mathfrak{a}_{j,f(j)}$$

teljesül. Ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ és $\mathfrak{c}$ számosságok, akkor

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})$$

teljesül.

i) Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosságok tetszőleges rendszere, és J (illetve K) olyan részhalmaza I-nek, hogy minden $i \in I \setminus J$ (illetve $i \in I \setminus K$) esetén $\mathfrak{a}_i = 0$ (illetve $\mathfrak{a}_i = 1$), akkor

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \sum_{i \in J} \mathfrak{a}_i, \quad \mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \mathop{\mathrm{P}}_{i \in K} \mathfrak{a}_i$$

teljesül. Minden $\mathfrak{a}$ számosságra $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a}$ és $\mathfrak{a} \cdot 1 = \mathfrak{a}$.

j) Legyenek $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ számosságok, I olyan halmaz, hogy $Card(I) = \mathfrak{b}$ és minden $i \in I$ esetén legyen $\mathfrak{a}_i := \mathfrak{a}$ és $\mathfrak{c}_i := 1$. Ekkor

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{b} = \sum_{i \in I} \mathfrak{c}_i, \quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mathfrak{a}_i.$$

k) Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ számosságok tetszőleges rendszere, akkor $\mathop{\mathrm{P}}_{i \in I} \mathfrak{a}_i \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{a}_i \neq 0$.

l) Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ számosságok, akkor az $\mathfrak{a}+1=\mathfrak{b}+1$ és $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ kijelentések ekvivalensek. Az $\mathfrak{a}$ számosság pontosan akkor véges, ha $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+1$ teljesül. Az $\mathfrak{a}$ számosság pontosan akkor véges, ha $\mathfrak{a}+1$ véges.

m) Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ számosságok, valamint $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ és $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ számosság-rendszerek, akkor:

$$\mathfrak{a}^{\sum\limits_{i\in I}\mathfrak{b}_i}=\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_i},\qquad \left(\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\mathfrak{a}_i\right)^{\mathfrak{b}}=\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\mathfrak{a}_i{}^{\mathfrak{b}}$$

teljesül. Ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ és $\mathfrak{c}$ számosságok, akkor:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}=\left(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\right)\cdot\left(\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}\right),\quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}=\left(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\right)^{\mathfrak{c}}.$$

n) Ha $\mathfrak{a}$ számosság, akkor $\mathfrak{a}^0=1$, $\mathfrak{a}^1=\mathfrak{a}$, és $\mathfrak{a}\neq 0$ esetén $0^{\mathfrak{a}}=0$. Ha E halmaz, akkor:

$$Card(\mathscr{P}(E))=2^{Card(E)}.$$

o) Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ számosságok, és $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{b}$, akkor *létezik* olyan $\mathfrak{c}$ számosság, hogy $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, azonban $\mathfrak{c}$ nem szükségképpen egyértelmű, tehát az $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$ *számosság-különbség* általában nem értelmezhető.

p) Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ és $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ olyan számosság-rendszerek, hogy minden $i\in I$ indexre teljesül az $\mathfrak{a}_i\leq\mathfrak{b}_i$ egyenlőtlenség, akkor fennállnak a

$$\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i\leq\sum_{i\in I}\mathfrak{b}_i,\qquad \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\mathfrak{a}_i\leq\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\mathfrak{b}_i$$

egyenlőtlenségek.

q) Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ számosságok tetszőleges rendszere, akkor minden $J\subseteq I$ halmazra

$$\sum_{i\in J}\mathfrak{a}_i\leq\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i,$$

és ha minden $i\in I\setminus J$ esetén $\mathfrak{a}_i\neq 0$, akkor

$$\mathop{\mathrm{P}}_{i\in J}\mathfrak{a}_i\leq\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I}\mathfrak{a}_i.$$

r) Ha $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ és $\mathfrak{b}_2$ számosságok, továbbá $\mathfrak{a}_1\leq\mathfrak{a}_2$ és $\mathfrak{b}_1\leq\mathfrak{b}_2$, akkor $\mathfrak{a}_1^{\mathfrak{b}_1}\leq\mathfrak{a}_2^{\mathfrak{b}_2}$.

s) Minden $\mathfrak{a}$ számosságra $\mathfrak{a}<2^{\mathfrak{a}}$ teljesül.

t) Az "$\mathfrak{a}$ számosság" kijelentés *nem kollektivizáló* az $\mathfrak{a}$ változóban.

(*Útmutatás.* e) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer, és tekintsük az $(\{i\}\times E_i)_{i\in I}$ diszjunkt halmazrendszert. Legyen $E:=\bigcup\limits_{i\in I}E_i$ és $E':=\bigcup\limits_{i\in I}(\{i\}\times E_i)$. Ekkor $E'\subseteq I\times E$, és a $pr_E:I\times E\to E$ projekció E'-re vett leszűkítése szürjektív, és ha az $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer diszjunkt, akkor ez a leszűkítés bijekció E' és E között.

f)-g)-h) Ha $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt halmazrendszer és F halmaz, akkor az

$$\mathscr{F}(\bigcup_{i\in I}E_i;F)\to\prod_{i\in I}\mathscr{F}(E_i;F),\qquad f\mapsto(f|_{E_i})_{i\in I}$$

leképezés bijekció. Ha E halmaz és $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer, akkor az

$$\mathscr{F}(E;\prod_{i\in I} F_i) \to \prod_{i\in I} \mathscr{F}(E;F_i), \qquad f \mapsto (pr_i \circ f)_{i\in I}$$

leképezés bijekció.

t) Ha az "$\mathfrak{a}$ számosság" kijelentés kollektivizáló volna, akkor az

$$E := \{\mathfrak{a} | \text{"}\mathfrak{a} \text{ számosság"}\}$$

halmaz olyan lenne, hogy a $\mathfrak{b} := \sup_{\mathfrak{a}\in E} \mathfrak{a}$ számosság minden számosságnál nagyobb-egyenlő volna, holott a Cantor-tétel alapján $2^{\mathfrak{b}}$ a $\mathfrak{b}$-nél nagyobb számosság.)

42. Legyenek $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ és $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ számosság-rendszerek, és tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{b}_i \geq 2$.

a) Ha minden $i \in I$ indexre $\mathfrak{a}_i \leq \mathfrak{b}_i$, akkor:

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \leq \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \mathfrak{b}_i.$$

b) (*König-tétel.*) Ha minden $i \in I$ indexre teljesül a $\mathfrak{a}_i < \mathfrak{b}_i$ szigorú egyenlőtlenség, akkor:

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i < \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \mathfrak{b}_i.$$

(*Útmutatás.* a) Ha $I = \emptyset$, akkor $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = 0$ és $\mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \mathfrak{b}_i = 1$. Ha I egy elemű, akkor $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \mathop{\mathrm{P}}_{i\in I} \mathfrak{b}_i$. Ha I két elemű, akkor az állítás a 2. **40**. gyakorlatból következik. Ezért elég azt megmutatni, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt halmazrendszer, hogy I legalább három elemű és minden $i \in I$ esetén E_i legalább két elemű, akkor létezik $\bigcup_{i\in I} E_i \to \prod_{i\in I} E_i$ injekció.

Ennek bizonyításához először kétszer alkalmazva a kiválasztási axiómát rögzítünk olyan $e, e' \in \prod_{i\in I} E_i$ elemeket, amelyekre minden $i \in I$ esetén $e(i) \neq e'(i)$ teljesül. Jelölje ι azt az $\bigcup_{i\in I} E_i \to I$ leképezést, amelyre minden $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$ esetén $x \in E_{\iota(x)}$ teljesül (ez a függvény az $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszer diszjunktsága miatt értelmezhető). Ezután minden $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$ elemre legyen $f(x) \in \prod_{i\in I} E_i$ az a rendszer, amelyre $pr_{\iota(x)}(f(x)) := x$ és ha $j \in I \setminus \{\iota(x)\}$, akkor

– ha $x \neq e(\iota(x))$, akkor $pr_j(f(x)) := e(j)$,

– ha $x = e(\iota(x))$, akkor $pr_j(f(x)) := e'(j)$.

Ez az $f : \bigcup_{i\in I} E_i \to \prod_{i\in I} E_i$ függvény injekció. Legyenek ugyanis $x, x' \in \bigcup_{i\in I} E_i$ és $x \neq x'$. Ha $\iota(x) = \iota(x')$, akkor $pr_{\iota(x)}(f(x)) := x \neq x' =: pr_{\iota(x')}(f(x'))$,

következésképpen $f(x) \neq f(x')$. Ha viszont $\iota(x) \neq \iota(x')$, akkor a következő esetek lehetségesek:

- $x \neq e(\iota(x))$ és $x' \neq e(\iota(x'))$; ekkor $pr_{\iota(x)}(f(x)) = x \neq e(\iota(x)) = pr_{\iota(x)}(f(x'))$,

– $x \neq e(\iota(x))$ és $x' = e(\iota(x'))$; ekkor van olyan $k \in I$, hogy $\iota(x) \neq k \neq \iota(x')$, és akkor $pr_k(f(x)) = e(k) \neq e'(k) = pr_k(f(x'))$,

– $x = e(\iota(x))$ és $x' \neq e(\iota(x'))$; ekkor van olyan $k \in I$, hogy $\iota(x) \neq k \neq \iota(x')$, és akkor $pr_k(f(x)) = e'(k) \neq e(k) = pr_k(f(x'))$,

– $x = e(\iota(x))$ és $x' = e(\iota(x'))$; ekkor $pr_{\iota(x)}(f(x)) = x = e(\iota(x)) \neq e'(\iota(x)) = pr_{\iota(x)}(f(x'))$,

tehát minden esetben $f(x) \neq f(x')$.

b) Elég azt megmutatni, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt halmazrendszer, és $(F_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén E_i kisebb számosságú F_i-nél, akkor *nem létezik* $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \to \prod\limits_{i\in I} F_i$ szürjekció. Indirekt bizonyíthatunk, tehát feltesszük, hogy $f : \bigcup\limits_{i\in I} E_i \to \prod\limits_{i\in I} F_i$ szürjekció. Minden $i \in I$ indexre az $E_i \to F_i,\ x \mapsto pr_i(f(x))$ leképezés nem szürjekció, így $F_i \setminus \{pr_i(f(x))|x \in E_i\} \neq \emptyset$. Ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk egy $e \in \prod\limits_{i\in I}(F_i \setminus \{pr_i(f(x))|x \in E_i\})$ elemet. Ekkor $e \in \prod\limits_{i\in I} F_i$, tehát az f szürjektivitása folytán van olyan $x \in \bigcup\limits_{i\in I} E_i$ elem, amelyre $f(x) = e$ teljesül. Legyen $i \in I$ az az index, amelyre $x \in E_i$; ekkor $pr_i(f(x)) = e(i) \notin \{pr_i(f(x))|x \in E_i\}$, ugyanakkor világos, hogy $pr_i(f(x)) \in \{pr_i(f(x'))|x' \in E_i\}$, ami ellentmondás.)

43. Legyen E halmaz és $f : \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \to E$ olyan függvény, hogy minden $X \subseteq E$ nem üres halmazra $f(X) \in X$.

a) Legyen $\mathfrak{b}$ olyan számosság, hogy $\mathfrak{b} \leq Card(E)$, és legyen

$$A := \{x \in E | Card(\overset{-1}{f}\langle\{x\}\rangle) \leq \mathfrak{b}\}.$$

Ekkor az $\mathfrak{a} := Card(A)$ számosságra $2^{\mathfrak{a}} \leq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + 1$ teljesül.

b) Értelmezzük a következő halmazt:

$$B := \{x \in E | (\forall X \in \overset{-1}{f}\langle\{x\}\rangle)(Card(X) \leq \mathfrak{b})\}.$$

Ekkor $Card(B) \leq \mathfrak{b}$ teljesül.

44. a) Ha $\mathfrak{a}$ végtelen számosság, akkor minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ természetes számra $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$ teljesül.

b) Ha $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ nem nulla számosságoknak olyan rendszere, hogy I véges és az $\mathfrak{a} := \max\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ számosság végtelen, akkor $\mathop{\mathrm{P}}\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}$.

c) Legyen $\mathfrak{a}$ végtelen számosság, és $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ számosságoknak olyan rendszere, hogy $Card(I) \leq \mathfrak{a}$ és minden $i \in I$ indexre $\mathfrak{a}_i \leq \mathfrak{a}$. Ekkor $\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i \leq \mathfrak{a}$, és ha létezik olyan $i \in I$, amelyre $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}$, akkor $\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}$.

d) Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ olyan nem nulla számosságok, amelyek közül az egyik végtelen, akkor

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

45. *Korlátozottsági axiómának* nevezzük a következő kijelentést:

$$(\forall x)(\ (x \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists y)((y \in x) \wedge (x \cap y = \emptyset))\ ).$$

Tehát a korlátozottsági axióma azt jelenti, hogy minden nem üres halmaznak van olyan eleme, amelynek nincs közös eleme az adott halmazzal.

Fundáltsági axiómának nevezzük a következő kijelentést:

$$\neg(\exists f)(\ Fnc(f) \wedge (Dom(f) = \mathbb{N}) \wedge (\forall n)(\ (n \in Dom(f)) \Rightarrow (f(n^+) \in f(n))\ )\ ),$$

ahol $Fnc(f)$ annak a kijelentésnek a rövidítése, hogy "f függvény". Tehát a fundáltsági axióma azt jelenti, hogy nem létezik olyan halmazsorozat, amelynek mindegyik tagjának eleme a rákövetkező tagja; vagyis nem létezik (megszámlálhatóan) végtelen "leszálló" elem-lánc.

a) A korlátozottsági axiómából (a kiválasztási axióma alkalmazása nélkül) következik a fundáltsági axióma.

b) A kiválasztási axiómából következik, hogy a fundáltsági axióma és a korlátozottsági axióma *ekvivalensek*.

c) A korlátozottsági axiómából következik, hogy semmilyen *véges* "leszálló" elemlánc nem létezik, vagyis

$$\neg(\exists f)(\ Fnc(f) \wedge (Dom(f) \in \mathbb{N}) \wedge (\forall n)(\ (n^+ \in Dom(f)) \Rightarrow (f(n^+) \in f(n))\ )$$

$$\wedge (f((Dom(f))^-) \in f(0))\ )$$

teljesül. Speciálisan, a korlátozottsági axiómából kapjuk, hogy $(\forall x)(x \notin x)$ teljesül.

46. Mutassuk meg, hogy az indexsorozatok (tehát az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvények) halmaza kontinuumszámosságú. Bármely (halmazban haladó) *injektív* sorozat részsorozatainak halmaza kontinuumszámosságú.

(*Útmutatás.* Ha $X \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, akkor létezik olyan σ indexsorozat, amelyre $Im(\sigma) = X$. Ehhez elegendő venni a $\min(X)$ kezdőpont és az

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min\{k \in X | k > n\}$$

függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Tehát az indexsorozatok halmaza ráképezhető az $\mathbb{N}$ végtelen részhalmazainak halmazára, ami a **30**. gyakorlat szerint ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel. Tehát az indexsorozatok halmaza legalább kontinuumszámosságú. Másfelől, az indexsorozatok halmaza része az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injekciók halmazának, amely a **32**. b) gyakorlat szerint ekvipotens az $\mathbb{N}$ végtelen részhalmazainak halmazával. A bizonyítás befejezéséhez elegendő a Schröder -Bernstein tételt alkalmazni.

Ha $\boldsymbol{s}$ injektív sorozat, akkor az indexsorozatok halmazán értelmezett és az $\boldsymbol{s}$ részsorozatainak halmazába vezető $\sigma \mapsto \boldsymbol{s} \circ \sigma$ leképezés nyilvánvalóan bijekció.)

47. Mutassuk meg, hogy ha $(\sigma_i)_{i\in I}$ indexsorozatok olyan nem üres rendszere, hogy a $\bigcap\limits_{i\in I} Im\,(\sigma_i)$ halmaz végtelen, akkor létezik indexsorozatoknak olyan $(\sigma_i')_{i\in I}$ rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén $\sigma_i \circ \sigma_i' = \sigma_j \circ \sigma_j'$ teljesül.

(*Útmutatás.* Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a $\bigcap\limits_{i\in I} Im\,(\sigma_i)$ halmaz nem részhalmaza n-nek, tehát van olyan $k \in \bigcap\limits_{i\in I} Im\,(\sigma_i)$, amelyre $n < k$. Ezért jól értelmezett az

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min\{\ k \in \bigcap_{i\in I} Im\,(\sigma_i)\ \mid n < k\ \}$$

függvény. Jelölje σ a $\min\{\ k \in \bigcap\limits_{i\in I} Im\,(\sigma_i)\ \mid 0 < k\ \}$ kezdőpont és f függvény által meghatározott iterációs sorozatot! Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{\ k \in \bigcap\limits_{i\in I} Im\,(\sigma_i)\ \mid \sigma(n) < k\ \}$, tehát $\sigma(n) < \sigma(n+1)$, vagyis σ indexsorozat. Ugyankkor, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) \in \bigcap\limits_{i\in I} Im\,(\sigma_i)$, vagyis minden $I \ni i$-re $Im(\sigma) \subseteq Im(\sigma_i)$. Minden $I \ni i$-re legyen

$$\sigma_i' := \sigma_i^{-1} \circ \sigma.$$

Ekkor minden $i \in I$ esetén $\sigma_i' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, és a definíció szerint, $\sigma_i \circ \sigma_i' = \sigma$.)

II. VALÓS ÉS KOMPLEX SZÁMOK

Az I. fejezet 3. pontjában láttuk, hogy a természetes számok értelmezhetőségének problémája a halmazelmélet axiomatikájával szoros kapcsolatban álló, lényegében halmazelméleti feladat. Az $\mathbb{N}$ halmazon létezik egy kitüntetett jólrendezés és két kitüntetett művelet, amelyek tulajdonságait és egymással való kapcsolatait részletesen megvizsgáltuk. Azonban sem a kivonás, sem a nem nulla természetes számokkal való osztás nem végezhető el $\mathbb{N}$-ben feltétel nélkül, ezért pusztán *aritmetikai szempontok* arra kényszerítenek bennünket, hogy a természetes számok halmazát bővítsük olymódon, és a műveleteket terjesszük ki úgy, hogy ezek az aritmetikai típusú "hiányosságok" eltűnjenek. Ez a bővítés két lépésben hajtható végre; először a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazából az *egész számok* $\mathbb{Z}$ halmazát, majd a *racionális számok* $\mathbb{Q}$ halmazát állítjuk elő úgy, hogy mindegyik lépésben a korábban értelmezett műveleteket és rendezést kiterjesztjük a bővebb számhalmazra (I. 3. **35**. és **36**. gyakorlat).

A racionális számok halmazán az összeadás és szorzás műveletek algebrai szempontból igen kedvező tulajdonságokkal rendelkeznek. Ezeket a "jó tulajdonságokat" a matematikában *testaxiómáknak* nevezzük. A *testek* azok a halmazok, amelyeken adott két olyan művelet, amelyek eleget tesznek a testaxiómáknak. A fejezet első pontjában pontosan megfogalmazzuk a testaxiómákat, és megvizsgáljuk a testek kapcsolatait $\mathbb{Z}$-vel és $\mathbb{Q}$-val. Bevezetjük továbbá a testműveletekkel összhangban álló rendezések és a *rendezett testek* fogalmát.

A racionális számok testének is vannak algebrai természetű hiányosságai; például könnyen megadhatók egész szám együtthatós polinomok, amelyeknek nincs gyöke a racionális számok halmazában. Másként fogalmazva, ez azt jelenti, hogy még egészen egyszerű algebrai egyenletek is léteznek, amelyeknek nem létezik racionális megoldása. Könnyen észrevehető, hogy ez az algebrai probléma szoros kapcsolatban van a $\mathbb{Q}$ feletti természetes rendezés bizonyos értelmű "tökéletlenségével". Ilymódon eljutunk a *teljesen rendezett testek* fogalmához.

A teljesen rendezett testeknek már olyan sok erős feltételt kell kielégíteniük, hogy egyáltalán nem volna meglepő az, ha ilyenek egyáltalán nem léteznének. Azonban meglehetősen közvetlenül eljuthatunk a teljesen rendezett testek létezésének és lényegében vett egyértelműségének bizonyításához; így vezetjük be a *valós számok* $\mathbb{R}$ testét. Tehát a valós számok számok halmaza úgy jelenik meg a matematikában, mint egy nagyon erős algebrai és rendezéselméleti feltétel-rendszernek eleget tevő objektum. A valós számtest Dedekind-féle konstrukciója nem tekinthető tisztán algebrai eljárásnak, bár minden bizonnyal ez a módszer alkalmaz a legkevesebb nem algebrai eszközt.

A valós számok ismeretében már egyszerű algebrai definíció adható a *komplex számok* $\mathbb{C}$ testére, és kiderül, hogy minden algebrai egyenlet megoldható a komplex számok körében; ez az *algebra alaptétele*, amelynek bizonyítására csak később kerülhet sor (az V. fejezet 8. pontjában). Ezzel a számfogalom felépítése lényegében lezárul. Egyidejűleg lehetőség nyílik az analízis módszereivel kezelhető *analitikus geometria* felépítésére. Ebből a szempontból a valós számtest egzisztenciája legalább olyan fontos, mint az aritmetika vagy algebra nézőpontjából.

A valós és komplex számtesttel kapcsolatos analízis felépítésének döntő mozzanata az *euklidészi abszolútérték-függvény* bevezetése ezeken a számtesteken; ezzel

foglalkozik a fejezet második pontja. Az abszolútérték-függvény segítségével értelmezhetők a gömbi környezetek és a legalapvetőbb topológiai fogalmak. Itt a legfontosabb eredmény az $\mathbb{R}$-re vonatkozó Cantor-féle közösrész-tétel, valamint a Borel-Lebesgue befedési tétel. Ezek igazi jelentősége majd az V. fejezetben derül ki.

A harmadik pontban *numerikus sorozatokról* lesz szó, a negyedik pontban pedig speciális módon előállított számsorozatokat, a *numerikus sorokat* vizsgáljuk. Itt vezetjük be a sorozatok és sorok *konvergenciájának*, valamint *határértékének* fogalmát, ami az analízis legsajátosabb fogalmának tekinthető. Pontos határérték-fogalom birtokában egzakt jelentést kap a "közelítés" vagy "approximáció" fogalma. Ugyanakkor a "határérték-képzés", mint analitikus operáció nemcsak elvi, hanem gyakorlati jelentőséggel is bír, mivel annak segítségével egyszerű, algebrailag előállított objektumokból egészen bonyolult, de még analitikusan kezelhető halmazok, illetve függvények hozhatók létre. Analitikusan konstruálható függvények a *hatványfüggvények*, és azok konkrét típusai, mint például az *elemi függvények*.

Irodalomjegyzék

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algébre*, Hermann, Paris

2. S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1965.

3. C. Faith, *Algebra: Modules and Categories*, vol. I-II, Springer-Verlag, 1973.

4. Г. Е. Шилов, *Математический анализ, Функции одного переменного*, Наука, Москва, 1969.

5. M. Zamansky, *Introduction a l'algébre et l'analyse modernes*, Dunod, 1963.

6. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill Book Comp., 1964.

7. З. И. Боревич - И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, Москва, 1972

8. K. Ireland - M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, 1982.

1. A valós és komplex számok bevezetése

Definíció. A $(K, +, \cdot)$ hármast *testnek* nevezzük, ha $+$ és $\cdot$ olyan műveletek a K halmaz felett, amelyekre teljesülnek a következő *testaxiómák*.

(K_I) A $+$ művelet asszociatív, kommutatív, neutráliselemes és inverzelemes, tehát a $(K, +)$ pár kommutatív csoport. (A $+$ művelet szerinti neutrális elemet $\mathbf{0}$ jelöli, és minden $x \in K$ esetén $-x$ jelöli az x inverzét a $+$ művelet szerint.)

(K_{II}) A $\cdot$ művelet asszociatív, kommutatív, létezik neutrális eleme, amely $\mathbf{0}$-val nem egyenlő, és a K minden $\mathbf{0}$-tól különböző elemének létezik inverze a $\cdot$ művelet szerint. (A $\cdot$ művelet szerinti neutrális elemet $\mathbf{1}$ jelöli, és minden $x \in K \setminus \{\mathbf{0}\}$ elemre x^{-1} jelöli az x inverzét a $\cdot$ szerint.)

(K_{III}) A $\cdot$ művelet disztributív a $+$ műveletre nézve.

A testeket gyakran egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével jelöljük, és a műveleteit ugyanazzal a $+$ és $\cdot$ szimbólummal jelöljük, ha ez nem okoz félreértést.

Példa. a) A $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ hármas test; ez a *racionális számok teste*. Ezzel szemben a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ hármasra (K_I) és (K_{III}) teljesül, azonban (K_{II}) nem. Az $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ hármasra csak (K_{III}) teljesül, de (K_I) és (K_{II}) nem.

b) Legyen $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tetszőleges, és a $\mathbb{Z}$ halmazon vezessük be a következő relációt:

$$\approx_p := \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | \text{"}n - m \text{ osztható } p\text{-vel"}\}.$$

Ekkor $\approx_p$ ekvivalencia-reláció $\mathbb{Z}$ felett; legyen $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/\approx_p$ és jelölje π_p a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ kanonikus szürjekciót. A $\mathbb{Z}_p$ halmaz felett egyértelműen léteznek azok a $+$ és $\cdot$ műveletek, amelyekre minden $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén $\pi_p(m + n) = \pi_p(m) + \pi_p(n)$ és $\pi_p(m \cdot n) = \pi_p(m) \cdot \pi_p(n)$ teljesül. Ekkor a $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ hármasra (K_I) és (K_{III}) teljesül, továbbá (K_{II}) pontosan akkor teljesül, ha p *prímszám*. Ha p *prímszám*, akkor a $\mathbb{Z}_p$ testet $\mathbb{F}_p$-vel is szokás jelölni, és az $(\mathbb{F}_p, +, \cdot)$ testet a p *-edik maradékosztálytestnek* nevezzük.

Legyen K test és $x \in K$. Ekkor a (K_{III}) miatt $x \cdot \mathbf{0} + x \cdot \mathbf{0} = x \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = x \cdot \mathbf{0}$, így az egyenlőség mindkét oldalához hozzáadva $-(x \cdot \mathbf{0})$-t és felhasználva a $+$ művelet asszociativitását kapjuk, hogy $x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ismét a ($\mathrm{K}_{III}$) és az előző állítás miatt kapjuk, hogy $x + (-\mathbf{1}) \cdot x = \mathbf{1} \cdot x + (-\mathbf{1}) \cdot x = (\mathbf{1} + (-\mathbf{1})) \cdot x = \mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0}$, amiből következik, hogy $(-\mathbf{1}) \cdot x = -x$.

Állítás. Ha K test és $x \in K$, akkor egyértelműen létezik az az $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, amely K-ban halad, és minden $n \in \mathbb{N}$ számra eleget tesz a következő feltételeknek:

$$x^0 = \mathbf{1};$$
$$x^{n+1} = x^n \cdot x.$$

Bizonyítás. Adott $x \in K$ esetén elég az iterációs tételt alkalmazni az $\mathbf{1} \in K$ kezdőpontra és a $K \to K;\ x' \mapsto x' \cdot x$ függvényre. ■

Tehát ha K test és $x \in K$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra x^n jól értelmezett, és ezt az x elem *n-edik hatványának* nevezzük; ekkor n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén:

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n,$$
$$x^{m \cdot n} = (x^m)^n$$

teljesül. Ezek a *hatványozás azonosságai.*

Állítás. Ha K test, akkor létezik egyetlen olyan $j : \mathbb{Z} \to K$ nem azonosan $\mathbf{0}$ függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $q, p \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$j(q+p) = j(q) + j(p), \quad j(q \cdot p) = j(q) \cdot j(p)$$

teljesül.

Bizonyítás. Először az iterációs tételt alkalmazva a $\mathbf{0} \in K$ kezdőpontra és a $K \to K$; $x \mapsto x + \mathbf{1}$ függvényre kapjuk annak a K-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatnak a létezését, amelyre teljesül az, hogy $\boldsymbol{s}(0) = \mathbf{0}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}(n+1) = \boldsymbol{s}(n) + \mathbf{1}$. Ekkor n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}(m+n) = \boldsymbol{s}(m) + \boldsymbol{s}(n)$ és $\boldsymbol{s}(m \cdot n) = \boldsymbol{s}(m) \cdot \boldsymbol{s}(n)$. Ebből következik, hogy ha $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $m + n' = m' + n$, akkor $\boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}(n) = \boldsymbol{s}(m') - \boldsymbol{s}(n')$, így létezik egyetlen olyan $j : \mathbb{Z} \to K$ függvény, amelyre minden $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén $j(m-n) = \boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}(n)$ teljesül.

A $\mathbb{Z}$ műveleteinek tulajdonságai és a j függvény definíciója alapján közvetlenül belátható, hogy minden $q, p \in \mathbb{Z}$ esetén $j(q+p) = j(q) + j(p)$ és $j(q \cdot p) = j(q) \cdot j(p)$ teljesül.

Ha $j' : \mathbb{Z} \to K$ szintén olyan függvény, minden $q, p \in \mathbb{Z}$ esetén $j'(q+p) = j'(q) + j'(p)$ és $j'(q \cdot p) = j'(q) \cdot j'(p)$ teljesül, akkor a $\boldsymbol{s}' := j'|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to K$ leszűkített függvényre $\boldsymbol{s}'(0) = \mathbf{0}$ teljesül, és ha j' nem azonosan $\mathbf{0}$, akkor $j'(1) = \mathbf{1}$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}'(n+1) = \boldsymbol{s}'(n) + \mathbf{1}$ is teljesül. Ezért $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s}$, következésképpen minden $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ párra $j(m-n) = \boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}(n) = \boldsymbol{s}'(m) - \boldsymbol{s}'(n) = j'(m-n)$, tehát $j' = j$. ■

Definíció. Ha K test, akkor a $\mathbb{Z}$ és K közötti *kanonikus leképezésnek* nevezzük azt a $\mathbb{Z} \to K$ nem azonosan $\mathbf{0}$ függvényt, amelyre teljesül az, hogy minden $q, p \in \mathbb{Z}$ esetén $j(q+p) = j(q) + j(p)$ és $j(q \cdot p) = j(q) \cdot j(p)$.

Ha K test, akkor a $\mathbb{Z}$ és K közötti kanonikus leképezés nem feltétlenül injektív; például az $\mathbb{F}_p$ test esetében ez a függvény p szerint periodikus. A racionális számok $\mathbb{Q}$ teste esetében a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ kanonikus leképezés injektív. Könnyen látható, hogy ha K test, akkor a $j : \mathbb{Z} \to K$ kanonikus leképezés pontosan akkor injektív, ha minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén $j(n) \neq \mathbf{0}$; ilyenkor azt mondjuk, hogy a K test *nulla karakterisztikájú.*

Állítás. Legyen K olyan test, amelyre a $j : \mathbb{Z} \to K$ kanonikus leképezés injektív. Ekkor egyértelműen létezik az a $J : \mathbb{Q} \to K$ leképezés, amely j-nek kiterjesztése, és olyan, hogy minden $r, s \in \mathbb{Q}$ esetén:

$$J(r+s) = J(r) + J(s), \quad J(r \cdot s) = J(r) \cdot J(s).$$

Ez a J leképezés is injektív.

Bizonyítás. Legyenek $(q,p),(q',p') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ olyan párok, hogy $q \cdot p' = q' \cdot p$. Ekkor $j(q) \cdot j(p') = j(q') \cdot j(p)$, és a j injektivitása miatt $j(p), j(p') \in K \setminus \{0\}$, következésképpen $j(q) \cdot j(p)^{-1} = j(q') \cdot j(p')^{-1}$. Ebből a $\mathbb{Q}$ *definíciója* szerint létezik egyetlen olyan $J : \mathbb{Q} \to K$ függvény, amelyre minden $(q,p) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ párra $J(q \cdot p^{-1}) = j(q) \cdot j(p)^{-1}$ teljesül. A $j(1) = \mathbf{1}$ egyenlőség miatt J a j függvény kiterjesztése, és egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a $\mathbb{Q}$-ban értelmezett $+$ és $\cdot$ műveletek *definíciója* miatt minden $r,s \in \mathbb{Q}$ esetén $J(r+s) = J(r) + J(s)$ és $J(r \cdot s) = J(r) \cdot J(s)$.

Ha $J' : \mathbb{Q} \to K$ szintén olyan kiterjesztése j-nek, hogy minden $r,s \in \mathbb{Q}$ esetén $J'(r+s) = J'(r) + J'(s)$ és $J'(r \cdot s) = J'(r) \cdot J'(s)$ teljesül, akkor minden $(q,p) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ párra $J'(q \cdot p^{-1}) = j(q) \cdot j(p)^{-1} = J(q \cdot p^{-1})$, így $J' = J$.

A J függvény injektivitása ekvivalens azzal, hogy minden $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számra $J(r) \neq \mathbf{0}$. Ez viszont nyilvánvalóan igaz J-re, mert ha $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor létezik olyan $(q,p) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ pár, hogy $r = q \cdot p^{-1}$ és $q \neq 0$; ekkor $J(r) = j(q) \cdot j(p)^{-1} \neq \mathbf{0}$, hiszen a j injektivitása miatt $j(q) \neq \mathbf{0}$. ■

Definíció. Ha K olyan test, hogy a $j : \mathbb{Z} \to K$ kanonikus leképezés injektív, akkor a $\mathbb{Q}$ és K közötti *kanonikus leképezésnek* nevezzük a $J : \mathbb{Q} \to K$ függvényt, amely j-nek kiterjesztése, és olyan, hogy minden $r,s \in \mathbb{Q}$ esetén $J(r+s) = J(r) + J(s)$ és $J(r \cdot s) = J(r) \cdot J(s)$ teljesül.

Tehát ha K olyan test, amelyre a $\mathbb{Z}$ és K közötti kanonikus leképezés injektív, akkor K a racionális számtest "bővítésének" tekinthető, vagyis $\mathbb{Q}$ a "legkisebb" olyan test, hogy a $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ közötti kanonikus leképezés injektív. Ilyenkor a kevésbé pontos $\mathbb{Q} \subseteq K$ jelölést is alkalmazzuk, vagyis $\mathbb{Q}$-t azonosítjuk a $\mathbb{Q} \to K$ kanonikus injekció által e függvény értékkészletével.

Definíció. A $(K,+,\cdot,\leq)$ négyest *rendezett testnek* nevezzük, ha $(K,+,\cdot)$ test és $\leq$ olyan *lineáris* rendezés a K halmaz felett, amelyre teljesülnek a következők:

(KO$_I$) Minden $x,y,z \in K$ elemre, ha $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z$.

(KO$_{II}$) Minden $x,y \in K$ elemre, ha $x \geq \mathbf{0}$ és $y \geq \mathbf{0}$, akkor $x \cdot y \geq \mathbf{0}$.

Ha $(K,+,\cdot,\leq)$ rendezett test, akkor az $\{x \in K | x \geq \mathbf{0}\}$ halmazt a K_+ szimbólummal jelöljük, és ennek elemeit a K *pozitív* elemeinek nevezzük (a $\leq$ rendezés szerint).

A rendezett testeket is általában egyetlen betűvel, az alaphalmaz szimbólumával jelöljük, és a rendezését a $\leq$ absztrakt szimbólummal jelöljük, ha ez nem vezet félreértésre.

Példa. A racionális számok teste a természetes rendezéssel rendezett test.

Tegyük fel, hogy K rendezett test. Ha $x,y \in K$, akkor az $x \leq y$ és $-y \leq -x$ egyenlőtlenségek ekvivalensek egymással; ez (KO$_I$)-ből következik. Ha $x \in K$, akkor $x^2 \geq \mathbf{0}$, mert ha $x \geq \mathbf{0}$, akkor ez a (KO$_{II}$) alapján nyilvánvaló, ha pedig $x < \mathbf{0}$, akkor $-x > \mathbf{0}$, tehát ismét (KO$_{II}$)-t alkalmazva kapjuk, hogy $x^2 = (-x)^2 \geq \mathbf{0}$. Teljesül az, hogy $\mathbf{0} < \mathbf{1}$, mert $\mathbf{0} \neq \mathbf{1} = \mathbf{1}^2$. A $-\mathbf{1}$ elem nem állítható elő négyzetelemek

összegeként; ez az előzőek alapján nyilvánvaló. Speciálisan, ha p prímszám, akkor az $\mathbb{F}_p$ test felett *nem létezik* olyan rendezés, amellyel $\mathbb{F}_p$ rendezett test volna, mert ebben $-\mathbf{1} = \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{1}^2$ teljesül. Ha $x \in K$ és $x > \mathbf{0}$, akkor $x^{-1} > 0$, mert ellenkező esetben $\mathbf{0} < -x^{-1}$ igaz lenne, tehát a (KO$_{II}$) alkalmazásával $\mathbf{0} < (-x^{-1}) \cdot x = -\mathbf{1}$ adódna, vagyis $\mathbf{1} < \mathbf{0}$ teljesülne, ami nem igaz. Ha $x, y \in K$, akkor minden $z \in K_+$ elemre, $x \leq y$ esetén $x \cdot z \leq y \cdot z$ teljesül; ez a (KO$_I$) és (KO$_{II}$) feltételekből nyilvánvalóan következik.

Állítás. Ha K rendezett test, akkor a $\mathbb{Z}$ és K közötti kanonikus leképezés injektív, és a $J : \mathbb{Q} \to K$ kanonikus leképezés olyan, hogy minden $r, s \in \mathbb{Q}$ számra $r \leq s$ a $\mathbb{Q}$ természetes rendezése szerint pontosan akkor teljesül, ha $J(r) \leq J(s)$ a K rendezése szerint (vagyis J *szigorúan rendezéstartó*).

Bizonyítás. Jelölje j a $\mathbb{Z}$ és K közötti kanonikus leképezést. A $j(1) = \mathbf{1} > \mathbf{0}$ egyenlőtlenségből kiindulva, teljes indukcióval könnyen kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ számra $j(n) > \mathbf{0}$. Ezért minden $p \in \mathbb{Z}$ esetén, ha $p > 0$, akkor $j(p) > \mathbf{0}$, és ha $p < 0$, akkor $-p > 0$, így $-j(p) = j(-p) > \mathbf{0}$, vagyis $j(p) < \mathbf{0}$. Ez azt mutatja, hogy j injektív, és minden $p \in \mathbb{Z}$ esetén $p > 0$ pontosan akkor igaz, ha $j(p) > \mathbf{0}$. Nyilvánvalóan ez azzal egyenértékű, hogy minden $q, p \in \mathbb{Z}$ esetén, a $q < p$ és $j(q) < j(p)$ kijelentések ekvivalensek.

Legyenek $(q, p), (q', p') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ olyan párok, hogy $q \cdot p' < q' \cdot p$, vagyis $q/p < q'/p'$. A j tulajdonságai alapján ekkor $j(q) \cdot j(p') < j(q') \cdot j(p)$, ugyanakkor $j(p), j(p') > \mathbf{0}$, ezért $J(q/p) = j(q) \cdot j(p)^{-1} < j(q') \cdot j(p')^{-1} = J(q'/p')$, vagyis J szigorúan monoton növő.

Megfordítva, legyenek $(q, p), (q', p') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ olyan párok, hogy $J(q/p) < J(q'/p')$. Ekkor $j(q) \cdot j(p)^{-1} = J(q/p) < J(q'/p') = j(q') \cdot j(p')^{-1}$ és $j(p), j(p') > \mathbf{0}$, ezért $j(q) \cdot j(p') < j(q') \cdot j(p)$. Ez azt jelenti, hogy a $q \cdot p'$ és $q' \cdot p$ egész számokra $j(q \cdot p') < j(q' \cdot p)$ teljesül, tehát $q \cdot p' < q' \cdot p$, amiből kapjuk, hogy $q/p < q'/p'$. Ezzel igazoltuk, hogy J szigorúan rendezéstartó. ■

Definíció. A K rendezett testet *archimédészi módon rendezett testnek* mondjuk, ha minden $x \in K$ és $y \in K$ elemhez, $x > \mathbf{0}$ és $y > \mathbf{0}$ esetén létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n \cdot y$.

Példa. A racionális számok rendezett teste archimédészi módon rendezett test.

Tétel. (*Az archimédészi módon rendezett testek jellemzése.*) Ha K rendezett test, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) K archimédészi módon rendezett test.

(ii) Minden $x \in K$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n$, vagyis az $\mathbb{N}$ halmaz nem korlátos felülről K-ban.

(iii) Minden $x \in K$ elemhez létezik olyan $p \in \mathbb{Z}$, hogy $p \leq x < p + 1$.

(iv) Minden $x, y \in K$, $x < y$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $x < r < y$.

(v) Minden $x \in K$ esetén az $\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ halmaznak létezik szuprémuma K-ban, és $x = \sup_K \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ teljesül.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Tudjuk, hogy $\mathbf{0} < \mathbf{1}$, ezért az (i) alapján, $x \in K$ és $x > \mathbf{0}$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n \cdot \mathbf{1} = n$. Ha $x \in K$ és $x \leq \mathbf{0}$, akkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $x \leq \mathbf{0} < n \cdot \mathbf{1} = n$.

(ii)⇒(iii) Először tegyük fel, hogy $x \in K$ olyan, hogy $x > \mathbf{0}$. A (ii) alapján létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n$, vagyis $\{n \in \mathbb{N} | x < n\} \neq \emptyset$. Az $\mathbb{N}$ jólrendezettsége miatt létezik legkisebb elem az $\{n \in \mathbb{N} | x < n\}$ halmazban; legyen ez m. Ekkor $x > \mathbf{0}$ miatt $m > 0$, tehát $p := m - 1 \in \mathbb{N}$. Továbbá $x < m = p + 1$, és $p < m$ miatt $x < p$ nem igaz, vagyis $p \leq x$. Tehát $p \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $p \leq x < p + 1$.

Legyen most $x \in K$ olyan, hogy $x < \mathbf{0}$. Ekkor $-x > \mathbf{0}$, tehát az előző bekezdés szerint van olyan $q \in \mathbb{N}$, amelyre $q \leq -x < q + 1$, így $-q - 1 < x \leq -q$ is teljesül. Ha $x \neq -q$, akkor $p := -q - 1 \in \mathbb{Z}$ olyan elem, amelyre $p \leq x < p + 1$. Ha viszont $x = -q$, akkor $p := -q \in \mathbb{Z}$ olyan, hogy $p \leq x < p + 1$.

Ezzel megmutattuk, hogy minden $x \in K$ elemhez létezik olyan $p \in \mathbb{Z}$, hogy $p \leq x < p + 1$.

(iii)⇒(iv) Legyenek $x, y \in K$ olyanok, hogy $x < y$. A feltevés szerint $y - x > \mathbf{0}$, így $(y - x)^{-1} > \mathbf{0}$, és a (ii) alapján létezik olyan $q \in \mathbb{Z}$, hogy $\mathbf{0} < (y - x)^{-1} < q$, tehát $q \in \mathbb{N}^+$ és $\mathbf{1} < q \cdot (y - x)$. Ha q ilyen, akkor ismét a (ii) alapján, van olyan $p \in \mathbb{Z}$, hogy $p \leq q \cdot x < p + 1$. Ekkor az $r := (p + 1)/q$ racionális számra $x < r < y$ teljesül. Valóban, $p + 1 \leq q \cdot x + \mathbf{1} < q \cdot y$, így az $q^{-1} \in K$ pozitív elemmel való szorzás után azt kapjuk, hogy $r < y$. Továbbá, $q \cdot x < p + 1$, így az $q^{-1} \in K$ pozitív elemmel való szorzás után azt kapjuk, hogy $x < r$.

(iv)⇒(v) Legyen $x \in K$. Az $\{r \in \mathbb{Q} | r < x\} \subseteq K$ halmaznak x természetesen felső korlátja. Ha $y \in K$ is felső korlátja, akkor $y < x$ lehetetlen, különben a (iv) miatt létezne olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $y < r < x$, márpedig $r < x$ és $r \in \mathbb{Q}$ esetén $r \leq y$. Ez azt jelenti, hogy x az $\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ halmaz legkisebb felső korlátja a K rendezett halmazban, tehát $x = \sup_K \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$.

(v)⇒(i) Legyenek $x, y \in K$ olyanok, hogy $x, y > \mathbf{0}$. Ekkor az (v) miatt létezik olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $\mathbf{0} < r < y$. Továbbá, $x < x + \mathbf{1}$ és (v) miatt létezik olyan $r' \in \mathbb{Q}$, hogy $x < r' < x + \mathbf{1}$. Legyenek $p, q \in \mathbb{N}^+$ olyanok, hogy $r = p/q$, valamint legyenek $p', q' \in \mathbb{N}^+$ olyanok, hogy $r' = p'/q'$. Ha az $n \in \mathbb{N}$ számot úgy választjuk meg, hogy $npq' > p'q$, akkor $x < r' < nr < n \cdot y$, így K archimédészi módon rendezett test. ■

Megjegyezzük, hogy ha K archimédészi módon rendezett test, akkor minden $x \in K$ elemhez *egyetlen* olyan $p \in \mathbb{Z}$ létezik, hogy $p \leq x < p + 1$. Valóban, ha $x \in K$ és $p, p' \in \mathbb{Z}$ olyanok, hogy $p \leq x < p + 1$ és $p' \leq x < p' + 1$ egyszerre teljesül, akkor $p \leq x < p' + 1$ miatt $p < p' + 1$, vagyis $p - p' < 1$, és hasonlóan kapjuk, hogy $p' - p < 1$ is teljesül, tehát $-1 < p - p' < 1$. De $\mathbb{Z}$-ben a 0 az egyetlen elem, amely szigorúan -1 és 1 közé esik, ezért $p - p' = 0$. Ezért értelmes a következő definíció.

Definíció. Ha K archimédészi módon rendezett test, akkor minden $x \in K$ esetén $[x]$ jelöli azt az egyetlen egész számot, amelyre $[x] \leq x < [x] + 1$ teljesül, és $[x]$-t az x elem *egész részének* nevezzük.

Megjegyezzük még, hogy az archimédészi módon rendezett testek jellemzési tételében szereplő (iv) tulajdonságot úgy fejezzük ki, hogy $\mathbb{Q}$ *rendezés-sűrű* az archimédészi módon rendezett testekben.

Definíció. A K rendezett testet *teljesen rendezett testnek* mondjuk, ha a K minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának létezik szuprémuma a K rendezett halmazban.

Természetes kérdés az, hogy *létezik-e* teljesen rendezett test? A racionális számok rendezett teste nem teljesen rendezett test, mert például az $\{r \in \mathbb{Q} | (r \geq 0) \wedge (r^2 \leq 2)\}$ halmaznak nincs szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban, holott nem üres és felülről korlátos. A következő állítás megmutatja, hogy teljesen rendezett testet csakis az archimédészi módon rendezett testek között lehet találni.

Állítás. Minden teljesen rendezett test archimédészi módon rendezett.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy K teljesen rendezett test, és $x, y \in K$ olyan elemek, hogy $x > \mathbf{0}$, de nem létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $y < n \cdot x$ teljesülne. Ekkor az $\{n \cdot x | n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ halmaznak y felső korlátja, így a K teljes rendezettsége miatt létezik szuprémuma; legyen $z := \sup\{n \cdot x | n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor $z - x < z$ miatt $z - x$ nem felső korlátja $\{n \cdot x | n \in \mathbb{N}\}$-nek, tehát van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $z - x < n \cdot x$. De ekkor $z < (n+1) \cdot x$, holott minden $m \in \mathbb{N}$ számra $m \cdot x \leq z$ teljesül. Ez az ellentmondás az állítást bizonyítja. ■

Állítás. Legyen K archimédészi módon rendezett test. Ekkor az

$$f_K : K \to \mathscr{P}(\mathbb{Q}); \quad x \mapsto \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$$

leképezés *injektív*, és $Im(f_K)$ minden eleme olyan $\lambda \subseteq \mathbb{Q}$ halmaz, amelyre teljesülnek a következők:

(D_I) $\lambda \neq \emptyset$ és λ felülről korlátos $\mathbb{Q}$-ban;

(D_{II}) λ-nak nincs legnagyobb eleme $\mathbb{Q}$-ban;

(D_{III}) minden $r \in \lambda$ elemre $]\leftarrow, r] \subseteq \lambda$.

Ha K teljesen rendezett test, akkor az f_K függvény értékkészlete *egyenlő* azon $\lambda \subseteq \mathbb{Q}$ halmazok halmazával, amelyekre (D_I), (D_{II}) és (D_{III}) teljesül.

Bizonyítás. Minden $x \in K$ esetén $x = \sup_K\{r \in \mathbb{Q} | r < x\} = \sup_K f_K(x)$, ezért az f_K függvény injektív.

Legyen $x \in K$ és $\lambda := \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$. Az $x < [x] + 1 \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ egyenlőtlenség miatt λ felülről korlátos halmaz $\mathbb{Q}$-ban, továbbá $[x] - 1 < [x] \leq x$ miatt $[x] - 1 \in \lambda$, így $\lambda \neq \emptyset$. Ha $r \in \lambda$, akkor $r < x$, ezért van olyan $s \in \mathbb{Q}$, hogy $r < s < x$; ekkor $s \in \lambda$ és $r < s$, tehát λ-nak nincs legnagyobb eleme. Ha $r \in \lambda$, akkor $s \in \mathbb{Q}$ és $s < r$ esetén $s < x$, ezért $s \in \lambda$. Ez azt jelenti, hogy λ-ra (D_I), (D_{II}) és (D_{III}) teljesül.

Tegyük fel, hogy K teljesen rendezett test, és legyen $\lambda \subseteq \mathbb{Q}$ olyan halmaz, amelyre (D_I), (D_{II}) és (D_{III}) teljesül. A λ halmazt a K részhalmazának tekintve; a (D_I) alapján λ a K-ban is nem üres és felülről korlátos, ezért képezhető az $x := \sup_K \lambda$ elem. Megmutatjuk, hogy $\lambda = f_K(x)$. Valóban, ha $r \in \lambda$, akkor a (D_{II}) miatt van olyan $s \in \lambda$, hogy $r < s$ a $\mathbb{Q}$ rendezése szerint, és x felső korlátja λ-nak K-ban, így $r < x$ a K rendezett halmazban. Ez azt jelenti, hogy $\lambda \subseteq f_K(x)$. Megfordítva, ha $r \in f_K(x)$, akkor $r \in \mathbb{Q}$ és $r < x$ a K rendezése szerint. A definíció szerint x a legkisebb felső korlátja λ-nak, ezért r már nem felső korlátja λ-nak K-ban, így létezik olyan $s \in \lambda$, hogy $r < s$. Ekkor a (D_{III}) miatt $r \in \lambda$, ami azt jelenti, hogy $f_K(x) \subseteq \lambda$. ■

Definíció. *Dedekind-szeletnek* nevezünk minden olyan $\lambda \subseteq \mathbb{Q}$ halmazt, amelyre az előző állítás (D_I), (D_{II}) és (D_{III}) feltételei teljesülnek. A Dedekind-szeletek halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

Könnyen látható, hogy minden $r \in \mathbb{Q}$ esetén az $]\leftarrow, r[$ intervallum $\mathbb{Q}$-ban Dedekind-szelet, vagyis $]\leftarrow, r[\in \mathbb{R}$ és természetesen az előző állításban értelmezett $f_{\mathbb{Q}}$ függvény egyenlő a $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$; $r \mapsto]\leftarrow, r[$ leképezéssel, tehát a $\mathbb{Q}$ halmaz e kitüntetett injekció által azonosul az $\mathbb{R}$ egy részhalmazával.

Tétel. (*Dedekind-tétel.*) *Létezik* teljesen rendezett test, és ha $(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ és $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ teljesen rendezett testek, akkor létezik egyetlen olyan $f : K_1 \to K_2$ bijekció, amely *additív*, vagyis minden $x, y \in K_1$ esetén $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$; *multiplikatív*, vagyis minden $x, y \in K_1$ esetén $f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$; és *szigorúan rendezés-tartó*, vagyis minden $x, y \in K_1$ esetén $(x \leq_1 y) \Leftrightarrow (f(x) \leq_2 f(y))$.

Bizonyítás. Először megállapodunk abban, hogy a $\subseteq$ relációt $\mathbb{R}$ felett a $\leq$ szimbólummal jelöljük; megmutatjuk, hogy ez *lineáris* rendezés az $\mathbb{R}$ felett. Legyenek $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\lambda \nsubseteq \lambda'$. Legyen $r \in \lambda$ olyan elem, amelyre $r \notin \lambda'$. Ha $s \in \lambda'$, akkor a (D_{III}) és $r \notin \lambda'$ miatt $r \leq s$ lehetetlen, tehát $s < r$ igaz, így ismét a (D_{III}) és $r \in \lambda$ alapján $s \in \lambda$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $\lambda \nsubseteq \lambda'$ esetén $\lambda' \subseteq \lambda$ teljesül. Ebből a λ és λ' felcserélésével kapjuk, hogy $\lambda' \nsubseteq \lambda$ esetén $\lambda \subseteq \lambda'$ teljesül. Ezért minden $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ elemre $\lambda \subseteq \lambda'$ vagy $\lambda' \subseteq \lambda$ teljesül.

Megmutatjuk, hogy az $\mathbb{R}$ feletti $\leq$ lineáris rendezésre teljesül az, hogy minden nem üres, felülről korlátos halmaznak létezik szuprémuma. Legyen ugyanis $E \subseteq \mathbb{R}$ olyan nem üres halmaz, amelynek $\lambda' \in \mathbb{R}$ felső korlátja $\leq$ szerint, vagyis minden $\lambda \in E$ esetén $\lambda \subseteq \lambda'$. Ekkor $\bigcup E \subseteq \lambda'$, tehát $\bigcup E$ nem üres, felülről korlátos részhalmaza $\mathbb{Q}$-nak mert a λ' minden felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban az $\bigcup E$ halmaznak is felső korlátja. Ezért $\bigcup E$-re (D_I) teljesül. Ha $r \in \bigcup E$, akkor van olyan $\lambda \in E$, hogy $r \in \lambda$, így a (D_{II}) alapján olyan $s \in \lambda$ is létezik, amelyre $r < s$, és persze $s \in \bigcup E$ szintén teljesül. Ezért $\bigcup E$-re (D_{II}) teljesül. Ha $r \in \bigcup E$ és $s < r$, akkor van olyan $\lambda \in E$, hogy $r \in \lambda$; ekkor $s \in \lambda \subseteq \bigcup E$, hiszen λ-ra (D_{III}) igaz. Tehát (D_{III}) a $\bigcup E$ halmazra is teljesül, így $\bigcup E \in \mathbb{R}$. Világos, hogy minden $\lambda \in E$ esetén $\lambda \subseteq \bigcup E$, vagyis $\bigcup E$ felső korlátja E-nek a $\leq$ rendezés szerint. Ha $\sigma \in \mathbb{R}$ felső korlátja E-nek a $\leq$ rendezés szerint, akkor minden $\lambda \in E$ esetén $\lambda \subseteq \sigma$, így az $\bigcup E$ halmaz definíciója szerint $\bigcup E \subseteq \sigma$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcup E$ az E halmaz legkisebb felső korlátja $\mathbb{R}$-ben a $\leq$ rendezés szerint.

Most összeadást értelmezünk az $\mathbb{R}$ halmaz elemei között. Ehhez legyenek $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ rögzítve, és tekintsük a

$$\lambda + \lambda' := \{r + r' | (r \in \lambda) \wedge (r' \in \lambda')\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy $\lambda + \lambda' \in \mathbb{R}$. Ha $\bar{r} \in \mathbb{Q}$ (illetve $\bar{r}' \in \mathbb{Q}$) a λ (illetve λ') felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban, akkor nyilvánvaló, hogy $\bar{r} + \bar{r}'$ a $\lambda + \lambda'$ halmaz felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban. Ezért $\lambda + \lambda'$-re (D_I) teljesül. Ha $r \in \lambda$ és $r' \in \lambda'$, akkor a (D_{II}) szerint létezik olyan $s \in \lambda$ és $s' \in \lambda'$, hogy $r < s$ és $r' < s'$; ekkor $r + r' < s + s' \in \lambda + \lambda'$, tehát $\lambda + \lambda'$-re (D_{II}) teljesül. Ha $r \in \lambda$, $r' \in \lambda'$ és $t \in \mathbb{Q}$ olyan, hogy $t < r + r'$, akkor $t - r < r'$, így $t - r \in \lambda'$, hiszen (D_{III}) teljesül λ'-re; ekkor viszont $t = r + (t - r) \in \lambda + \lambda'$, tehát $\lambda + \lambda'$-re (D_{III}) teljesül.

Ezzel értelmeztünk egy + műveletet $\mathbb{R}$-ben. Állítjuk, hogy + olyan *kommutatív csoportművelet* $\mathbb{R}$ felett, amelyre (KO_I) teljesül.

Ha $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ és $s \in (\lambda + \lambda') + \lambda''$, akkor van olyan $r \in \lambda$, $r' \in \lambda'$ és $r'' \in \lambda''$, hogy $s = (r + r') + r''$; ekkor a $\mathbb{Q}$ összeadásának asszociativitása miatt $s = r + (r' + r'') \in \lambda + (\lambda' + \lambda'')$, tehát $(\lambda + \lambda') + \lambda'' \subseteq \lambda + (\lambda' + \lambda'')$. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy minden $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda + (\lambda' + \lambda'') \subseteq (\lambda + \lambda') + \lambda''$, tehát az $\mathbb{R}$ feletti + művelet asszociatív.

Ha $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ és $s \in \lambda + \lambda'$, akkor van olyan $r \in \lambda$ és $r' \in \lambda'$, hogy $s = r + r'$; ekkor a $\mathbb{Q}$ összeadásának kommutativitása miatt $s = r' + r \in \lambda' + \lambda$, tehát $\lambda + \lambda' \subseteq \lambda' + \lambda$. Ez bármely két $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ elemre igaz, ezért fennáll a $\lambda' + \lambda \subseteq \lambda + \lambda'$ összefüggés is, így az $\mathbb{R}$ feletti + művelet kommutatív.

Legyen $\mathbf{0} := \{r \in \mathbb{Q} | r < 0\}$; világos, hogy $\mathbf{0} \in \mathbb{R}$. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$; ekkor $s \in \mathbf{0} + \lambda$ esetén van olyan $t \in \mathbf{0}$ és $r \in \lambda$, hogy $s = t + r < 0 + r = r$, így $s \in \lambda$. Láthatóan itt azt használtuk fel, hogy $\mathbb{Q}$-ban az összeadásra és a természetes rendezésre (KO_I), valamint λ-ra (D_{III}) teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{0} + \lambda \subseteq \lambda$. Megfordítva, ha $s \in \lambda$, akkor a (D_{II}) miatt van olyan $r \in \lambda$, hogy $s < r$; ekkor $s = (s - r) + r \in \mathbf{0} + \lambda$, így $\lambda \subseteq \mathbf{0} + \lambda$. Ezzel megmutattuk, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda = \mathbf{0} + \lambda$, tehát a + művelet kommutativitása miatt $\mathbf{0}$ a + műveletnek neutrális eleme.

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$; olyan $\lambda' \in \mathbb{R}$ elemet keresünk, amelyre $\lambda + \lambda' = \mathbf{0}$ teljesül. Két eset lehetséges.

- Tegyük fel, hogy λ-nak létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban, és legyen ez $\bar{r}$. Ekkor a $\lambda' :=]\leftarrow, -\bar{r}[$ intervallum $\mathbb{Q}$-ban olyan, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}$, és $\lambda + \lambda' = \mathbf{0}$ teljesül. Valóban, ha $r \in \lambda$ és $r' \in \lambda'$, akkor $r + r' < r + (-\bar{r}) \leq 0$, mert $\bar{r}$ felső korlátja λ-nak, ezért $r + r' \in \mathbf{0}$, ami azt jelenti, hogy $\lambda + \lambda' \subseteq \mathbf{0}$. Megfordítva, ha $s \in \mathbf{0}$, akkor $\bar{r} + s$ nem felső korlátja λ-nak, tehát van olyan $r \in \lambda$, hogy $\bar{r} + s < r$; ekkor $s = r + (s - r) \in \lambda + \lambda'$, mert $s - r < -\bar{r}$. Tehát $\mathbf{0} \subseteq \lambda + \lambda'$ is teljesül.

- Tegyük fel, hogy λ-nak nem létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban. Legyen

$$\lambda' := \{-r' | (r' \in \mathbb{Q}) \wedge (\forall r \in \lambda)(r \leq r')\},$$

vagyis λ' a λ felső korlátjai $\mathbb{Q}$-beli additív inverzeinek halmaza. Először igazoljuk, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}$. A λ' halmaz nem üres, mert λ felülről korlátos $\mathbb{Q}$-ban. Ha $r \in \lambda$, akkor $-r$ felső korlátja λ'-nek $\mathbb{Q}$-ban, tehát λ' felülről korlátos $\mathbb{Q}$-ban, mert $\lambda \neq \emptyset$. Ezért λ'-re (D_I) teljesül. Ha $s \in \lambda'$, és r' olyan felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, hogy $s = -r'$, akkor van olyan r'' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, hogy $r'' < r'$, különben r' a λ szuprémuma volna $\mathbb{Q}$-ban; ekkor $s = -r' < -r'' \in \lambda'$, tehát λ'-re (D_{II}) teljesül. Legyen $s \in \lambda'$, $t \in \mathbb{Q}$ és $t < s$; ekkor van olyan r' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, hogy $s = -r'$, tehát $r' = -s < -t$, vagyis $-t$ a felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, így $t = -(-t) \in \lambda'$. Ezért λ'-re (D_{III}) is teljesül, vagyis $\lambda' \in \mathbb{R}$. Most megmutatjuk, hogy $\lambda + \lambda' = \mathbf{0}$. Ha $r \in \lambda$ és r' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, akkor $r \leq r'$, tehát $r - r' \leq 0$, és $r - r' \neq 0$, különben r' a λ szuprémuma volna $\mathbb{Q}$-ban; ez azt jelenti, hogy $r + (-r') \in \mathbf{0}$, vagyis $\lambda + \lambda' \subseteq \mathbf{0}$. Megfordítva, legyen $s \in \mathbf{0}$ tetszőleges, vagyis $s \in \mathbb{Q}$ és $s < 0$. Rögzítsünk egy $r' \in \mathbb{Q}$ számot, amely a λ halmaznak felső korlátja. Ha $r \in \lambda$, akkor $-s > 0$ és a $\mathbb{Q}$ archimédészi rendezettsége folytán van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $r' - r < n \cdot (-s)$, így $r' + n \cdot s < r \in \lambda$, tehát $r' + n \cdot s$ *nem felső korlátja* λ-nak. Az $\mathbb{N}$ jólrendezettsége miatt létezik az a legkisebb $n \in \mathbb{N}$, amelyre $r' + n \cdot s$ nem felső korlátja λ-nak. Ekkor $r' + n \cdot s \in \lambda$, mert λ-ra (D_{III}) teljesül, ugyanakkor $n > 0$,

mert r' a λ-nak felső korlátja, tehát $r' + (n-1) \cdot s$ felső korlátja λ-nak. Ekkor a λ' definíciója szerint $-(r'+(n-1)\cdot s) \in \lambda'$, és $s = (r'+n\cdot s)+(-(r'+(n-1)\cdot s)) \in \lambda+\lambda'$, amivel igazoltuk, hogy $\mathbf{0} \subseteq \lambda + \lambda'$.

Ezzel beláttuk, hogy $+$ kommutatív csoportművelet $\mathbb{R}$ felett. Legyenek most $\lambda, \lambda', \sigma \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\lambda \leq \lambda'$. Ha $r \in \lambda$ és $s \in \sigma$, akkor $r \in \lambda'$, mert $\lambda \subseteq \lambda'$, tehát $r + s \in \lambda' + \sigma$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda + \sigma \subseteq \lambda' + \sigma$, vagyis az $\mathbb{R}$ feletti $+$ műveletre és $\leq$ rendezésre (KO_I) teljesül.

Jelölje $\mathbb{R}^+$ a $\mathbf{0}$-nál nagyobb valós számok, és $\mathbb{Q}^+$ a 0-nál nagyobb racionális számok halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \in \mathbb{R}^+$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$. Most egy műveletet értelmezünk az $\mathbb{R}^+$ halmaz felett; minden $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen:

$$\lambda \cdot \lambda' :=]\leftarrow, 0] \cup \{r \cdot r' | (r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+) \wedge (r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+)\}.$$

Először megmutatjuk, hogy $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ esetén $\lambda \cdot \lambda' \in \mathbb{R}^+$. Világos, hogy $\lambda \cdot \lambda'$ felülről korlátos $\mathbb{Q}$-ban, mert ha s (illetve s') a λ (illetve λ') felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban, akkor $s \cdot s'$ a $\lambda \cdot \lambda'$-nek felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban. Ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$, akkor van olyan $s \in \lambda$, hogy $r < s$, és van olyan $s' \in \lambda'$, hogy $r' < s'$; ekkor $s \cdot s' \in \lambda \cdot \lambda'$, és $r \cdot r' < s \cdot s'$, vagyis $\lambda \cdot \lambda'$-ra (D_{II}) teljesül. Ha $s \in \mathbb{Q}^+$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$ olyanok, hogy $s < r \cdot r'$, akkor $s/r < r'$ miatt $s/r \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$, és $s = r \cdot (s/r) \in \lambda \cdot \lambda'$, így $\lambda \cdot \lambda'$-re (D_{III}) teljesül, vagyis $\lambda \cdot \lambda' \in \mathbb{R}^+$.

Megmutatjuk, hogy a $\cdot$ művelet asszociatív. Ehhez legyenek $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}^+$ rögzítve, és legyen $s \in ((\lambda \cdot \lambda') \cdot \lambda'') \cap \mathbb{Q}^+$. Ekkor van olyan $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$, $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$ és $r'' \in \lambda'' \cap \mathbb{Q}^+$, hogy $s = (r \cdot r') \cdot r''$. De a $\mathbb{Q}$ feletti szorzás asszociativitása miatt $(r \cdot r') \cdot r'' = r \cdot (r' \cdot r'') \in (\lambda \cdot (\lambda' \cdot \lambda'')) \cap \mathbb{Q}^+$, így $(\lambda \cdot \lambda') \cdot \lambda'' \subseteq \lambda \cdot (\lambda' \cdot \lambda'')$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $\lambda \cdot (\lambda' \cdot \lambda'') \subseteq (\lambda \cdot \lambda') \cdot \lambda''$ is teljesül.

Igazoljuk azt, hogy a $\cdot$ művelet kommutatív. Ehhez legyenek $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ rögzítve, és legyen $s \in (\lambda \cdot \lambda') \cap \mathbb{Q}^+$. Ekkor van olyan $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$, hogy $s = r \cdot r'$. De a $\mathbb{Q}$ feletti szorzás kommutativitása miatt $r \cdot r' = r' \cdot r \in (\lambda' \cdot \lambda) \cap \mathbb{Q}^+$, így $\lambda \cdot \lambda' \subseteq \lambda' \cdot \lambda$. Ez bármely két $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ elemre igaz, ezért $\lambda \cdot \lambda' = \lambda' \cdot \lambda$.

Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{1} := \{r \in \mathbb{Q} | r < 1\} \in \mathbb{R}^+$ elem a $\cdot$ műveletnek neutrális eleme. Ehhez legyen $\lambda \in \mathbb{R}^+$, és legyen $s \in (\mathbf{1} \cdot \lambda) \cap \mathbb{Q}^+$. Van olyan $t \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}^+$ és $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$, hogy $s = t \cdot r$; ekkor $t < 1$ és $0 < r$ miatt $s < r$, így $s \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$, mert λ-ra (D_{III}) teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{1} \cdot \lambda \subseteq \lambda$. Megfordítva, legyen $s \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$; a ($\mathrm{D}_{II}$) miatt van olyan $r \in \lambda$, hogy $s < r$; ekkor $s/r \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}^+$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $s = (s/r) \cdot r \in (\mathbf{1} \cdot \lambda) \cap \mathbb{Q}^+$, amiből következik, hogy $\lambda \subseteq \mathbf{1} \cdot \lambda$.

Bebizonyítjuk, hogy a $\cdot$ művelet disztributív a $+$ művelet $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-ra vett leszűkítésére nézve. Ehhez legyenek $\sigma, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ rögzítve. Ha $s \in \sigma \cap \mathbb{Q}^+$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$, akkor $s \cdot (r + r') = s \cdot r + s \cdot r'$, mert a szorzás disztributív az összeadásra nézve $\mathbb{Q}$-ban; ugyanakkor $s \cdot r + s \cdot r' \in \sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda'$, így $\sigma \cdot (\lambda + \lambda') \subseteq \sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda'$. Megfordítva, legyen $t \in (\sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda') \cap \mathbb{Q}^+$ tetszőleges. Ekkor van olyan $s, s' \in \sigma$, $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$, hogy $t = s \cdot r + s' \cdot r'$. Ha $\bar{s} := max(s, s')$, akkor $\bar{s} \in \sigma$, és $t = s \cdot r + s' \cdot r' \leq \bar{s} \cdot (r + r') \in \sigma \cdot (\lambda + \lambda')$, így $\sigma \cdot \lambda + \sigma \cdot \lambda' \subseteq \sigma \cdot (\lambda + \lambda')$.

Megmutatjuk, hogy a $\cdot$ művelet szerint az $\mathbb{R}^+$ minden elemének van inverze (tehát $\cdot$ az $\mathbb{R}^+$ halmaz felett *kommutatív csoportművelet*). Legyen $\lambda \in \mathbb{R}^+$; olyan $\lambda' \in \mathbb{R}^+$ elemet keresünk, amelyre $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$ teljesül. Két eset lehetséges.

– Tegyük fel, hogy λ-nak létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban, és legyen ez $\bar{r}$. Ekkor a $\lambda' :=]\leftarrow, 1/\bar{r}[$ intervallum $\mathbb{Q}$-ban olyan, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}^+$, és $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$ teljesül. Valóban, ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r' \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$, akkor $r \cdot r' < r \cdot (1/\bar{r}) \leq 1$, mert $\bar{r}$ felső korlátja λ-nak, ezért $r \cdot r' \in \mathbf{1}$, ami azt jelenti, hogy $\lambda \cdot \lambda' \subseteq \mathbf{1}$. Megfordítva, ha $s \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}^+$, akkor $0 < s < 1$, így $s \cdot \bar{r}$ nem felső korlátja λ-nak, tehát van olyan $r \in \lambda$, hogy $s \cdot \bar{r} < r$; ekkor $s = r \cdot (s/r) \in \lambda \cdot \lambda'$, mert $s/r < 1/\bar{r}$; következésképpen $\mathbf{1} \subseteq \lambda \cdot \lambda'$ is teljesül.

– Tegyük fel, hogy λ-nak nem létezik szuprémuma $\mathbb{Q}$-ban. Legyen

$$\lambda' :=]\leftarrow, 0] \cup \{1/r' | (r' \in \mathbb{Q}^+) \wedge (\forall r \in \lambda)(r \leq r')\},$$

vagyis λ' a λ felső korlátjai $\mathbb{Q}$-beli multiplikatív inverzeinek halmaza, hozzávéve a $]\leftarrow, 0]$ intervallumot. Megmutatjuk, hogy $\lambda' \in \mathbb{R}^+$, és $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$ teljesül. Valóban, (D_I) teljesül λ'-re, mert ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$, akkor $1/r$ felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ'-nek. Ha $s \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$, akkor van olyan $r' \in \mathbb{Q}$ felső korlátja λ-nak, hogy $s = 1/r'$; ekkor létezik olyan $r'' \in \mathbb{Q}$, amely szintén felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak és $r'' < r'$ (különben r' a λ-nak szuprémuma volna $\mathbb{Q}$-ban); világos, hogy $s < 1/r'' \in \lambda'$, tehát λ'-re (D_{II}) is teljesül. Legyen $s \in \lambda' \cap \mathbb{Q}^+$ és $r \in \mathbb{Q}^+$ olyan, hogy $r < s$; ekkor van olyan $r' \in \mathbb{Q}$ felső korlátja λ-nak, hogy $s = 1/r'$, vagyis ekkor $1/s$ felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak. Ugyanakkor $1/s < 1/r$, tehát $1/r$ is felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, tehát $r = 1/(1/r) \in \lambda'$, vagyis λ'-re (D_{III}) is teljesül, így $\lambda' \in \mathbb{R}^+$. Azt kell még igazolni, hogy $\lambda \cdot \lambda' = \mathbf{1}$. Ha $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és r' felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban λ-nak, akkor $r < r'$ miatt $r \cdot (1/r') < 1$, ezért $\lambda \cdot \lambda' \subseteq \mathbf{1}$. Megfordítva, legyen $s \in \mathbf{1} \cap \mathbb{Q}^+$ tetszőleges, vagyis $s \in \mathbb{Q}$ és $0 < s < 1$; olyan $r \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r' \in \mathbb{Q}^+$ számokat keresünk, amelyekre r' a λ-nak felső korlátja $\mathbb{Q}$-ban, és $s \leq r/r'$. Ehhez legyen $r_0 \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$ és $r_0' \in \mathbb{Q}$ rögzített felső korlátja λ-nak. Értelmezzük a következő függvényt:

$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; \quad (r, r') \mapsto \begin{cases} (\frac{r+r'}{2}, r') & \text{, ha } \frac{r+r'}{2} \in \lambda \\ (r, \frac{r+r'}{2}) & \text{, ha } \frac{r+r'}{2} \notin \lambda \end{cases},$$

és vegyük az $(r_0, r_0') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozatot; jelölje ezt $((r_n, r_n')_{n \in \mathbb{N}})$. n szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $r_n \in \lambda \cap \mathbb{Q}^+$, $r_n \leq r_{n+1}$, $r_{n+1}' \leq r_n'$, $r_n' - r_n = \frac{r_0' - r_0}{2^n}$, és r_n' felső korlátja λ-nak. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$2^n > \frac{\left(\frac{r_0'}{r_0}\right) - 1}{1 - s}.$$

Ekkor

$$r_n' > r_n \geq r_0 > \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{r_0' - r_0}{1 - s}\right) = \frac{r_n' - r_n}{1 - s},$$

amiből azonnal kapjuk, hogy $s < r_n/r_n' \in \lambda \cdot \lambda'$. Ezért $s \in \lambda'$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{1} \subseteq \lambda \cdot \lambda'$, ilymódon λ' a λ inverze a $\cdot$ művelet szerint.

Most a $\cdot$ műveletet kiterjesztjük $\mathbb{R}$-re úgy, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda \cdot \mathbf{0} := \mathbf{0} \cdot \lambda := \mathbf{0},$$

továbbá minden $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén:

$$\lambda \cdot \lambda' := \begin{cases} -(\lambda \cdot (-\lambda')) & \text{, ha } \lambda > \mathbf{0} \text{ és } \lambda' < \mathbf{0} \\ -((-\lambda) \cdot \lambda') & \text{, ha } \lambda < \mathbf{0} \text{ és } \lambda' > \mathbf{0} \\ (-\lambda) \cdot (-\lambda') & \text{, ha } \lambda < \mathbf{0} \text{ és } \lambda' < \mathbf{0} \end{cases}.$$

Kissé hosszadalmas, de teljesen elemi, esetszétválasztásos módszerrel beláthatjuk, hogy $\cdot$ olyan művelet $\mathbb{R}$, hogy az $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ hármas test, továbbá természetesen a $\cdot$ műveletre (KO_{II}) teljesül, vagyis az $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ négyes teljesen rendezett test.

Legyen $(K, +, \cdot, \leq)$ teljesen rendezett test, és tekintsük az előző állításban értelmezett $f_K : K \to \mathbb{R};\ x \mapsto \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ bijekciót.

Ha $x, y \in K$ és $x \leq y$, akkor $r \in f_K(x)$ esetén $r < x$, ezért $r < y$, vagyis $r \in f_K(y)$, ami azt jelenti, hogy $f_K(x) \subseteq f_K(y)$. Megfordítva, ha $x, y \in K$ és $f_K(x) \subseteq f_K(y)$, akkor $y < x$ lehetetlen, különben a K archimédészi rendezettsége folytán létezne olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $y < r < x$, vagyis $r \in f_K(x)$, de $r \notin f_K(y)$, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy $x, y \in K$ és $f_K(x) \subseteq f_K(y)$ esetén $x \leq y$, következésképpen az f_K függvény rendezés-izomorfizmus a K és $\mathbb{R}$ rendezett halmazok között.

Legyenek $x, y \in K$ rögzítve. Ha $r \in f_K(x)$ és $s \in f_K(y)$, akkor $r < x$ és $s < y$, így $r + s < x + y$, tehát $r + s \in f_K(x + y)$, amiből az $\mathbb{R}$ feletti összeadás értelmezése alapján következik, hogy $f_K(x) + f_K(y) \subseteq f_K(x + y)$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $t \in f_K(x + y)$, vagyis $t \in \mathbb{Q}$ olyan, hogy $t < x + y$. Ekkor $t - y < x$, tehát a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $t - y < r < x$. Ekkor $r \in f_K(x)$ és $t - r < y$, így a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $s \in \mathbb{Q}$, amelyre $t - r < s < y$. Ekkor $s \in f_K(y)$ és $t < r + s \in f_K(x) + f_K(y)$, tehát a Dedekind-szeletek (D_{III}) tulajdonsága szerint $t \in f_K(x) + f_K(y)$. Ez azt jelenti, hogy $f_K(x + y) \subseteq f_K(x) + f_K(y)$, így az f_K függvény *additív*.

Legyenek most $x, y \in K$ olyanok, hogy $x > 0$ és $y > 0$. Ha $r \in f_K(x) \cap \mathbb{Q}^+$ és $s \in f_K(y) \cap \mathbb{Q}^+$, akkor $0 < r < x$ és $0 < s < y$, így $r \cdot s < x \cdot y$, tehát $r \cdot s \in f_K(x \cdot y)$, amiből az $\mathbb{R}^+$ feletti szorzás értelmezése alapján következik, hogy $f_K(x) \cdot f_K(y) \subseteq f_K(x \cdot y)$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $t \in f_K(x \cdot y)$, vagyis $t \in \mathbb{Q}$ olyan, hogy $t < x \cdot y$. Ekkor $t \cdot y^{-1} < x$, tehát a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $t \cdot y^{-1} < r < x$. Ekkor $r \in f_K(x)$ és $t \cdot r^{-1} < y$, így a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $s \in \mathbb{Q}$, amelyre $t \cdot r^{-1} < s < y$. Ekkor $s \in f_K(y)$ és $t < r \cdot s \in f_K(x) \cdot f_K(y)$, tehát a Dedekind-szeletek (D_{III}) tulajdonsága szerint $t \in f_K(x) \cdot f_K(y)$. Ez azt jelenti, hogy $f_K(x \cdot y) \subseteq f_K(x) \cdot f_K(y)$, így $f_K(x \cdot y) = f_K(x) \cdot f_K(y)$ teljesül, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ugyanakkor tetszőleges $x, y \in K$ elemekre:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,$$
$$x \cdot y = -(x \cdot (-y)) = -((-x) \cdot y) = (-x) \cdot (-y),$$

amiből az $\mathbb{R}$ feletti szorzás értelmezése alapján kapjuk, hogy f_K *multiplikatív*.

Legyen most $f : K \to \mathbb{R}$ tetszőleges olyan bijekció, amely additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó; megmutatjuk, hogy $f = f_K$. Ehhez legyen $L := \{x \in K | f(x) = f_K(x)\}$; azt kell igazolni, hogy $L = K$. Először is megjegyezzük, hogy az f és f_K additivitása miatt minden $x, y \in L$ esetén $x + y \in L$, továbbá

az f és f_K multiplikativitása miatt minden $x, y \in L$ esetén $x \cdot y \in L$ teljesül. Az f additivitásából következik, hogy $f(0) + f(0) = f(0 + 0) = f(0)$, ezért $f(0) = \mathbf{0} = f_K(0)$, vagyis $0 \in L$. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az f szürjektivitása miatt van olyan $x \in K$, amelyre $f(x) = \lambda$; ekkor az f multiplikativitása szerint $f(1) \cdot \lambda = f(1) \cdot f(x) = f(1 \cdot x) = f(x) = \lambda$, ezért $f(1) = \mathbf{1} = f_K(1)$, azaz $1 \in L$. Ebből teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $\mathbb{N} \subseteq L$, mert ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \in L$, akkor $n+1 \in L$. Ugyanakkor $x \in K$ esetén $f(x)+f(-x) = f(x+(-x)) = f(0) = \mathbf{0}$, tehát $f(-x) = -f(x)$. Ezért minden $x \in L$ esetén $-x \in L$ teljesül, következésképpen $\mathbb{Z} \subseteq L$. Ha $x \in K \setminus \{0\}$, akkor az f multiplikativitása miatt $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = \mathbf{1}$, következésképpen $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. Ebből kapjuk, hogy $x \in L \setminus \{0\}$ esetén $x^{-1} \in L$, így $\mathbb{Q} \subseteq L$, hiszen minden $q \in \mathbb{Z}$ és $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén $q, p \in L$ és $p^{-1} \in L$, tehát $q \cdot p^{-1} \in L$. Legyen most $x \in K$ tetszőleges. Láttuk, hogy $x = \sup_K\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ teljesül. Ekkor

$$f(x) = f(\sup_K\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}) = \sup_{\mathbb{R}} f\langle\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}\rangle =$$
$$= \sup_{\mathbb{R}}\{f(r) | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < x)\} = \bigcup_{(r\in\mathbb{Q})\wedge(r<x)} f(r) = \bigcup_{(r\in\mathbb{Q})\wedge(r<x)} f_K(r),$$

mert az f függvény izomorfizmus a K és $\mathbb{R}$ rendezett halmazok között. Tehát ha $s \in f(x) = \bigcup_{(r\in\mathbb{Q})\wedge(r<x)} f_K(r)$, akkor van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $r < x$ és $s \in f_K(r)$; ekkor $s < r$, így $s < x$, vagyis $s \in f_K(x)$. Ez azt jelenti, hogy $f(x) \subseteq f_K(x)$. Megfordítva, ha $s \in f_K(x)$, akkor $s < x$, tehát a K archimédészi rendezettsége miatt van olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $s < r < x$; ekkor $s \in f_K(r) \subseteq f(x)$, vagyis $s \in f(x)$, ami azt jelenti, hogy $f_K(x) \subseteq f(x)$. Ezzel megmutattuk, hogy $f = f_K$.

Ha most $(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ és $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ teljesen rendezett testek, akkor az előzőek alapján az $f_{K_2}^{-1} \circ f_{K_1} : K_1 \to K_2$ függvény additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó bijekció; tehát ilyen tulajdonságú függvény *létezik*. Ha $f : K_1 \to K_2$ tetszőleges olyan bijekció, amely additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó, akkor az $f_{K_2} \circ f : K_1 \to \mathbb{R}$ leképezés szintén additív, multiplikatív és szigorúan rendezés-tartó, így az előzőek szerint $f_{K_2}^{-1} \circ f = f_{K_1}$, tehát $f = f_{K_2} \circ f_{K_1}$, vagyis az ilyen tulajdonságú függvény *egyértelmű*. ■

Lemma. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén:

- ha $-1 \leq x$, akkor $1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$ (*elemi Bernoulli-egyenlőtlenség*),
- ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x$.

Bizonyítás. Mindkét állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Világos, hogy mindkét állítás igaz $n = 0$ esetén (tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ elemre).

Legyen $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq x$, $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $1+n\cdot x \leq (1+x)^n$ teljesül. Ekkor:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+n\cdot x)\cdot(1+x) = 1+(n+1)\cdot x+n\cdot x^2 \geq 1+(n+1)\cdot x,$$

mert $0 \leq 1 + x$ és rendezett testben a négyzetelemek pozitívak.

Legyen $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x$ teljesül. Ekkor:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \cdot (1 + x) \leq (1 + (2^n - 1) \cdot x) \cdot (1 + x) =$$
$$= 1 + (2^n - 1) \cdot x + x + (2^n - 1) \cdot x^2 \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x + x + (2^n - 1) \cdot x$$
$$= 1 + (2^{n+1} - 1) \cdot x,$$

mert $x \in [0,1]$ miatt $x^2 \leq x$. ■

A $\mathbb{Q}$ testben az $x^2 = y$ egyenlet általában még akkor sem oldható meg, ha y természetes szám (**16**. gyakorlat). Ezzel szemben a valós számok testében ez az egyenlet minden olyan $y \in \mathbb{R}$ számra megoldható, amely pozitív. Sőt még ennél is többet állíthatunk.

Állítás. Ha $y \in \mathbb{R}_+$, akkor minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}_+$, amelyre $x^n = y$ teljesül.

Bizonyítás. (I) Először teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra teljesül az, hogy minden $y \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $z \in \mathbb{R}^+$, amelyre $z^n < y$. Ez $n = 1$ esetén nyilvánvaló; tegyük fel, hogy teljesül n-re és legyen $y \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az indukciós hipotézis alapján van olyan $z_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $z_0^n < y$; ekkor a $z := \min(z_0, 1) \in \mathbb{R}^+$ valós szám olyan, hogy $z^{n+1} \leq z^n \leq z_0^n < y$, vagyis az állítás $n+1$-re is igaz.

(II) Legyenek $y \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített számok és $E := \{z \in \mathbb{R}^+ | z^n < y\}$. Az (I) alapján $E \neq \emptyset$; megmutatjuk, hogy E felülről korlátos $\mathbb{R}$-ben. Valóban, ha $z \in E$, akkor $z - 1 > -1$, tehát az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alapján $y > z^n = (1 + (z-1))^n \geq 1 + n \cdot (z-1)$, amiből azonnal kapjuk, hogy $z < 1 + \frac{y-1}{n}$, vagyis $1 + \frac{y-1}{n}$ felső korlátja E-nek. Az $\mathbb{R}$ *teljes* rendezettsége miatt létezik az $x := \sup(E)$ elem, és világos, hogy $x \in \mathbb{R}^+$.

Megmutatjuk, hogy $x^n \leq y$. Ehhez legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, hogy $0 < \varepsilon' < x$. Ekkor $x - \varepsilon' < x := \sup(E)$ miatt vehetünk olyan $z \in E$ elemet, amelyre $0 < x - \varepsilon' < z$. Ugyanakkor $-\varepsilon' \cdot x^{-1} \geq -1$, ezért az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} y > z^n > (x - \varepsilon')^n = x^n \cdot (1 - \varepsilon' \cdot x^{-1})^n \geq \\ \geq x^n \cdot (1 - \varepsilon' \cdot n \cdot x^{-1}) = x^n - \varepsilon' \cdot n \cdot x^{n-1}, \end{aligned}$$

tehát $x^n - y < \varepsilon' \cdot n \cdot x^{n-1}$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor van olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$, amelyre $\varepsilon' \cdot n \cdot x^{n-1} < \varepsilon$ és $\varepsilon' < x$ egyszerre teljesül; ekkor az előzőek alapján $x^n - y < \varepsilon$. Ebből következik, hogy $x^n \leq y$.

Megmutatjuk, hogy $y \leq x^n$. Ehhez legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, hogy $0 < \varepsilon' < x$. Világos, hogy $x + \varepsilon' \notin E$ és $\varepsilon' \cdot x^{-1} \in [0,1]$, így az előző lemma alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} y \leq (x + \varepsilon')^n = x^n \cdot (1 + \varepsilon' \cdot x^{-1})^n \leq \\ \leq x^n \cdot (1 + \varepsilon' \cdot (2^n - 1) \cdot x^{-1}) = x^n + \varepsilon' \cdot (2^n - 1) \cdot x^{n-1}, \end{aligned}$$

tehát $y - x^n \leq \varepsilon' \cdot (2^n - 1) \cdot x^{n-1}$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor van olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$, amelyre $\varepsilon' \cdot (2^n - 1) \cdot x^{n-1} < \varepsilon$ és $\varepsilon' < x$ egyszerre teljesül; ekkor az előzőek alapján $y - x^n < \varepsilon$. Ebből következik, hogy $y \leq x^n$.

Ezzel megmutattuk, hogy minden $y \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ számokhoz *létezik* olyan $x \in \mathbb{R}^+$, hogy $x^n = y$.

(III) Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén, ha $0 < x_1 < x_2$, akkor $0 < x_1^n < x_2^n$. Ebből azonnal következik, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $y \in \mathbb{R}^+$ esetén csak egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}^+$ létezhet, amelyre $x^n = y$. ■

Definíció. Ha $y \in \mathbb{R}_+$ és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, akkor $y^{1/n}$ vagy $y^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{y}$ jelöli azt az elemet $\mathbb{R}_+$-ban, amelyre $\left(y^{1/n}\right)^n = y$ teljesül, és $y^{1/n}$-t az y szám *n-edik pozitív gyökének* nevezzük.

A valós számtestben az $x^2 = y$ egyenlet nem oldható meg akkor, ha $y < 0$. Sőt ez az egyenlet semmilyen rendezett testben nem oldható meg negatív y esetén. Azonban könnyen megadhatjuk az $\mathbb{R}$ olyan "testbővítését", amelyben ez az egyenlet minden y-ra megoldható.

Állítás. Az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmazon értelmezzük a $+$ és $\cdot$ műveleteket úgy, hogy minden $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ párra:

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'),$$
$$(x, y) \cdot (x', y') := (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y).$$

Ekkor az $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ hármas olyan test, amelyben az $x^2 = -\mathbf{1}$ egyenlet megoldható, és a

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x, 0)$$

leképezés olyan injekció, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $j(x + y) = j(x) + j(y)$ és $j(x \cdot y) = j(x) \cdot j(y)$ teljesül.

Bizonyítás. A $+$ művelet asszociativitása és kommutativitása nyilvánvalóan következik az $\mathbb{R}$ feletti összeadás asszociativitásából és kommutativitásából. A $(0, 0)$ pár neutrális elem a $+$ műveletre nézve, és minden $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ esetén a $(-x, -y)$ pár az (x, y) inverze a $+$ műveletre nézve. Ezért a $+$ műveletre (K_I) teljesül.

A $\cdot$ művelet asszociativitása és kommutativitása nyilvánvalóan következik az $\mathbb{R}$ feletti szorzás asszociativitásából és kommutativitásából, továbbá az $\mathbb{R}$ feletti összeadás asszociativitásából és kommutativitásából, valamint abból, hogy az $\mathbb{R}$ feletti szorzás disztributív az $\mathbb{R}$ feletti összeadásra nézve. Az $(1, 0)$ pár neutrális elem a $\cdot$ műveletre nézve, és minden $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén, ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor $x^2 + y^2 > 0$ és az $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ pár az (x, y) inverze a $\cdot$ műveletre nézve. Ezért a $\cdot$ műveletre (K_{II}) teljesül.

A (K_{III}) is könnyen bizonyítható, felhasználva az $\mathbb{R}$ feletti műveletek tulajdonságait, tehát az $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ hármas test. Nyilvánvaló, hogy $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, és $(-1, 0)$ a multiplikatív neutrális elem additív inverze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ben, tehát az $i := (0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elem olyan, hogy $i^2 = -\mathbf{1}$.

Végül, a $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ leképezés tulajdonságai azonnal következnek az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ feletti műveletek definíciójából. ■

Definíció. Az előző állításban bevezetett $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ testet a *komplex számok testének* nevezzük és $\mathbb{C}$-vel jelöljük. A $\mathbb{C}$ elemeit (tehát a valós számpárokat) *komplex számoknak* nevezzük.

Látható, hogy a komplex számok teste felett nem létezik olyan rendezés, amellyel $\mathbb{C}$ rendezett test volna, azonban a $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{C}$ közötti kanonikus leképezés injektív, és nemcsak a $\mathbb{Q}$ test, hanem az $\mathbb{R}$ is azonosítható az $\mathbb{C}$ egy "résztestével" (**2**. gyakorlat). Ezért a továbbiakban azt írjuk, hogy $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, amin azt értjük, hogy $\mathbb{R}$ azonosul az $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmazzal.

Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor a z pár első (illetve második) komponensét a z komplex szám *valós* (illetve *képzetes*) *részének* nevezzük, és a $\mathfrak{Re}(z)$ (illetve $\mathfrak{Im}(z)$) szimbólummal jelöljük. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor a $(\mathfrak{Re}(z), -\mathfrak{Im}(z))$ komplex számot a z *konjugáltjának* nevezzük és ezt z^* vagy $\bar{z}$ jelöli.

Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor $z = \mathfrak{Re}(z) + i \cdot \mathfrak{Im}(z)$ teljesül, amin pontosan azt kell érteni, hogy $(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z)) = (\mathfrak{Re}(z), 0) + (0, 1) \cdot (\mathfrak{Im}(z), 0)$.

Később látni fogjuk, hogy $\mathbb{C}$-ben minden komplex együtthatós algebrai egyenlet megoldható, vagyis minden, legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak létezik komplex gyöke. Ez az *algebra alaptétele*, amit csak jóval később bizonyítunk, mert a bizonyítása eddig még nem érintett, nemtriviális analitikus tényeken alapul.

Gyakorlatok

1. A K test *karakterisztikáját* a következőképpen értelmezzük.

- Ha $j : \mathbb{Z} \to K$ a kanonikus leképezés, és van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre $j(n) = \mathbf{0}$, akkor a K karakterisztikája a

$$char(K) := \min\{n \in \mathbb{N}^+ | j(n) = \mathbf{0}\}$$

szám.

- Ha $j : \mathbb{Z} \to K$ a kanonikus leképezés, és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $j(n) \neq \mathbf{0}$, akkor a K karakterisztikája (definíció szerint) 0.

Mutassuk meg, hogy minden nem nulla karakterisztikájú test karakterisztikája *prímszám*, és minden p prímszámra az $\mathbb{F}_p$ maradékosztály-test karakterisztikája egyenlő p-vel. Ha K véges test, akkor $Card(K)$ prímszámhatvány.

2. A K test *résztestének* nevezünk minden olyan $L \subseteq K$ nem üres halmazt, amelyre minden $x, y \in L$ esetén $x + y \in L$, $x \cdot y \in L$ teljesül, továbbá minden $x \in L$ esetén $-x \in L$, és ha $x \neq \mathbf{0}$, akkor $x^{-1} \in L$. A K test *testbővítésének* nevezünk minden olyan testet, amelynek K részteste. Mutassuk meg, hogy ha L részteste K-nak, akkor az L halmaz a K műveleteinek $L \times L$-re vett leszűkítésével ellátva szintén test, és az L test additív (illetve multiplikatív) neutrális eleme ugyanaz, mint a K test additív (illetve multiplikatív) neutrális eleme. Egy test résztestei tetszőleges nem üres rendszerének a metszete is résztest. Speciálisan a K test *összes* résztesteinek metszete a K tartalmazás tekintetében legkisebb részteste.

3. A K testet *prímtestnek* nevezzük, ha K minden részteste egyenlő K-val, vagyis K-nak nincs nemtriviális részteste. Egy test pontosan akkor prímtest, ha izomorf $\mathbb{Q}$-val, vagy létezik olyan p prímszám, hogy izomorf $\mathbb{F}_p$-vel.

(*Útmutatás.* Ha P jelöli a K legkisebb résztestét, akkor P prímtest, és ha P karakterisztikája 0, akkor P izomorf $\mathbb{Q}$-val, ha pedig P karakterisztikája a p prímszám, akkor P izomorf $\mathbb{F}_p$-vel.)

4. Általánosítsuk a véges összegek és szorzatok értelmezését tetszőleges testbeli véges rendszerekre! Általánosítsuk a binomiális tételt is!

5. Ha a K test karakterisztikája a p prímszám, akkor minden $x, y \in K$ esetén:

$$(x + y)^p = x^p + y^p$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Az $(x + y)^p$ kifejezést a binomiális tétellel kifejtjük, és észrevesszük, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $k < p$, akkor $j(\binom{p}{k}) \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$, ahol $j : \mathbb{Z} \to K$ a kanonikus leképezés.)

6. Legyen $(R, +)$ kommutatív csoport, és jelölje $\mathbf{0}$ a $+$ művelet szerinti neutrális elemet, és minden $x \in R$ elemre jelölje $-x$ az x inverzét a $+$ művelet szerint. Legyen $\leq$ olyan lineáris rendezés R felett, amelyre teljesül az, hogy minden $x, y, z \in R$ esetén, ha $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z$. Legyen $R^+ := \{x \in R | x > \mathbf{0}\}$, és legyen $\cdot$ olyan művelet R^+ felett, amely disztributív a $+$ művelet R^+-ra vett leszűkítésére

nézve, és amelyre igaz az, hogy az **1**-gyel jelölt neutrális eleme **0**-tól különbözik. Ekkor teljesül az, hogy $x, y \in R^+$ esetén $x + y \in R^+$. Terjesszük ki a $\cdot$ műveletet R-re úgy, hogy minden $x \in R$ esetén legyen $x \cdot \mathbf{0} := \mathbf{0} \cdot x := \mathbf{0}$, továbbá minden $x, y \in R \setminus \{\mathbf{0}\}$ elemre:

$$x \cdot y := \begin{cases} -(x \cdot (-y)) & \text{, ha } x > \mathbf{0} \text{ és } y < \mathbf{0} \\ -((-x) \cdot y) & \text{, ha } x < \mathbf{0} \text{ és } y > \mathbf{0} \\ (-x) \cdot (-y) & \text{, ha } x < \mathbf{0} \text{ és } y < \mathbf{0} \end{cases}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(R, +, \cdot, \leq)$ *rendezett test*!

7. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan bijekció, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) = f(x)+f(y)$ és $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ (vagyis f *automorfizmusa* az $\mathbb{R}$ testnek), akkor $f = id_{\mathbb{R}}$. Adjuk meg a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ testek automorfizmusait is! Minden p prímszámra számítsuk ki az $\mathbb{F}_p$ maradékosztály-test automorfizmusait!

(*Útmutatás.* Az $\mathbb{R}$-ben minden pozitív elem négyzetelem, ezért ha f multiplikatív, akkor $f\langle\mathbb{R}_+\rangle \subseteq \mathbb{R}_+$. Ugyanilyen okok és az f bijektivitása miatt $f\langle\mathbb{R}_+\rangle \supseteq \mathbb{R}_+$ is teljesül. Tehát ha f az $\mathbb{R}$-nek automorfizmusa, akkor f szigorúan rendezéstartó, így a Dedekind-tétel alapján $f = id_{\mathbb{R}}$. A maradékosztály-testek automorfizmusainak kiszámításához használjuk fel az **5**. gyakorlatot!)

8. Be tudjuk-e bizonyítani a pozitív valós számok n-edik gyökének létezését n *szerinti teljes indukcióval*?

(*Útmutatás.* Jelölje $\mathcal{A}(n)$ azt a következő kijelentést:

$$(n \in \mathbb{N}^+) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in \mathbb{R}^+)(x^n = y).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A}(1)$ igaz; tegyük fel, hogy $\mathcal{A}(n)$ igaz, és legyen $y \in \mathbb{R}^+$ rögzített elem. Hogyan következtethetünk ekkor $\mathcal{A}(n+1)$-re? Hogyan tudjuk bizonyítani az $\mathcal{A}(1) \Rightarrow \mathcal{A}(2)$ implikációt?)

9. Mutassuk meg, hogy *minden* $y \in \mathbb{C}$ számra az $x^2 = y$ egyenlet megoldható $\mathbb{C}$-ben, vagyis minden komplex szám négyzetelem! Próbáljuk igazolni azt, hogy minden $y \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ számra az $x^n = y$ egyenlet megoldható $\mathbb{C}$-ben!

10. Legyen K test és $m \in \mathbb{Z}$ olyan, hogy az $x^2 = j(m)$ egyenlet *nem oldható meg* K-ban, ahol $j : \mathbb{Z} \to K$ a kanonikus leképezés. A $K \times K$ halmazon értelmezzük a $+$ és $\cdot$ műveleteket úgy, hogy minden $(x, y), (x', y') \in K \times K$ esetén:

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'),$$
$$(x, y) \cdot (x', y') := (x \cdot x' + j(m) \cdot y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x').$$

Ekkor a $(K \times K, +, \cdot)$ hármas olyan test, amelyben az $x^2 = j(m)$ egyenlet *megoldható*, és az

$$f : K \to K \times K; \quad x \mapsto (x, 0)$$

leképezés olyan injekció, hogy minden $x, y \in K$ elemre $f(x + y) = f(x) + f(y)$ és $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Ezt a testet $K[\sqrt{m}]$ jelöli, és K-t az f függvény által azonosítjuk a $K[\sqrt{m}]$ egy résztestével. A $K[\sqrt{m}]$ alakú testeket a K *kvadratikus* bővítéseinek nevezzük. Érdekes speciális esetek: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ és $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{R}[\sqrt{-1}] = \mathbb{C}$. A $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ test részteste $\mathbb{C}$-nek; ezt a *Gauss-féle számtestnek* nevezzük.

11. Legyen $\omega := \frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$ és értelmezzük az

$$\mathbb{E} := \{r + \omega \cdot s | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$$

halmazt.

a) $\omega^3 = 1$ és $\omega^2 = \frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$, továbbá fennáll az $1 + \omega^2 + \omega^3 = 0$ egyenlőség. Minden $z \in \mathbb{E}$ esetén *egyértelműen* léteznek olyan $r, s \in \mathbb{Q}$ számok, hogy $z = r + \omega \cdot s$.

b) Az $\mathbb{E}$ halmaz részteste $\mathbb{C}$-nek, tehát $\mathbb{E}$ a $\mathbb{C}$ műveleteinek leszűkítésével ellátva test; ezt nevezzük *Euler-féle számtestnek*.

c) Vizsgáljuk meg az n-edik gyökök létezésének problémáját az $\mathbb{E}$ testben!

12. (*Polinomok.*) Legyen K test és jelölje $K^{(\mathbb{N})}$ azon K-ban haladó P sorozatok halmazát, amelyekre az $\{n \in \mathbb{N} | P(n) \neq 0\}$ halmaz véges. A $K^{(\mathbb{N})}$ halmazon bevezetjük a következő $+$ és $\cdot$ műveleteket.

(i) $P, Q \in K^{(\mathbb{N})}$ esetén legyen $P + Q$ az a sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(P + Q)(n) := P(n) + Q(n).$$

(ii) $P, Q \in K^{(\mathbb{N})}$ esetén legyen $P \cdot Q$ az a sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(P \cdot Q)(n) := \sum_{k=0}^{n} P(k) \cdot Q(n-k).$$

Minden $P, Q \in K^{(\mathbb{N})}$ elemre $P + Q, P \cdot Q \in K^{(\mathbb{N})}$ teljesül, tehát $+$ és $\cdot$ valóban műveletek $K^{(\mathbb{N})}$ felett. A $(K^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ hármast a K *test feletti egyváltozós polinomok gyűrűjének* nevezzük, és $K^{(\mathbb{N})}$ elemeit K feletti (*egyváltozós*) *polinomoknak* nevezzük. Ha P polinom K felett és $n \in K$, akkor a $P(n) \in K$ elemet a P n-*edik együtthatójának* nevezzük.

a) A $K^{(\mathbb{N})}$ feletti $+$ művelet kommutatív csoportművelet és a $K^{(\mathbb{N})}$ feletti $\cdot$ művelet asszociatív, kommutatív, neutráliselemes, és disztributív a $+$ műveletre nézve. Ha $\mathbf{0}$ (illetve $\mathbf{1}$) jelöli a neutrális elemet a $+$ (illetve $\cdot$) művelet szerint, akkor teljesül az, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{0}(n) = 0$ és

$$\mathbf{1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } n = 0 \\ 0 & \text{, ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Azonban a $(K^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ hármas nem test!

b) Ha $P, Q \in K^{(\mathbb{N})}$, és $P \neq \mathbf{0}$ és $Q \neq \mathbf{0}$, akkor $P \cdot Q \neq \mathbf{0}$. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy a $K^{(\mathbb{N})}$ *zérusosztómentes* a $\cdot$ műveletre nézve.

c) Legyen $X \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ az a polinom, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$X(n) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } n = 1 \\ 0 & \text{, ha } n \neq 1. \end{cases}$$

Ekkor minden $k, n \in \mathbb{N}$ számra:

$$X^k(n) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } n = k \\ 0 & \text{, ha } n \neq k, \end{cases}$$

ezért minden $P \in K^{(\mathbb{N})}$ polinomra:

$$P = \sum_{k \in [P \neq 0]} P(k) \cdot X^k$$

teljesül, ahol $[P \neq 0] := \{n \in \mathbb{N} | P(n) \neq 0\}$ (és a konvenció szerint az üres halmazra vett összeg egyenlő 0-val).

d) Minden $c \in K$ elemre legyen $\mathbf{c} \in K^{(\mathbb{N})}$ az a polinom, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\mathbf{c}(n) = \begin{cases} c & \text{, ha } n = 0 \\ 0 & \text{, ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Ekkor az $f : K \to K^{(\mathbb{N})}$; $c \mapsto \mathbf{c}$ leképezés olyan injekció, hogy minden $a, b \in K$ esetén $f(a+b) = f(a) + f(b)$ és $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ teljesül; ezáltal a K halmaz, a műveleteivel együtt azonosul a $K^{(\mathbb{N})}$ egy részhalmazával, és a továbbiakban $c \in K$ esetén a $\mathbf{c}$ polinom helyett is a c jelet alkalmazzuk.

e) Minden $P \in K^{(\mathbb{N})}$ polinomra legyen $P_K : K \to K$ az a függvény, amelyre minden $x \in K$ esetén

$$P_K(x) := \sum_{k \in [P \neq 0]} P(k) \cdot x^k.$$

Ekkor a $K^{(\mathbb{N})} \to \mathscr{F}(K; K)$; $P \mapsto P_K$ leképezés olyan *injekció*, amelyre teljesül az, hogy minden $P, Q \in K^{(\mathbb{N})}$ polinomra és $x \in K$ elemre

$$(P + Q)_K(x) = P_K(x) + Q_K(x), \quad (P \cdot Q)_K(x) = P_K(x) \cdot Q_K(x).$$

A P_K alakú $K \to K$ függvényeket K feletti *polinomiális függvényeknek* nevezzük.

f) Egy $P \in K^{(\mathbb{N})}$ polinomot *nulladfokúnak* nevezünk, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $P(n) = 0$. Ha P nem nulladfokú polinom K felett, akkor létezik egyetlen olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $P(n) \neq 0$ és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k > n$, akkor $P(k) = 0$; ezt az n számot a P polinom *fokának* nevezzük és $\deg(P)$-vel jelöljük. Ha P nulladfokú polinom K felett, akkor $\deg(P) := 0$. Ha $P, Q \in K^{(\mathbb{N})}$, akkor $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$, továbbá, ha $P \neq \mathbf{0}$ és $Q \neq \mathbf{0}$, akkor $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

g) Ha $P, Q \in K^{(\mathbb{N})}$ és $Q \neq \mathbf{0}$, akkor egyértelműen léteznek olyan $R, S \in K^{(\mathbb{N})}$, hogy $P = S \cdot Q + R$ és $\deg(R) < \deg(Q)$ (*euklidészi polinomosztás*).

h) A $P \in K^{(\mathbb{N})}$ polinom *gyökének* nevezünk minden olyan $c \in K$ elemet, amelyre $P_K(c) = 0$ teljesül. Ha P polinom K felett, akkor a $c \in K$ elem pontosan akkor gyöke P-nek, ha létezik olyan Q polinom K felett, amelyre $P = (X - c) \cdot Q$ teljesül. Ha P polinom K felett, akkor a P gyökeinek halmaza *véges*, és a számossága kisebb-egyenlő a P fokánál.

i) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ *injektív* rendszer K-ban, valamint $(\beta_k)_{1 \leq k \leq n}$ *tetszőleges* rendszer K-ban. Ekkor létezik egyetlen olyan K feletti P polinom, amely

n-ed fokú és olyan, hogy minden $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ számra $P_K(\alpha_k) = \beta_k$ teljesül; ez a következő:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \left(\prod_{j=1, j \neq k}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j} \right)$$

(*Lagrange-féle interpolációs polinom*).

13. Azt mondjuk, hogy a K test *algebrailag zárt*, ha minden K feletti, nem nulladfokú polinomnak létezik gyöke K-ban. A $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ testek nem algebrailag zártak. (Később igazoljuk, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.) Véges test nem lehet algebrailag zárt.

(*Útmutatás.* Ha K véges test, akkor a

$$P := \mathbf{1} + \prod_{k \in K} (X - k)$$

polinom $Card(K)$-ad fokú, és nincs gyöke K-ban.)

14. A $\mathbb{Q}$ halmaz felett a természetes rendezésen kívül nem létezik olyan rendezés, amellyel $\mathbb{Q}$ rendezett test volna. Ha K test és $m \in \mathbb{Z}$ olyan *negatív* szám, hogy az $x^2 = j(m)$ egyenlet nem oldható meg K-ban (ahol $j : \mathbb{Z} \to K$ a kanonikus leképezés), akkor a $K[\sqrt{m}]$ kvadratikus testbővítés felett nem létezik olyan rendezés, amellyel $K[\sqrt{m}]$ rendezett test volna.

15. Az $\mathbb{R}$ test feletti $[\cdot]$ egészrész-függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal: minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén:

$$[x + y] - [x] - [y] \in \{0, 1\}$$
$$[x] - [y] - [x - y] \in \{0, 1\}$$
$$[x] + [x + y] + [y] \leq [2 \cdot x] + [2 \cdot y]$$
$$[nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right]$$
$$\left[\frac{[n \cdot x]}{n} \right] = [x].$$

Melyek ezek közül azok, amelyek tetszőleges archimédészi módon rendezett testre is érvényesek?

16. Ha $(x_i)_{i \in I}$ olyan véges rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $i \in I$ esetén $x_i \geq -1$, és minden $I \ni i, j$-re $x_i \cdot x_j \geq 0$ (vagyis az x_i számok *azonos előjelűek*), akkor

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i \in I} x_i$$

(*Bernoulli-egyenlőtlenség*).

17. Legyen P olyan nem nulladfokú polinom $\mathbb{R}$ felett, amelynek minden együtthatója egész szám, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $P(n) \in \mathbb{Z}$. Ha $P(\deg(P)) = 1$, akkor a P minden racionális gyöke egész szám. Ennek alkalmazásával igazoljuk, hogy ha

$n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $a^{1/n} \in \mathbb{Q}$, akkor van olyan $b \in \mathbb{N}$, amelyre $b^n = a$ teljesül.

18. *Algebrai számoknak* nevezzük azokat a komplex számokat, amelyek egész együtthatós polinomok gyökei; az algebrai számok halmazát $\mathbb{A}$ jelöli.

a) Az $\mathbb{A}$ halmaz *megszámlálhatóan végtelen* és $\{r + i \cdot s | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\} \subseteq \mathbb{A}$. Léteznek irracionális valós számok, amelyek algebrai számok.

b) Az algebrai számok halmaza *részteste* $\mathbb{C}$-nek.

19. Mutassuk meg, hogy egy rendezett test pontosan akkor archimédészi módon rendezett test, ha izomorf az $\mathbb{R}$ valamelyik rendezett résztestével. Továbbá, egy archimédészi módon rendezett test pontosan akkor teljesen rendezett, ha izomorf a valós számok testével.

(*Útmutatás.* Archimédészi módon rendezett test minden rendezett részteste nyilvánvalóan archimédészi módon rendezett. Másfelől, láttuk hogy ha K archimédészi módon rendezett test, akkor az $f_K : K \to \mathbb{R};\ x \mapsto \{r \in \mathbb{Q} | r < x\}$ leképezés injektív, művelet-tartó és szigorúan rendezés-tartó. Ez a leképezés pontosan akkor szürjektív (tehát izomorfizmus K és $\mathbb{R}$ között), ha K teljesen rendezett.)

2. Abszolút értékek és elemi topológiai tulajdonságok

Definíció. Minden $x \in \mathbb{R}$ számra legyen

$$x^+ := \max(x, 0); \quad x^- := \max(-x, 0); \quad |x| := \max(-x, x),$$

és az x^+ (illetve x^-, illetve $|x|$) számot az x valós szám *pozitív részének* (illetve *negatív részének*, illetve *abszolút értékének*) nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+ = \frac{1}{2} \cdot (|x| + x), \quad x^- = \frac{1}{2} \cdot (|x| - x)$$

teljesül. Továbbá, minden $x \in \mathbb{R}$ számra:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow x = x^+ \Leftrightarrow x^- = 0 \Leftrightarrow x = |x|.$$

Állítás. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$; $x \mapsto |x|$ függvény olyan, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:

(VA$_I$) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(VA$_{II}$) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(VA$_{III}$) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|x| = 0$ esetén $-x \leq |x| = 0$, így $0 \leq x$, ugyanakkor $x \leq 0$ is teljesül, ezért $x = 0$. Ebből következik a (VA$_I$) tulajdonság.

Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$; ekkor négy eset lehetséges:

– $x \geq 0$ és $y \geq 0$; ekkor $|x| = x$, $|y| = y$ és a (KO$_{II}$) alapján $x \cdot y \geq 0$, következésképpen $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$;

– $x \geq 0$ és $y < 0$; ekkor $|x| = x$, $|y| = -y$ és a (KO$_{II}$) alapján $-(x \cdot y) = x \cdot (-y) \geq 0$, következésképpen $x \cdot y \leq 0$, így $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$;

– $x < 0$ és $y \geq 0$; ekkor $|x| = -x$, $|y| = y$ és a (KO$_{II}$) alapján $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \geq 0$, következésképpen $x \cdot y \leq 0$, így $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$;

– $x < 0$ és $y < 0$; ekkor $|x| = -x$, $|y| = -y$ és a (KO$_{II}$) alapján $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) \geq 0$, következésképpen $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$,

így (VA$_{II}$) teljesül.

Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor teljesülnek az $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, $y \leq |y|$ és $-y \leq |y|$ egyenlőtlenségek, ezért a (KO$_I$) alapján $x + y \leq |x| + |y|$ és $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$ is igaz, amiből azonnal kapjuk (VA$_{III}$)-t. ■

Megjegyezzük, hogy a (VA$_{III}$) tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségnek* is nevezik.

Definíció. A K test feletti *abszolútérték-függvénynek* nevezünk minden olyan $K \to \mathbb{R}_+$; $x \mapsto |x|$ leképezést, amelyre az előző állításban megfogalmazott (VA$_I$),

(VA_{II}) és (VA_{III}) tulajdonságok teljesülnek minden $x, y \in K$ esetén. Az előző állításban értelmezett, $\mathbb{R}$ feletti abszolútérték-függvényt az $\mathbb{R}$ feletti *euklidészi* abszolútérték-függvénynek nevezzük.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha K test, akkor a

$$K \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x = 0 \\ 1 & \text{, ha } x \neq 0 \end{cases}$$

leképezés abszolútérték-függvény K felett; ezt nevezzük a K feletti *improprius* vagy *triviális* abszolútérték-függvénynek, és rendszerint az $|\cdot|_\infty$ szimbólummal jelöljük. Tehát minden test felett *létezik* abszolútérték-függvény. Világos, hogy az euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{R}$ felett nem az improprius abszolútérték-függvény.

Legyen $|\cdot|$ abszolútérték-függvény a K test felett. Ekkor:

a) $|\mathbf{1}|$=1, mert a (VA_{II}) alapján $|\mathbf{1}| = |\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}| = |\mathbf{1}| \cdot |\mathbf{1}|$, így $|\mathbf{1}| = 0$ vagy $|\mathbf{1}| = 1$, és az első eset lehetetlen, mert $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ és (VA_I) teljesül.

b) $|-\mathbf{1}| = 1$, mert az a) és (VA_{II}) alapján $1 = |\mathbf{1}| = |(-\mathbf{1}) \cdot (-\mathbf{1})| = |-\mathbf{1}| \cdot |-\mathbf{1}|$, tehát $|-\mathbf{1}|$ pozitív négyzetgyöke $\mathbb{R}$-ben az $x^2 = 1$ egyenletnek.

c) Minden $x \in K$ esetén $|-x| = |x|$, mert a b) és (VA_{II}) miatt $|-x| = |(-\mathbf{1}) \cdot x| = |-\mathbf{1}| \cdot |x| = |x|$.

d) Minden $x, y \in K$ elemre

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

teljesül, mert a háromszög-egyenlőtlenség és a c) alapján $|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$ és $|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$, így $|x| - |y| \leq |x - y|$ és $|y| - |x| \leq |x - y|$ egyszerre teljesül, tehát $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

e) Minden $x \in K \setminus \{\mathbf{0}\}$ elemre $|x^{-1}| = |x|^{-1}$, mert az a) és (VA_{II}) alapján $1 = |\mathbf{1}| = |x^{-1} \cdot x| = |x^{-1}| \cdot |x|$.

Az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény leszűkítése $\mathbb{Q}$-ra nyilvánvalóan abszolútérték-függvény a $\mathbb{Q}$ test felett; ezt nevezzük a $\mathbb{Q}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvénynek. A $\mathbb{Q}$ test felett sok egyéb abszolútérték-függvény is megadható (**1**. gyakorlat és III. fejezet 1. pont **15**. gyakorlat).

Lemma. (*Elemi Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség.*) Ha $(x_i)_{i \in I}$ és $(y_i)_{i \in I}$ $\mathbb{R}_+$-ban haladó véges rendszerek, akkor:

$$\sum_{i \in I} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i \in I} x_i^2} \sqrt{\sum_{i \in I} y_i^2}.$$

Bizonyítás. Rendezett testben négyzetelemek összege pozitív elem, ezért az $\mathbb{R}$ feletti szorzás asszociativitása, kommutativitása, valamint az összeadásra vonatkoztatott

disztributivitása folytán:

$$0 \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in I}(x_iy_j - x_jy_i)^2\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in I}(x_i^2y_j^2 + x_j^2y_i^2 - 2x_ix_jy_iy_j)\right) =$$

$$= \sum_{i\in I}\left(x_i^2\sum_{j\in I}y_j^2 + y_i^2\sum_{j\in I}x_j^2 - 2x_iy_i\sum_{j\in I}x_jy_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{i\in I}x_i^2\right)\left(\sum_{j\in I}y_j^2\right) + \left(\sum_{i\in I}y_i^2\right)\left(\sum_{j\in I}x_j^2\right) - 2\left(\sum_{i\in I}x_iy_i\right)\left(\sum_{j\in I}x_jy_j\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i\in I}x_i^2\right)\left(\sum_{i\in I}y_i^2\right) - 2\left(\sum_{i\in I}x_iy_i\right)^2,$$

tehát

$$\left(\sum_{i\in I}x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i\in I}x_i^2\right)\left(\sum_{i\in I}y_i^2\right),$$

amiből következik a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

Állítás. A $\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+;\ z \mapsto |z| := \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$ leképezés olyan abszolútérték-függvény a $\mathbb{C}$ test felett, amelynek $\mathbb{R}$-re vett leszűkítése egyenlő az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvénnyel.

Bizonyítás. Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén (VA_I) nyilvánvalóan igaz, és egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén (VA_{II}) teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség az elemi Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségből következik, mert ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &:= (\mathfrak{Re}(z_1 + z_2))^2 + (\mathfrak{Im}(z_1 + z_2))^2 = \\
&= (\mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2))^2 + (\mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2))^2 = \\
&= \mathfrak{Re}(z_1)^2 + 2\mathfrak{Re}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2) + \mathfrak{Re}(z_2)^2 + \mathfrak{Im}(z_1)^2 + 2\mathfrak{Im}(z_1)\mathfrak{Im}(z_2) + \mathfrak{Im}(z_2)^2 = \\
&=: |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(\mathfrak{Re}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2) + \mathfrak{Im}(z_1)\mathfrak{Im}(z_2)) \leq \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(|\mathfrak{Re}(z_1)||\mathfrak{Re}(z_2)| + |\mathfrak{Im}(z_1)||\mathfrak{Im}(z_2)|) \leq \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\sqrt{\mathfrak{Re}(z_1)^2 + \mathfrak{Im}(z_1)^2}\sqrt{\mathfrak{Re}(z_2)^2 + \mathfrak{Im}(z_2)^2} =: \\
&=: |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}$$

teljesül, tehát $|z_1 + z_1| \leq |z_1| + |z_2|$. ■

Definíció. Az előző állításban bevezetett $\mathbb{C}$ feletti abszolútérték-függvényt a komplex számok teste feletti *euklidészi* abszolútérték-függvénynek nevezzük, és ezt a továbbiakban az $|\cdot|$ szimbólummal jelöljük. A $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ halmazt az $\mathbb{U}$ szimbólummal jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy $z \in \mathbb{C}$ esetén $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Továbbá, minden komplex szám előáll $r \cdot u$ alakban, ahol $r \in \mathbb{R}_+$ és $u \in \mathbb{U}$ (ez a komplex számok *poláris felbontása*), hiszen ha $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, akkor $u := z/|z| \in \mathbb{U}$, $|z| \in \mathbb{R}_+$ és $z = |z| \cdot (z/|z|)$.

Jelölés. A továbbiakban a $\mathbb{K}$ szimbólum az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ szimbólumok jelölésére szolgál. Tehát ha egy kijelentés (akár több helyen) tartalmazza a $\mathbb{K}$ szimbólumot, akkor az adott kijelentés két állítás rövidítése; az egyiket úgy kapjuk, hogy a kijelentésben a $\mathbb{K}$ minden előfordulása helyére $\mathbb{R}$-t helyettesítünk, és a másikat úgy kapjuk, hogy a kijelentésben a $\mathbb{K}$ minden előfordulása helyére $\mathbb{C}$-t helyettesítünk.

Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{K}$ elemre:

$$B_r(x;\mathbb{K}) := \{x' \in \mathbb{K} \mid |x' - x| < r\};$$
$$\overline{B}_r(x;\mathbb{K}) := \{x' \in \mathbb{K} \mid |x' - x| \leq r\};$$

a $B_r(x;\mathbb{K})$ (illetve $\overline{B}_r(x;\mathbb{K})$) halmazt *$x$ középpontú, r sugarú nyílt* (illetve *zárt*) *gömbnek* nevezzük $\mathbb{K}$-ban. Rögzített $x \in \mathbb{K}$ esetén az x középpontú nyílt vagy zárt $\mathbb{K}$-beli gömböket az *x gömbi környezeteinek* nevezzük $\mathbb{K}$-ban.

Az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(x;\mathbb{R}) =]x - r, x + r[$ és $\overline{B}_r(x;\mathbb{R}) = [x - r, x + r]$. Továbbá, az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény egyenlő a $\mathbb{C}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{R}$-re vett leszűkítésével, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ számra $B_r(x;\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap B_r(x;\mathbb{C})$ és $\overline{B}_r(x;\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \overline{B}_r(x;\mathbb{C})$.

Definíció. Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt *korlátosnak* nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha létezik olyan $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $E \subseteq B_r(x;\mathbb{K})$.

Állítás. Teljesülnek a következő állítások.

a) A $\mathbb{K}$ minden korlátos részhalmazának minden részhalmaza korlátos $\mathbb{K}$-ban.

b) A $\mathbb{K}$ véges sok korlátos részhalmazának uniója korlátos $\mathbb{K}$-ban.

c) Egy $E \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor korlátos $\mathbb{R}$-ben, ha korlátos az $\mathbb{R}$ rendezése szerint.

d) Egy $E \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor korlátos $\mathbb{R}$-ben, ha korlátos $\mathbb{C}$-ben.

e) Egy $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor korlátos $\mathbb{K}$-ban, ha létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in E$ esetén $|x| < R$.

Bizonyítás. a) Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ korlátos halmaz, és $x \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $E \subseteq B_r(x;\mathbb{K})$, akkor a minden $H \subseteq E$ halmazra $H \subseteq B_r(x;\mathbb{K})$ teljesül, tehát H korlátos $\mathbb{K}$-ban.

b) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}$ korlátos részhalmazainak tetszőleges véges rendszere. Ha $I = \emptyset$, akkor $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \emptyset$ és az $\emptyset$ halmaz nyilvánvalóan korlátos $\mathbb{K}$-ban; ezért feltehető, hogy I nem üres. Minden $i \in I$ esetén E_i korlátos $\mathbb{K}$-ban, ezért kiválasztható, olyan $(x_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban és olyan $(r_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \subseteq B_{r_i}(x_i;\mathbb{K})$ (és az I végessége miatt ehhez *nem szükséges* a kiválasztási axiómára hivatkozni). Legyen $x \in \mathbb{K}$ tetszőlegesen rögzített pont. Ha $x' \in \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x' \in E_i \subseteq B_{r_i}(x_i;\mathbb{K})$, vagyis $|x' - x_i| < r_i$, tehát a háromszög-egyenlőtlenség alapján $|x' - x| \leq |x' - x_i| + |x_i - x| < r_i + |x_i - x|$. Ez azt jelenti, hogy az $r := \max\limits_{i\in I}(r_i + |x_i - x|) \in \mathbb{R}^+$ szám olyan, hogy $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \subseteq B_r(x;\mathbb{K})$, vagyis $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$ korlátos $\mathbb{K}$-ban.

c) Ha az $E \subseteq \mathbb{R}$ halmaz korlátos $\mathbb{R}$-ben, akkor van olyan $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $E \subseteq B_r(x;\mathbb{R}) =]x-r, x+r[$; ekkor $x-r$ alsó és $x+r$ felső korlátja E-nek, tehát E korlátos az $\mathbb{R}$ természetes rendezése szerint. Megfordítva, ha $E \subseteq \mathbb{R}$ korlátos az $\mathbb{R}$ természetes rendezése szerint, akkor léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy $a < b$ és $E \subseteq]a, b[$; ekkor az $x := \frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}$ és $r := \frac{b-a}{2} \in R^+$ számokra teljesül az, hogy $]a, b[= B_r(x;\mathbb{R})$, így $E \subseteq B_r(x;\mathbb{R})$, vagyis E korlátos $\mathbb{R}$-ben.

d) Ha $E \subseteq \mathbb{R}$ korlátos $\mathbb{R}$-ben, akkor van olyan olyan $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $E \subseteq B_r(x;\mathbb{R})$; ekkor $B_r(x;\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap B_r(x;\mathbb{C})$ miatt $E \subseteq B_r(x;\mathbb{C})$ is teljesül, tehát E korlátos $\mathbb{C}$-ben. Megfordítva, ha $E \subseteq \mathbb{R}$ és E korlátos $\mathbb{C}$-ben akkor van olyan $z \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $E \subseteq B_r(z;\mathbb{C})$; ekkor $x \in E$ esetén $|x - \mathfrak{Re}(z)| = |\mathfrak{Re}(x-z)| \leq |x-z| < r$, vagyis $E \subseteq B_r(\mathfrak{Re}(z), \mathbb{R})$, így E korlátos $\mathbb{R}$-ben.

e) Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ korlátos $\mathbb{K}$-ban és $x \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{R}^+$ olyan elemek, hogy $E \subseteq B_r(x;\mathbb{K})$, akkor minden $x' \in E$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség szerint $|x'| = |x + (x'-x)| \leq |x| + |x'-x| < |x| + r$, tehát az $R := |x| + r \in \mathbb{R}^+$ számra igaz az, hogy minden $x' \in E$ esetén $|x'| < R$. Megfordítva, ha $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $x \in E$ esetén $|x| < R$, akkor $E \subseteq B_R(0;\mathbb{K})$, tehát E korlátos $\mathbb{K}$-ban. ■

Definíció. Egy $\mathbb{K}$-ba érkező f függvényt *korlátosnak* nevezünk, ha az $Im(f) \subseteq \mathbb{K}$ halmaz korlátos $\mathbb{K}$-ban.

Az előző állítás e) pontja szerint nyilvánvaló, hogy ha T halmaz és $f : T \to \mathbb{K}$ függvény, akkor az f korlátosságához szükséges és elégséges olyan $R > 0$ valós szám létezése, amelyre minden $t \in T$ esetén $|f(t)| < R$ teljesül.

Definíció. Az $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ halmazt *nyíltnak* nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha minden $x \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \Omega$ teljesül. Az $F \subseteq \mathbb{K}$ halmazt *zártnak* nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha a $\mathbb{K} \setminus F$ halmaz nyílt $\mathbb{K}$-ban.

Vigyázzunk arra, hogy a zártság *nem tagadása* a nyíltságnak; léteznek olyan részhalmazai $\mathbb{K}$-nak, amelyek egyszerre nyíltak és zártak (röviden: nyílt-zártak), továbbá $\mathbb{K}$-nak van sok olyan részhalmaza, amely se nem nyílt, se nem zárt.

Állítás. A $\mathbb{K}$-ban minden nyílt (illetve zárt) gömb nyílt (illetve zárt) halmaz. $\mathbb{R}$-ben a nyílt (illetve zárt) intervallumok nyílt (illetve zárt) halmazok.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ rögzítve. Ha $x' \in B_r(x;\mathbb{K})$, akkor $|x'-x| < r$, ezért a háromszög-egyenlőtlenség alapján bármely $\varepsilon \in]0, r - |x'-x|[$ számra teljesül az, hogy $B_\varepsilon(x', \mathbb{K}) \subseteq B_r(x;\mathbb{K})$, tehát $B_r(x;\mathbb{K})$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Ha $x' \in \mathbb{K} \setminus \overline{B}_r(x;\mathbb{K})$, akkor $|x'-x| > r$, ezért a háromszög-egyenlőtlenség alapján bármely $\varepsilon \in]0, |x'-x| - r[$ számra teljesül az, hogy $B_\varepsilon(x', \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus \overline{B}_r(x;\mathbb{K})$, tehát $\mathbb{K} \setminus \overline{B}_r(x;\mathbb{K})$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így $\overline{B}_r(x;\mathbb{K})$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban. ■

Állítás. A $\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak halmazára teljesülnek a következők:

(O_I) $\emptyset$ és $\mathbb{K}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban.

(O_{II}) $\mathbb{K}$-ban nyílt halmazok tetszőleges nem üres véges rendszerének a metszete nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban.

(O_{III}) $\mathbb{K}$-ban nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban.

Bizonyítás. Az (O_I) nyilvánvalóan igaz. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak nem üres véges rendszere, és legyen $x \in \bigcap_{i\in I} \Omega_i$. Minden $i \in I$ esetén Ω_i nyílt $\mathbb{K}$-ban és $x \in \Omega_i$, ezért kiválasztható olyan $(r_i)_{i\in I}$ rendszer R^+-ban, amelyre minden $i \in I$ indexre $B_{r_i}(x;\mathbb{K}) \subseteq \Omega_i$ teljesül. Ekkor az $r := \min_{i\in I} r_i \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \bigcap_{i\in I} B_{r_i}(x;\mathbb{K}) \subseteq \bigcap_{i\in I} \Omega_i$, tehát $\bigcap_{i\in I} \Omega_i$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így (O_{II}) teljesül.

Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak tetszőleges rendszere, és $x \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, akkor van olyan $j \in I$, amelyre $x \in \Omega_j$; ekkor az Ω_j nyíltsága miatt van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \Omega_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, vagyis a $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ halmaz nyílt $\mathbb{K}$-ban, így (O_{III}) teljesül. ■

Következmény. A $\mathbb{K}$ zárt részhalmazainak halmazára teljesülnek a következők:

(C_I) $\emptyset$ és $\mathbb{K}$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban.

(C_{II}) $\mathbb{K}$-ban zárt halmazok tetszőleges véges rendszerének az uniója zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban.

(C_{III}) $\mathbb{K}$-ban zárt halmazok tetszőleges nem üres rendszerének a metszete zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban.

Bizonyítás. Ha $(F_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres halmazrendszer, akkor a de Morgan azonosságok szerint:

$$\mathbb{K} \setminus \bigcup_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} (\mathbb{K} \setminus F_i); \quad \mathbb{K} \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{K} \setminus F_i)$$

(I. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat), így az állítás azonnal következik a zárt halmazok definíciójából és az előző állításból. ■

Azonban végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, és végtelen sok zárt halmaz uniója nem feltétlenül zárt. Az viszont nyilvánvaló, hogy ha $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt és $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, akkor $\Omega \setminus F = \Omega \cap (\mathbb{K} \setminus F)$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, mert két nyílt halmaz metszete, továbbá $F \setminus \Omega = F \cap (\mathbb{K} \setminus \Omega)$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, mert két zárt halmaz metszete. Speciálisan; $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$S_r(x;\mathbb{K}) := \{x' \in \mathbb{K} | |x' - x| = r\}$$

halmaz zárt $\mathbb{K}$-ban, mert egyenlő a $\overline{B}_r(x;\mathbb{K}) \setminus B_r(x;\mathbb{K})$ halmazzal (az $S_r(x;\mathbb{K})$ halmazt az *x középpontú, r sugarú gömbfelületnek* nevezzük $\mathbb{K}$-ban).

Állítás. Minden $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazhoz egyértelműen létezik az a nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott nyílt részhalmazt tartalmaz. Továbbá, minden $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazhoz egyértelműen létezik az a zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó $\mathbb{K}$-beli zárt halmaznak részhalmaza.

Bizonyítás. Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ és $\mathcal{O} := \{\Omega \subseteq \mathbb{K} | (\Omega \text{ nyílt } \mathbb{K}\text{-ban}) \wedge (\Omega \subseteq E)\}$. Ekkor az ($O_{III}$) miatt $\bigcup \mathcal{O}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, $\bigcup \mathcal{O} \subseteq E$, és ha $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor

a $\mathcal{O}$ definíciója szerint $\Omega \in \mathcal{O}$, tehát $\Omega \subseteq \bigcup \mathcal{O}$. Ezért $\bigcup \mathcal{O}$ az a nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott részhalmazt tartalmaz.

Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ és $\mathscr{F} := \{F \subseteq \mathbb{K} | (F \text{ zárt } \mathbb{K}\text{-ban}) \wedge (E \subseteq F)\}$. Ekkor $\mathscr{F} \neq \emptyset$, mert $\mathbb{K} \in \mathscr{F}$, így a $\bigcap \mathscr{F} := \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} F$ halmaz jól értelmezett, és a (C_{III}) miatt zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, továbbá $E \subseteq \bigcap \mathscr{F}$, és ha $F \subseteq \mathbb{K}$ olyan zárt halmaz, hogy $E \subseteq F$, akkor a $\mathscr{F}$ definíciója szerint $F \in \mathscr{F}$, tehát $\bigcap \mathscr{F} \subseteq F$. Ezért $\bigcap \mathscr{F}$ az a zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó zárt halmaznak részhalmaza. ■

Definíció. Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *belsejének* (illetve *lezártjának*) nevezzük $\mathbb{K}$-ban azt a tartalmazás tekintetében legnagyobb (illetve legkisebb) nyílt (illetve zárt) halmazt $\mathbb{K}$-ban, amely részhalmaza E-nek (illetve tartalmazza E-t). Az E halmaz belsejét (illetve lezártját) $\mathbb{K}$-ban az $\overset{\circ}{E}$ vagy $Int(E)$ (illetve $\overline{E}$ vagy $Cl(E)$) szimbólummal jelöljük. Az $\overset{\circ}{E}$ (illetve $\overline{E}$) elemeit az E *belső* (illetve *érintési*) *pontjainak* nevezzük.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazra; az E pontosan akkor nyílt (illetve zárt) $\mathbb{K}$-ban, ha $E = \overset{\circ}{E}$ (illetve $E = \overline{E}$).

Állítás. Korlátos halmaz lezártja korlátos.

Bizonyítás. Ha $E \subseteq \mathbb{K}$ korlátos halmaz, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, illetve $x \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyekre $E \subseteq B_r(x; \mathbb{K})$, akkor $B_r(x; \mathbb{K}) \subseteq \overline{B}_r(x; \mathbb{K})$ és a $\overline{B}_r(x; \mathbb{K})$ halmaz zártsága folytán $\overline{E} \subseteq \overline{B}_r(x; \mathbb{K})$ is teljesül. Ekkor bármely $s \in \mathbb{R}^+$ számra, ha $r < s$, akkor $\overline{E} \subseteq B_s(x; \mathbb{K})$, így $\overline{E}$ is korlátos halmaz. ■

Állítás. (*A belső pontok és érintési pontok jellemzése gömbi környezetekkel.*) Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.

- Az x pont akkor és csak akkor belső pontja E-nek, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x; \mathbb{K}) \subseteq E$.

- Az x pont akkor és csak akkor érintési pontja E-nek, ha minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(x; \mathbb{K}) \cap E \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Ha x belső pontja E-nek, akkor $x \in \overset{\circ}{E}$ és $\overset{\circ}{E}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x; \mathbb{K}) \subseteq \overset{\circ}{E} \subseteq E$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(x; \mathbb{K}) \subseteq E$, akkor $x \in B_r(x; \mathbb{K}) \subseteq \overset{\circ}{E}$, mert a $B_r(x; \mathbb{K})$ gömb nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így x belső pontja E-nek.

Ha x *nem* érintési pontja E-nek, akkor $x \in \mathbb{K} \setminus \overline{E}$, és a definíció szerint $\mathbb{K} \setminus \overline{E}$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_r(x; \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus \overline{E}$; ekkor teljesül az, hogy $B_r(x; \mathbb{K}) \cap E = \emptyset$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy $B_r(x; \mathbb{K}) \cap E = \emptyset$, akkor $\mathbb{K} \setminus B_r(x; \mathbb{K})$ olyan zárt halmaz, amely tartalmazza E-t, így $\overline{E}$-t is, ugyanakkor $x \notin \mathbb{K} \setminus B_r(x; \mathbb{K})$, következésképpen $x \notin \overline{E}$, így x *nem* érintési pontja E-nek. ■

Állítás. Ha $x \in \mathbb{K}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $\overline{B_r(x; \mathbb{K})} = \overline{B}_r(x; \mathbb{K})$.

Bizonyítás. A $\overline{B}_r(x; \mathbb{K})$ halmaz zárt és tartalmazza $B_r(x; \mathbb{K})$-t, ezért a lezárt definíciója szerint $\overline{B_r(x; \mathbb{K})} \subseteq \overline{B}_r(x; \mathbb{K})$.

Legyen $F \subseteq \mathbb{K}$ olyan zárt halmaz, hogy $B_r(x;\mathbb{K}) \subseteq F$. Ekkor $\mathbb{K} \setminus F \subseteq \mathbb{K} \setminus B_r(x;\mathbb{K})$, ezért $x' \in \mathbb{K} \setminus F$ esetén $|x'-x| \geq r$, ugyanakkor a $\mathbb{K} \setminus F$ nyíltsága miatt van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus F$; megmutatjuk, hogy ekkor $|x'-x| \geq r+\varepsilon$ is teljesül. Ha ugyanis ez nem volna igaz, akkor $1 - \frac{\varepsilon}{|x'-x|} < \frac{r}{|x'-x|} \leq 1$ teljesülne, tehát

$$\left]0, \frac{r}{|x'-x|}\right[\cap \left]1 - \frac{\varepsilon}{|x'-x|}, 1\right[\neq \emptyset.$$

Ha t eleme ennek a halmaznak, akkor az $x_t := (1-t)x + tx' \in \mathbb{K}$ pontra $|x - x_t| = t|x-x'| < r$ és $|x'-x_t| = (1-t)|x-x'| < \varepsilon$ teljesül, tehát a háromszög-egyenlőtlenség szerint $x_t \in B_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \cap B_r(x;\mathbb{K})$, holott $B_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus F \subseteq \mathbb{K} \setminus B_r(x;\mathbb{K})$ miatt $B_\varepsilon(x';\mathbb{K}) \cap B_r(x;\mathbb{K}) = \emptyset$. Ebből következik, hogy $x' \in \mathbb{K} \setminus F$ esetén $|x'-x| > r$, azaz $x' \in \mathbb{K} \setminus \overline{B}_r(x;\mathbb{K})$. Másként fogalmazva: $\overline{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq F$ teljesül minden olyan $F \subseteq \mathbb{K}$ olyan zárt halmazra, amelyre $B_r(x;\mathbb{K}) \subseteq F$, így a lezárt definíciója szerint $\overline{B}_r(x;\mathbb{K}) \subseteq \overline{B_r(x;\mathbb{K})}$. ■

Állítás. Ha $E \subseteq \mathbb{R}$ nem üres felülről (illetve alulról) korlátos halmaz, akkor $\sup(E) \in \overline{E}$ (illetve $\inf(E) \in \overline{E}$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E felülről korlátos. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sup(E) - r$ nem felső korlátja E-nek, ezért van olyan $x \in E$, amelyre $\sup(E) - r < x$; ekkor $\sup(E) - r < x \leq \sup(E) < \sup(E) + r$, így $E \cap B_r(\sup(E);\mathbb{K}) \neq \emptyset$, így az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $\sup(E) \in \overline{E}$.

Tegyük fel, hogy E alulról korlátos. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $\inf(E) + r$ nem alsó korlátja E-nek, ezért van olyan $x \in E$, amelyre $x < \inf(E) + r$; ekkor $\inf(E) - r < \inf(E) \leq x < \inf(E) + r$, így $E \cap B_r(\inf(E);\mathbb{K}) \neq \emptyset$, így az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $\inf(E) \in \overline{E}$. ■

Definíció. Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt *sűrűnek* nevezzük $\mathbb{K}$-ban, ha $\overline{E} = \mathbb{K}$.

Állítás. A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű $\mathbb{R}$-ben, és az $\{r + is | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$ halmaz sűrű $\mathbb{C}$-ben. Létezik *megszámlálható* sűrű halmaz $\mathbb{K}$-ban.

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor az $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettsége miatt $\mathbb{Q} \cap]x-r, x+r[\neq \emptyset$, vagyis $\mathbb{Q} \cap B_r(x;\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján ez azzal egyenértékű, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, vagyis $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ha $z \in \mathbb{C}$ és $\rho \in \mathbb{R}^+$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$B_{\rho/\sqrt{2}}(\mathfrak{Re}(z);\mathbb{R}) \times B_{\rho/\sqrt{2}}(\mathfrak{Im}(z);\mathbb{R}) \subseteq B_\rho(z;\mathbb{C}),$$

és $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben, ezért léteznek olyan $r, s \in \mathbb{Q}$ számok, hogy $r \in B_{\rho/\sqrt{2}}(\mathfrak{Re}(z);\mathbb{R})$ és $s \in B_{\rho/\sqrt{2}}(\mathfrak{Im}(z);\mathbb{R})$, így $r + is \in B_\rho(z;\mathbb{C})$. Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján ez azzal egyenértékű, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ érintési pontja az $\{r + is | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$ halmaznak.

A $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$; $(r,s) \mapsto r + is$ függvény *ráképez* az $\{r + is | (r \in \mathbb{Q}) \wedge (s \in \mathbb{Q})\}$ halmazra, ezért ez utóbbi kisebb-egyenlő számosságú $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$-nál, amely megszámlálható. ■

Definíció. Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *torlódási pontjának* nevezünk minden olyan $x \in \mathbb{K}$ pontot, amelyre $x \in \overline{E \setminus \{x\}}$ teljesül.

Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján nyilvánvaló, hogy egy $x \in \mathbb{K}$ pont akkor és csak akkor torlódási pontja az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaznak, ha minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra $(E \setminus \{x\}) \cap B_r(x; \mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis az x minden gömbi környezetében van az E-nek *x-től különböző* pontja. Világos, hogy egy halmaz minden torlódási pontja érintési pont is, de ennek megfordítása általában nem igaz.

Definíció. Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz *izolált pontjának* nevezzük az E minden olyan érintési pontját, amely nem torlódási pontja E-nek. Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt *diszkrétnek* nevezzük, ha az E minden pontja izolált pontja E-nek.

Tehát egy $x \in \mathbb{K}$ pont akkor és csak akkor izolált pontja az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaznak, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $E \cap B_r(x; \mathbb{K}) = \{x\}$. Speciálisan; az E minden izolált pontja szükségképpen eleme E-nek.

Tétel. (*Cantor-féle közösrész tétel $\mathbb{R}$-re.*) Legyen $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $\alpha \in A$ esetén $F_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, korlátos és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy minden $\alpha \in A$ és $\beta \in A$ esetén van olyan $\gamma \in A$, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$. Ekkor $A \neq \emptyset$ esetén $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$ teljesül.

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}$ teljes rendezettsége miatt minden $\alpha \in A$ esetén képezhetjük a $\sup(F_\alpha) \in \mathbb{R}$ és $\inf(F_\alpha) \in \mathbb{R}$ elemeket. Ha $\alpha \in A$ és $\beta \in A$, akkor $\inf(F_\beta) \leq \sup(F_\alpha)$, mert ha $\gamma \in A$ olyan, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$, akkor:

$$\inf(F_\beta) \leq \inf(F_\gamma) \leq \sup(F_\gamma) \leq \sup(F_\alpha).$$

Ebből következik, hogy a $\{\sup(F_\alpha) | \alpha \in A\}$ halmaz *alulról korlátos*, hiszen minden $\beta \in A$ esetén $\inf(F_\beta)$ alsó korlátja ennek a halmaznak (és persze $A \neq \emptyset$). Ismét az $\mathbb{R}$ teljes rendezettségére hivatkozva képezhetjük az $x := \inf\{\sup(F_\alpha) | \alpha \in A\} \in \mathbb{R}$ pontot. Meg fogjuk mutatni, hogy $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$.

Legyen $\alpha \in A$ rögzítve; azt akarjuk megmutatni, hogy $x \in F_\alpha$. E helyett elég azt igazolni, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $]x - r, x + r[\cap F_\alpha \neq \emptyset$, hiszen az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján ez azt jelenti, hogy $x \in \overline{F_\alpha}$, vagyis $x \in F_\alpha$, mert F_α zárt.

Legyenek tehát $\alpha \in A$ és $r \in \mathbb{R}^+$ rögzítve. A definíció szerint x a $\{\sup(F_\beta) | \beta \in A\}$ halmaz legnagyobb alsó korlátja, ezért $x + r$ nem alsó korlát, így létezik olyan $\beta \in A$, amelyre $\sup(F_\beta) < x + r$. Legyen $\gamma \in A$ olyan, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$. Ekkor $\sup(F_\gamma) - r$ nem felső korlátja F_γ-nak, tehát van olyan $y \in F_\gamma$, amelyre $\sup(F_\gamma) - r < y$. Világos, hogy

$$x - r \leq \sup(F_\gamma) - r < y \leq \sup(F_\gamma) \leq \sup(F_\beta) < x + r,$$

tehát $y \in]x - r, x + r[$, ugyanakkor $y \in F_\gamma \subseteq F_\alpha$, vagyis $y \in]x - r, x + r[\cap F_\alpha$. ■

A tételben egészen lényeges az, hogy az F_α halmazok *korlátosak* és *zártak*, továbbá fontos az, hogy minden $\alpha \in A$ és $\beta \in A$ esetén létezzen olyan $\gamma \in A$, hogy $F_\gamma \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$; ezt a tulajdonságot az $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ halmazrendszer *lefelé irányítottságának* nevezzük.

Definíció. Az E halmaz *befedésének* nevezünk minden olyan $(E_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$ teljesül. Ha $(E_i)_{i\in I}$ az E halmaz befedése, és $J \subseteq I$ olyan részhalmaz, hogy $(E_i)_{i\in J}$ szintén befedése E-nek, akkor azt mondjuk, hogy $(E_i)_{i\in J}$ az $(E_i)_{i\in I}$ *részbefedése.*

Definíció. Egy $E \subseteq \mathbb{K}$ halmazt *kompaktnak* nevezünk, ha a $\mathbb{K}$ nyílt részhalmazainak bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszerére teljesül az, hogy ha $E \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, akkor van olyan $J \subseteq I$ *véges* halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i\in J} \Omega_i$ teljesül.

Tehát az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha az E halmaz bármely nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése.

Tétel. (*Borel-Lebesgue tétel.*) $\mathbb{R}$-nek egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy az $F \subseteq \mathbb{R}$ halmaz korlátos és zárt, és legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ az $\mathbb{R}$ nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $F \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Jelölje A az I véges részhalmazainak halmazát, és minden $\alpha \in A$ esetén legyen $F_\alpha := F \setminus \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$. Nyilvánvaló, hogy $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan halmazrendszer, amelyre minden $\alpha \in A$ esetén F_α korlátos és zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben, továbbá $\alpha \in A$ és $\beta \in A$ esetén $F_\alpha \cap F_\beta = E \setminus \bigcup_{i\in\alpha\cup\beta} \Omega_i = F_\gamma$, ahol $\gamma := \alpha \cup \beta \in A$. Ha minden $\alpha \in A$ esetén $F_\alpha \neq \emptyset$ teljesülne, akkor a Cantor-féle közösrész tétel szerint $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$ teljesülne. Azonban a de Morgan azonosság szerint

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = F \setminus \bigcup_{\alpha\in A} \left(\bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i \right) = F \setminus \bigcup_{i\in I} \Omega_i = \emptyset,$$

hiszen $F \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy *létezik* olyan $\alpha \in A$, amelyre $F_\alpha = \emptyset$. Ha α ilyen, akkor az F_α definíciója szerint $F \subseteq \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy F kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

(II) Tegyük fel, hogy az $F \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem korlátos. Ekkor az $(]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ intervallum-sorozat mindegyik tagja nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, és $F \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[$. Ha $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, akkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}^+$, hogy $H \subseteq m$; ekkor

$$\bigcup_{n\in H}]-n,n[\subseteq \bigcup_{n\leq m}]-n,n[=]-m,m[,$$

és F nem részhalmaza $]-m,m[$-nek (mert F nem korlátos), így $F \subseteq \bigcup_{n\in H}]-n,n[$ lehetetlen. Tehát F nem kompakt halmaz.

(III) Tegyük fel, hogy az $F \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem zárt, és legyen $x \in \overline{F} \setminus F$. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\{\varepsilon_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ teljesül. (Például, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_n := 1/(n+1)$, akkor

az $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettségéből következik, hogy $\inf\{\varepsilon_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$, és persze minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ teljesül.) Ekkor az $(\mathbb{R} \setminus [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n])_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat minden tagja nyílt $\mathbb{R}$-ben, és $x \notin F$ miatt

$$F \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x\} = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]).$$

Ha $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, akkor létezik olyan $m \in \mathbb{N}^+$, hogy $H \subseteq m$; ekkor

$$\bigcup_{n \in H} (\mathbb{R} \setminus [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]) \subseteq \bigcup_{n \leq m} (\mathbb{R} \setminus [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]) =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \leq m} [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n] = \mathbb{R} \setminus [x - \varepsilon_m, x + \varepsilon_m],$$

és F nem részhalmaza $\mathbb{R} \setminus [x - \varepsilon_m, x + \varepsilon_m]$-nek (mert $x \in \overline{F}$), következésképpen $F \subseteq \bigcup_{n \in H} (\mathbb{R} \setminus [x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n])$ lehetetlen. Tehát F nem kompakt halmaz.

A (II) és (III) alapján az $\mathbb{R}$ minden kompakt részhalmaza korlátos és zárt. ■

Később megadjuk ennek a tételnek és a Cantor-féle közösrész tételnek az általánosítását nem csak $\mathbb{C}$-re, hanem minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{K}^n$-re is.

Gyakorlatok

1. Jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát. Minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számhoz egyértelműen létezik olyan $\mathbb{Z}$-ben haladó $(\nu_p(x))_{p\in\mathbb{P}}$ rendszer és olyan $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ elem, hogy $\{p \in \mathbb{P} | \nu_p(x) \neq 0\}$ véges halmaz és

$$x = \varepsilon \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(x)}$$

teljesül. Legyen $p \in \mathbb{P}$ rögzített, és tekinstük a következő függvényt:

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto |x|_p := \begin{cases} p^{-\nu_p(x)} & \text{, ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}.$$

Minden $p \in \mathbb{P}$ esetén ez a $|\cdot|_p$ leképezés abszolútérték-függvény a $\mathbb{Q}$ test felett, amit a $\mathbb{Q}$ feletti p-*adikus abszolútérték-függvénynek* nevezünk. Ha $p \in \mathbb{P}$, akkor minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$$

is teljesül, ami *erősebb* feltétel, mint a háromszög-egyenlőtlenség. Azt mondjuk, hogy a K test feletti $|\cdot|$ abszolútérték-függvény *ultrametrikusnak* nevezünk, ha (VA_{III}) helyett a következő erősebb feltétel teljesül:

(VA'_{III}) Minden $x, y, z \in K$ esetén $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Tehát minden p prímszámra $|\cdot|_p$ ultrametrikus abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges test felett az improprius abszolútérték ultrametrikus.

2. $\mathbb{K}$-ban nem üres nyílt halmazok bármely diszjunkt rendszerének az indexhalmaza megszámlálható.

3. $\mathbb{R}$-ben minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok korlátos nyílt intervallum uniójaként.

4. Legyen H zárt részcsoportja az $(\mathbb{R}, +)$ csoportnak. Ekkor $H \neq \mathbb{R}$ esetén egyértelműen létezik olyan $\theta \in \mathbb{R}_+$, amelyre $H = \{n\theta | n \in \mathbb{Z}\}$ teljesül, vagyis H a θ valós szám egész számú többszöröseiből áll.

(*Útmutatás.* $\theta := min(H \cap \mathbb{R}^+)$)

5. Minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazhoz van olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén K_n korlátos és zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, és $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Minden $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazhoz van olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén Ω_n nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, és $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$.

(*Útmutatás.* A második állítás az elsőből a de Morgan azonosságok szerint következik.

Ha $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem korlátos $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, akkor minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \cap B_{r_n}(0; \mathbb{K}))$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega \cap B_{r_n}(0; \mathbb{K})$ korlátos nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Tehát a $\mathbb{K}$ minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható

sok korlátos nyílt halmaz uniójaként, így az első állítást elég *korlátos* nyílt halmazra bizonyítani.

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ korlátos és nyílt halmaz. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$K_n := \{x \in \mathbb{K} | \inf_{x'\in\mathbb{K}\setminus\Omega} |x - x'| \geq \varepsilon_n\}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra K_n zárt halmaz, mert

$$K_n = \bigcap_{x'\in\mathbb{K}\setminus\Omega} (\mathbb{K} \setminus B_{\varepsilon_n}(x'; \mathbb{K})),$$

továbbá K_n korlátos is, mert $K_n \subseteq \Omega$. Könnyen belátható, hogy $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$.)

6. Ha K véges test, akkor nem létezik K felett nem improprius abszolútérték-függvény.

(*Útmutatás.* Ha $|\cdot|$ nem improprius abszolútérték-függvény a K test felett, akkor van olyan $x \in K$, hogy $|x| > 1$; ekkor az $\mathbb{N} \to K$; $x \mapsto x^n$ leképezés *injektív*, tehát K nem véges.)

3. Numerikus sorozatok

Definíció. A $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatokat *numerikus sorozatoknak* vagy *számsorozatoknak* nevezzük. Az $\mathbb{R}$-ben (illetve $\mathbb{C}$-ben) haladó sorozatokat *valós* (illetve *komplex*) *sorozatoknak* nevezzük.

Definíció. Az $\boldsymbol{s}$ számsorozatot *konvergensnek* mondjuk $\mathbb{K}$-ban, ha létezik olyan $x \in \mathbb{K}$, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $|\boldsymbol{s}(n) - x| < \varepsilon$. Minden ilyen tulajdonságú $x \in \mathbb{K}$ pontot az $\boldsymbol{s}$ sorozat *hatérértékének* vagy *limeszpontjának* nevezünk. A nem konvergens számsorozatokat *divergenseknek* nevezzük. Az $\boldsymbol{s}$ számsorozatot *zérussorozatnak* nevezzük, ha konvergens és a 0 határértéke $\boldsymbol{s}$-nek.

Tehát a $\mathbb{K}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat pontosan akkor konvergens $\mathbb{K}$-ban, ha

$$(\exists x \in \mathbb{K})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n > N) \Rightarrow |\boldsymbol{s}(n) - x| < \varepsilon)$$

teljesül.

Állítás. Konvergens számsorozatnak pontosan egy határértéke létezik.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ konvergens $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, és legyenek $x, x' \in \mathbb{K}$ határérékei $\boldsymbol{s}$-nek. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $x \neq x'$, vagyis $|x - x'| > 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\varepsilon < \frac{|x-x'|}{2}$. Az x pont határértéke $\boldsymbol{s}$-nek, ezért az ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - x| < \varepsilon$. Az x' pont határértéke $\boldsymbol{s}$-nek, ezért az ε-hoz létezik olyan $N' \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}'$ és $n > N'$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - x'| < \varepsilon$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$ és $n > N'$, akkor az $|\boldsymbol{s}(n) - x| < \varepsilon$ és $|\boldsymbol{s}(n) - x'| < \varepsilon$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek, így a háromszög-egyenlőtlenség alapján $|x - x'| \leq |x - s(n)| + |s(n) - x'| < 2\varepsilon < |x - x'|$, ami lehetetlen. ■

Jelölés. Ha $\boldsymbol{s}$ konvergens számsorozat, akkor az $\boldsymbol{s}$ egyértelműen meghatározott határértékét $\lim(\boldsymbol{s})$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}(n)$ jelöli.

Állítás. Az $\boldsymbol{s}$ komplex sorozat pontosan akkor konvergens $\mathbb{C}$-ben, ha a

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(\boldsymbol{s}) &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \mathfrak{Re}(\boldsymbol{s}(n)) \\ \mathfrak{Im}(\boldsymbol{s}) &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \mathfrak{Im}(\boldsymbol{s}(n)) \end{aligned}$$

valós sorozatok konvergensek $\mathbb{R}$-ben, és ha $\boldsymbol{s}$ konvergens $\mathbb{C}$-ben, akkor:

$$\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})) + i \cdot \lim(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})),$$

vagyis

$$\mathfrak{Re}(\lim(\boldsymbol{s})) = \lim(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})), \quad \mathfrak{Im}(\lim(\boldsymbol{s})) = \lim(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{s}$ konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, és $N \in \mathbb{N}$ olyan természetes szám, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$, akkor

minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $|\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s}(n)) - \mathfrak{Re}(\lim(\boldsymbol{s}))| \leq |\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$ és $|\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s}(n)) - \mathfrak{Im}(\lim(\boldsymbol{s}))| \leq |\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$, tehát a $\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})$ és $\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})$ valós sorozatok konvergensek $\mathbb{R}$-ben, és $\lim(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})) = \mathfrak{Re}(\lim(\boldsymbol{s}))$, valamint $\lim(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})) = \mathfrak{Im}(\lim(\boldsymbol{s}))$, ami azt is jelenti, hogy $\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})) + i \cdot \lim(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s}))$.

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})$ és $\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})$ valós sorozatok konvergensek, és legyen $a := \lim(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s}))$, valamint $b := \lim(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s}))$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített. Legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$ (illetve $n > N'$), akkor $|\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})(n) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ (illetve $|\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})(n) - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$). Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > \max(N, N')$, akkor $|\boldsymbol{s}(n) - (a + i \cdot b)| < \varepsilon$, tehát az $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben. ■

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ olyan számsorozatok, amelyekhez létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\boldsymbol{s}(n) = \boldsymbol{s}'(n)$, akkor az $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ sorozatok egyszerre konvergensek vagy divergensek, és ha konvergensek, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(\boldsymbol{s}')$.

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{s}$ konvergens számsorozat, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$; ekkor $n > \max(N, N_0)$ esetén fennáll az $|\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is, így $\boldsymbol{s}'$ konvergens, és $\lim(\boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s})$. ■

Az előző állításból következik, hogy ha az $\boldsymbol{s}$ számsorozatnak *véges sok* helyen megváltoztatjuk az értékét, akkor az így nyert $\boldsymbol{s}'$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens, továbbá, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(\boldsymbol{s}')$. Ezért minden olyan $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvénynek is tekinthetjük a konvergenciáját és a határértékét, amelyre $\mathbb{N} \setminus Dom(\boldsymbol{s})$ *véges* halmaz; ehhez elegendő az $\boldsymbol{s}$ függvényt kiterjeszteni $\mathbb{N}$-re *tetszőlegesen*, és venni a kiterjesztett sorozat határértékét (amennyiben létezik); ekkor a kiterjesztett sorozat konvergenciájának ténye, illetve konvergencia esetén a $\mathbb{K}$-beli határértéke *független* a kiterjesztés választásától.

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ olyan konvergens valós számsorozatok, amelyekhez létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\boldsymbol{s}(n) \leq \boldsymbol{s}'(n)$, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) \leq \lim(\boldsymbol{s}')$.

Bizonyítás. Legyenek $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ konvergens valós számsorozatok, és legyen $N_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\boldsymbol{s}(n) \leq \boldsymbol{s}'(n)$. Legyen $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $C < \lim(\boldsymbol{s})$; meg fogjuk mutatni, hogy ekkor $C \leq \lim(\boldsymbol{s}')$ is teljesül. Valóban; rögzítsünk egy $\varepsilon \in]0 \lim(\boldsymbol{s}) - C[$ valós számot, és ε-hoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in]\lim(\boldsymbol{s}) - \varepsilon, \lim(\boldsymbol{s}) + \varepsilon[$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N, N_0)$ esetén $C \leq \lim(\boldsymbol{s}) - \varepsilon < \boldsymbol{s}(n) \leq \boldsymbol{s}'(n)$. Ha $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor van olyan $N'' \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}''$ és $n > N''$ esetén $\boldsymbol{s}'(n) \in]\lim(\boldsymbol{s}') - \varepsilon', \lim(\boldsymbol{s}') + \varepsilon'[$; tehát ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > \max(N, N_0, N')$, akkor $C < \boldsymbol{s}'(n) < \lim(\boldsymbol{s}') + \varepsilon'$. Tehát minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon'$-re $C < \lim(\boldsymbol{s}') + \varepsilon'$, így $C \leq \lim(\boldsymbol{s}')$. Ebből következik, hogy $\lim(\boldsymbol{s}) \leq \lim(\boldsymbol{s}')$. ■

Következmény. Ha $\boldsymbol{s}$ konvergens valós számsorozat, és a $C \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\boldsymbol{s}(n) \leq C$ (illetve $C \leq \boldsymbol{s}(n)$), akkor $\lim(\boldsymbol{s}) \leq C$ (illetve $C \leq \lim(\boldsymbol{s})$).

Bizonyítás. Az első állítás az előző állításból következik, ha abban $\boldsymbol{s}'$ helyére a konstans C-értékű sorozatot helyettesítjük. A második állítás is az előző állításból

következik, ha abban $\boldsymbol{s}'$ helyére az $\boldsymbol{s}$, és $\boldsymbol{s}$ helyére konstans C-értékű sorozatot helyettesítjük. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy ha $\boldsymbol{s}$ konvergens valós számsorozat, és a $C \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra az $\boldsymbol{s}(n) < C$ *szigorú egyenlőtlenség* teljesül, akkor is csak annyi állítható, hogy $\lim(\boldsymbol{s}) \leq C$ teljesül, de előfordulhat. hogy $\lim(\boldsymbol{s}) = C$, így a $\lim(\boldsymbol{s}) < C$ szigorú egyenlőtlenség *nem igaz.*

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ és $\boldsymbol{s}''$ olyan valós számsorozatok, hogy létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\boldsymbol{s}'(n) \leq \boldsymbol{s}(n) \leq \boldsymbol{s}''(n)$, továbbá az $\boldsymbol{s}'$ és $\boldsymbol{s}''$ sorozatok konvergensek, és $\lim(s') = \lim(s'')$, akkor $\boldsymbol{s}$ is konvergens és $\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(s') = \lim(s'')$.

Bizonyítás. Legyen $x := \lim(s') = \lim(s'')$, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor léteznek olyan $N' \in \mathbb{N}$ és $N'' \in \mathbb{N}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N'$, akkor $|\boldsymbol{s}'(n) - x| < \varepsilon$ és ha $n > N''$, akkor $|\boldsymbol{s}''(n) - x| < \varepsilon$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > \max(N', N'', N_0)$, akkor $x - \varepsilon < \boldsymbol{s}'(n) \leq \boldsymbol{s}(n) \leq \boldsymbol{s}''(n) < x + \varepsilon$, vagyis $|\boldsymbol{s}(n) - x| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}$ konvergens sorozat, és $\lim(\boldsymbol{s}) = x$. ■

Állítás. Konvergens számsorozat minden részsorozata konvergens, és a határértéke egyenlő az eredeti sorozat hatérértékével.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ konvergens számsorozat és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$; ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\sigma(n) \geq n > N$, így $|\boldsymbol{s}(\sigma(n)) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$ is teljesül, tehát $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens, és $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = \lim(\boldsymbol{s})$. ■

Következmény. Legyen $(\sigma_i)_{i \in I}$ indexsorozatoknak olyan véges rendszere, hogy az $\mathbb{N} \setminus \bigcup\limits_{i \in I} Im(\sigma_i)$ halmaz *véges.* Ha $\boldsymbol{s}$ olyan számsorozat, hogy minden $i \in I$ esetén az $\boldsymbol{s} \circ \sigma_i$ részsorozat konvergens és a határértéke ugyanaz az $x \in \mathbb{K}$ elem, akkor az $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens és $\lim(\boldsymbol{s}) = x$.

Bizonyítás. Az $\mathbb{N} \setminus \bigcup\limits_{i \in I} Im(\sigma_i)$ halmaz végessége miatt vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy $\{n \in \mathbb{N} | n > N\} \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} Im(\sigma_i)$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és minden $i \in I$ esetén legyen $N_i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N_i$, akkor $|\boldsymbol{s}(\sigma_i(n)) - x| < \varepsilon$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$ és $n > \max\limits_{i \in I} \sigma_i(N_i)$, akkor van olyan $i \in I$ és $m \in \mathbb{N}$, hogy $n = \sigma_i(m)$, így $|\boldsymbol{s}(n) - x| = |\boldsymbol{s}(\sigma_i(m)) - x| < \varepsilon$, hiszen $m > N_i$, különben $\sigma_i(N_i) < n = \sigma_i(m) \leq \sigma_i(N_i)$ teljesülne, ami lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens és $\lim(\boldsymbol{s}) = x$. ■

Állítás. Minden konvergens számsorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ konvergens számsorozat, és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}^+$ számot! Az r-hez van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < r$, vagyis $\{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \subseteq B_r(\lim(\boldsymbol{s}); \mathbb{K})$; ekkor az $\{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\}$ halmaz korlátos és $\{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$ szintén korlátos, hiszen véges, így $Im(\boldsymbol{s})$ is korlátos halmaz, mert $Im(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \cup \{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$. ■

Állítás. Monoton valós sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos. Ha $\boldsymbol{s}$ korlátos monoton növő (illetve fogyó) sorozat, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) = \sup(Im(\boldsymbol{s}))$ (illetve $\lim(\boldsymbol{s}) = \inf(Im(\boldsymbol{s}))$).

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ monoton növő korlátos valós sorozat. Ekkor $Im(\boldsymbol{s})$ nem üres, felülről korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, tehát az $\mathbb{R}$ teljes rendezettsége miatt $\sup(Im(\boldsymbol{s})) \in \mathbb{R}$ létezik. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\sup(Im(\boldsymbol{s})) - \varepsilon$ már nem felső korlátja $Im(\boldsymbol{s})$-nek, tehát létezik $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\sup(Im(\boldsymbol{s})) - \varepsilon < \boldsymbol{s}(N)$; ekkor az $\boldsymbol{s}$ monoton növése miatt minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\sup(Im(\boldsymbol{s})) - \varepsilon < \boldsymbol{s}(N) \leq \boldsymbol{s}(n) \leq \sup(Im(\boldsymbol{s})) < \sup(Im(\boldsymbol{s})) + \varepsilon$, vagyis $|\boldsymbol{s}(n) - \sup(Im(\boldsymbol{s}))| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}$ konvergens és $\lim(\boldsymbol{s}) = \sup(Im(\boldsymbol{s}))$.

Legyen $\boldsymbol{s}$ monoton fogyó korlátos valós sorozat. Ekkor $Im(\boldsymbol{s})$ nem üres, alulról korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, tehát az $\mathbb{R}$ teljes rendezettsége miatt $\inf(Im(\boldsymbol{s})) \in \mathbb{R}$ létezik. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\inf(Im(\boldsymbol{s})) + \varepsilon$ már nem alsó korlátja $Im(\boldsymbol{s})$-nek, tehát létezik $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\boldsymbol{s}(N) < \inf(Im(\boldsymbol{s})) + \varepsilon$; ekkor az $\boldsymbol{s}$ monoton fogyása miatt minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\inf(Im(\boldsymbol{s})) - \varepsilon < \inf(Im(\boldsymbol{s})) \leq \boldsymbol{s}(n) \leq \boldsymbol{s}(N) < \inf(Im(\boldsymbol{s})) + \varepsilon$, vagyis $|\boldsymbol{s}(n) - \inf(Im(\boldsymbol{s}))| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}$ konvergens és $\lim(\boldsymbol{s}) = \inf(Im(\boldsymbol{s}))$. ■

Definíció. Legyenek $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok, és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor az $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}'$, $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$, $\lambda \cdot \boldsymbol{s}$, $|\boldsymbol{s}|$ és $\overline{\boldsymbol{s}}$ $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatokat úgy értelmezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}')(n) := \boldsymbol{s}(n) + \boldsymbol{s}'(n), \quad (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(n) := \boldsymbol{s}(n) \cdot \boldsymbol{s}'(n), \quad (\lambda \cdot \boldsymbol{s})(n) := \lambda \cdot \boldsymbol{s}(n),$$
$$|\boldsymbol{s}|(n) := |\boldsymbol{s}(n)|, \quad \overline{\boldsymbol{s}}(n) := \overline{\boldsymbol{s}(n)}.$$

Ha $\boldsymbol{s}$ olyan számsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \neq 0$, akkor $1/\boldsymbol{s}$ vagy $\boldsymbol{s}^{-1}$ jelöli azt a számsorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$(1/\boldsymbol{s})(n) := 1/\boldsymbol{s}(n).$$

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ konvergens számsorozatok, akkor $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}'$, $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$ és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda \cdot \boldsymbol{s}$ is konvergens számsorozatok, és

$$\lim(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}'), \quad \lim(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s}) \cdot \lim(\boldsymbol{s}'), \quad \lim(\lambda \cdot \boldsymbol{s}) = \lambda \cdot \lim(\boldsymbol{s}).$$

Ha $\boldsymbol{s}$ konvergens számsorozat, akkor $|\boldsymbol{s}|$ és $\overline{\boldsymbol{s}}$ is konvergensek, és

$$\lim(|\boldsymbol{s}|) = |\lim(\boldsymbol{s})|, \quad \lim(\overline{\boldsymbol{s}}) = \overline{\lim(\boldsymbol{s})}.$$

Ha $\boldsymbol{s}$ olyan konvergens számsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \neq 0$ és $\lim(\boldsymbol{s}) \neq 0$, akkor $1/\boldsymbol{s}$ konvergens és:

$$\lim(1/\boldsymbol{s}) = 1/\lim(\boldsymbol{s}).$$

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ konvergens számsorozatok, és $\lambda \in \mathbb{K}$ rögzített szám.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\varepsilon' < \varepsilon/2$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon'$ (illetve $|\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}')| < \varepsilon'$). Ekkor minden $n > \max(N, N')$ természetes számra:

$$|(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}')(n) - (\lim(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}'))| \leq |\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| + |\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}')| < 2 \cdot \varepsilon' < \varepsilon,$$

tehát $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}'$ konvergens, és $\lim(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}')$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $|\lambda| \cdot \varepsilon' < \varepsilon$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon'$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra:

$$|(\lambda \cdot \boldsymbol{s})(n) - \lambda \cdot \lim(\boldsymbol{s})| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| \leq |\lambda| \cdot \varepsilon' < \varepsilon,$$

tehát $\lambda \cdot \boldsymbol{s}$ konvergens, és $\lim(\lambda \cdot \boldsymbol{s}) = \lambda \cdot \lim(\boldsymbol{s})$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(n) - (\lim(\boldsymbol{s})) \cdot (\lim(\boldsymbol{s}')) = (\boldsymbol{s}(n)) \cdot (\boldsymbol{s}'(n)) - (\lim(\boldsymbol{s})) \cdot (\lim(\boldsymbol{s}')) = \\ = (\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})) \cdot (\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}'))+ \\ +(\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})) \cdot \lim(\boldsymbol{s}') + \lim(\boldsymbol{s}) \cdot (\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}')),\end{aligned}$$

amiből az következik, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$, valamint $|\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}')| < \varepsilon$, akkor:

$$|(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(n) - (\lim(\boldsymbol{s})) \cdot (\lim(\boldsymbol{s}'))| < \varepsilon^2 + \varepsilon \cdot |\lim(\boldsymbol{s}')| + |\lim(\boldsymbol{s})| \cdot \varepsilon.$$

Legyen tehát $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $(\varepsilon')^2 + \varepsilon' \cdot |\lim(\boldsymbol{s}')| + |\lim(\boldsymbol{s})| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon$; például:

$$\varepsilon' := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + |\lim(\boldsymbol{s})| + |\lim(\boldsymbol{s}')|}\right).$$

Az ε' számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon'$ (illetve $|\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}')| < \varepsilon'$). Ekkor a fentiek szerint minden $n > \max(N, N')$ természetes számra:

$$|(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(n) - (\lim(\boldsymbol{s})) \cdot (\lim(\boldsymbol{s}'))| < (\varepsilon')^2 + \varepsilon' \cdot |\lim(\boldsymbol{s}')| + |\lim(\boldsymbol{s})| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon,$$

tehát $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$ konvergens és $\lim(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s}) \cdot \lim(\boldsymbol{s}')$.

Legyen $\boldsymbol{s}$ konvergens számsorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra:

$$||\boldsymbol{s}|(n) - |\lim(\boldsymbol{s})|| := ||\boldsymbol{s}(n)| - |\lim(\boldsymbol{s})|| \leq |\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon,$$

továbbá:

$$|\overline{\boldsymbol{s}}(n) - \overline{\lim(\boldsymbol{s})}| := |\overline{\boldsymbol{s}(n)} - \overline{\lim(\boldsymbol{s})}| = |\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon,$$

tehát $|\boldsymbol{s}|$ és $\overline{\boldsymbol{s}}$ konvergens számsorozatok, és

$$\lim(|\boldsymbol{s}|) = |\lim(\boldsymbol{s})|, \quad \lim(\overline{\boldsymbol{s}}) = \overline{\lim(\boldsymbol{s})}.$$

Legyen $\boldsymbol{s}$ olyan konvergens számsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \neq 0$ és $\lim(\boldsymbol{s}) \neq 0$. Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy $C < |\lim(\boldsymbol{s})|$; ekkor a $|\lim(\boldsymbol{s})| - C > 0$ számhoz vehetünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ elemet, amelyre minden $n > N'$ természetes szám esetén $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < |\lim(\boldsymbol{s})| - C > 0$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N'$ esetén $|\lim(\boldsymbol{s})| - |\boldsymbol{s}(n)| \leq |\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < |\lim(\boldsymbol{s})| - C$, ezért $|\boldsymbol{s}(n)| > C$, így:

$$|(1/\boldsymbol{s})(n) - (1/\lim(\boldsymbol{s}))| = \frac{|\lim(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{s}(n)|}{|\boldsymbol{s}(n)| \cdot |\lim(\boldsymbol{s})|} \leq \frac{|\lim(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{s}(n)|}{C \cdot |\lim(\boldsymbol{s})|}.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és rögzítsünk olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre

$$\frac{\varepsilon'}{C \cdot |\lim(\boldsymbol{s})|} < \varepsilon.$$

Legyen $N'' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N''$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon'$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N', N'')$ esetén $|(1/\boldsymbol{s})(n) - (1/\lim(\boldsymbol{s}))| < \varepsilon$ teljesül, tehát $1/\boldsymbol{s}$ konvergens, és $\lim(1/\boldsymbol{s}) = 1/\lim(\boldsymbol{s})$. ■

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ zérussorozat és $\boldsymbol{s}'$ korlátos számsorozat, akkor $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$ zérussorozat.

Bizonyítás. Az $\boldsymbol{s}'$ korlátossága miatt van olyan $C \in \mathbb{R}^+$ szám, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}'(n)| < C$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és rögzítsünk olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\varepsilon' < \varepsilon/C$. Az ε'-höz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(n)| < \varepsilon'$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra fennáll az $|(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(n))| \leq |\boldsymbol{s}(n)| \cdot C < \varepsilon' \cdot C < \varepsilon$ egyenlőtlenség, tehát $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$ konvergens, és $\lim(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') = 0$. ■

Állítás. Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$.

- Az x pontosan akkor érintési pontja E-nek, ha létezik olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál. (*Az érintési pontok jellemzése sorozatokkal.*)

- Az x pontosan akkor torlódási pontja E-nek, ha létezik olyan $E \setminus \{x\}$-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál. (*A torlódási pontok jellemzése sorozatokkal.*)

- Az E halmaz pontosan akkor zárt, ha minden E-ben haladó konvergens sorozat határértéke eleme E-nek. (*A zárt halmazok jellemzése sorozatokkal.*)

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in B_\varepsilon(x; \mathbb{K})$; ekkor $E \cap B_\varepsilon(x; \mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $x \in \overline{E}$. Megfordítva, tegyük fel, hogy x érintési pontja E-nek. Rögzítsünk egy $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot, amely $\mathbb{R}^+$-ban halad. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \cap B_{\varepsilon_n}(x; \mathbb{K}) \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma szerint: $\prod_{n \in \mathbb{N}} (E \cap B_{\varepsilon_n}(x; \mathbb{K})) \neq \emptyset$; legyen $\boldsymbol{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - x| < \varepsilon_n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$,

$n > N$ számra $\varepsilon_n < \varepsilon$, így $|\boldsymbol{s}(n) - x| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{s}$ számsorozat az x-hez konvergál.

A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből és abból, hogy definíció szerint x pontosan akkor torlódási pontja E-nek, ha érintési pontja $E \setminus \{x\}$-nek.

A harmadik állítás nyilvánvalóan következik az elsőből és abból, hogy az E halmaz pontosan akkor zárt, ha $\overline{E} \subseteq E$. ■

Következmény. Ha $\boldsymbol{s}$ konvergens valós számsorozat, és $C \in \mathbb{R}$ (illetve $C' \in \mathbb{R}$) olyan szám, hogy létezik $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$), amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ (illetve $n > N'$) esetén $\boldsymbol{s}(n) \leq C$ (illetve $C' \leq \boldsymbol{s}(n)$), akkor $\lim(\boldsymbol{s}) \leq C$ (illetve $C' \leq \lim(\boldsymbol{s})$) teljesül.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik az előző állítás harmadik részéből és abból, hogy a $]\leftarrow, C]$ és $[C, \rightarrow[$ intervallumok zárt halmazok $\mathbb{R}$-ben. ■

Az analízisben sokszor értelmezünk olyan sorozatokat, amelyek konvergenciájának ténye fontos volna akkor is, ha nem ismerjük a határértéküket. Ezért értékes lenne egy olyan *konvergenciakritérium*, amelynek alkalmazásával eldönthető volna egy sorozat konvergenciájának ténye a határérték ismerete nélkül.

Definíció. Az $\boldsymbol{s}$ számsorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}(n)| < \varepsilon$.

Állítás. Minden konvergens számsorozat Cauchy-sorozat, és minden Cauchy-sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ konvergens számsorozat, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az $\varepsilon/2$ számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon/2$. Ha $m > N$ és $n > N$ tetszőleges természetes számok, akkor $|\boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}(n)| \leq |\boldsymbol{s}(m) - \lim(\boldsymbol{s})| + |\lim(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{s}(n)| < 2 \cdot (\varepsilon/2) = \varepsilon$, tehát $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat.

Legyen $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}^+$ számot. Az r-hez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}(n)| < r$. Ekkor $\{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \subseteq B_r(\boldsymbol{s}(N+1); \mathbb{K})$, tehát az $\{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\}$ halmaz korlátos, továbbá az $\{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, mert véges, így az $Im(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \cup \{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, vagyis $\boldsymbol{s}$ korlátos sorozat. ■

Állítás. Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, ezért a feltétel *szükséges*. A feltétel *elégségességének* bizonyításához legyen $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat, és legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor $\boldsymbol{s}$-nek a $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$ pont a határértéke.

Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m > N'$ és $n > N'$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}(n)| < \varepsilon/2$; ilyen létezik, mert $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat. Legyen továbbá $N'' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N''$ természetes számra $|(\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n) - \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)| < \varepsilon/2$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N', N'')$,

akkor $\sigma(n) \geq n > N'$, így $|\boldsymbol{s}(\sigma(n)) - \boldsymbol{s}(n)| < \varepsilon/2$, továbbá $n > N''$ miatt $|\boldsymbol{s}(\sigma(n)) - \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)| < \varepsilon/2$, amiből a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy $|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)| < \varepsilon$. ■

Állítás. (*Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel.*) Minden korlátos számsorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. (I) Először feltesszük, hogy $\boldsymbol{s}$ korlátos *valós* sorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen:

$$F_n := \overline{\{\boldsymbol{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\}}.$$

Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $F_n \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, zárt és korlátos halmaz, mert $F_n \subseteq \overline{Im(\boldsymbol{s})}$ és $Im(\boldsymbol{s})$ korlátos. Továbbá, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor nyilvánvalóan $F_{n+1} \subseteq F_n$, ezért a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Megmutatjuk, hogy a $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ halmaz minden eleméhez létezik $\boldsymbol{s}$-nek olyan részsorozata, amely hozzá konvergál. Ehhez először rögzítsünk egy $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó zérussorozatot, amely $\mathbb{R}^+$-ban halad, majd válasszunk egy $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ elemet. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x \in F_{n+1} := \overline{\{\boldsymbol{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n+1)\}},$$

ezért az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján

$$B_{\varepsilon_n}(x; \mathbb{K}) \cap \{\boldsymbol{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n+1)\} \neq \emptyset.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\{k \in \mathbb{N} | (k > n) \wedge (|\boldsymbol{s}(k) - x| < \varepsilon_n)\} \neq \emptyset$. Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a leképezés, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$f(n) := \min\{k \in \mathbb{N} | (k > n) \wedge (|\boldsymbol{s}(k) - x| < \varepsilon_n)\}.$$

Jelölje σ a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N} | (k > \sigma(n)) \wedge (|\boldsymbol{s}(k) - x| < \varepsilon_{\sigma(n)})\},$$

tehát $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ és $|\boldsymbol{s}(\sigma(n+1)) - x| < \varepsilon_{\sigma(n)}$. Ezért a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény szigorúan monoton növő, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}(\sigma(n+1)) - x| < \varepsilon_{\sigma(n)} \leq \varepsilon_n$, hiszen $\sigma(n) \geq n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\varepsilon_n < \varepsilon$; ekkor minden $n > N+1$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(\sigma(n)) - x| < \varepsilon_{n-1} < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens és $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = x$.

(II) Legyen most $\boldsymbol{s}$ korlátos *komplex* sorozat. A $\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})$ és $\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})$ sorozatok valósak és korlátosak, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s}))(n)| \leq |\boldsymbol{s}(n)|$ és $|(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s}))(n)| \leq |\boldsymbol{s}(n)|$. Az (I) alapján a $\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})$ korlátos valós sorozathoz van olyan $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma_1$ konvergens valós sorozat. Ekkor $(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma_1$ szintén korlátos valós sorozat, így ismét az (I) alapján van olyan $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $((\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma_1) \circ \sigma_2$ konvergens valós sorozat. Ekkor a $\sigma := \sigma_1 \circ \sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény szigorúan monoton növő, és a definíció szerint $(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma$ konvergens valós sorozat, és a $(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma$ valós

sorozat is konvergens, mert ez részsorozata a $(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma_1$ konvergens sorozatnak. Ugyanakkor nyilvánvalóan $(\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma = \mathfrak{Re}(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$ és $(\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})) \circ \sigma = \mathfrak{Im}(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$. Ez azt jelenti, hogy a $\mathfrak{Re}(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$ és $\mathfrak{Im}(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$ valós sorozatok konvergensek, így az $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ komplex sorozat konvergens. ■

Tétel. (*Cauchy-féle konvergenciakritérium.*) Egy számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy minden konvergens számsorozat Cauchy-sorozat. Ha egy számsorozat Cauchy-sorozat, akkor korlátos, így a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel szerint létezik konvergens részsorozata, tehát konvergens. ■

Tétel. (*Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{K}$-ra: a korlátos és zárt halmazok jellemzése sorozatokkal.*) Az $E \subseteq \mathbb{K}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden E-ben haladó sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme E-nek.

Bizonyítás. Ha E korlátos és zárt halmaz, valamint $\boldsymbol{s}$ tetszőleges E-ben haladó sorozat, akkor az E korlátossága miatt $\boldsymbol{s}$ korlátos, ezért a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel miatt $\boldsymbol{s}$-nek létezik konvergens részsorozata, továbbá az $\boldsymbol{s}$ bármely konvergens részsorozatának a határértéke $\overline{E}$-nek eleme (az érintési pontok sorozatokkal való jellemzése szerint), így az E zártsága miatt E-nek eleme.

Megmutatjuk, hogy ha E nem korlátos, akkor van olyan E-ben haladó sorozat, amelynek még korlátos részsorozata sincs. Valóban, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \setminus B_{n+1}(0;\mathbb{K}) \neq \emptyset$, mert E nem korlátos, így a kiválasztási axióma szerint $\prod_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus B_{n+1}(0;\mathbb{K})) \neq \emptyset$. Ha $\boldsymbol{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}(n)| \geq n+1$. Ekkor $\boldsymbol{s}$ minden részsorozata *nem korlátos*, mert ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, akkor minden n természetes számra $|(\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n)| \geq \sigma(n) + 1 \geq n + 1$.

Megmutatjuk, hogy ha E nem zárt, akkor van olyan E-ben haladó sorozat, amelynek minden konvergens részsorozatának a határértéke *nem eleme* E-nek. Valóban, legyen $x \in \overline{E} \setminus E$ tetszőleges pont. Az értintési pontok sorozatokkal való jellemzése alapján van olyan E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, amely x-hez konvergál; ekkor az $\boldsymbol{s}$ minden részsorozata konvergens és a határértéke egyenlő x-szel, tehát nem eleme E-nek. ■

Az $\mathbb{R}$ halmaz a természetes rendezés szerint nem korlátos, ezért $\mathbb{R}$-nek sok olyan részhalmaza van, amelyik felülről vagy alulról nem korlátos. Ez az oka annak, hogy az $\mathbb{R}$ rendezésteljességét csak korlátos halmazokra fogalmazzuk meg, tehát csak annyit követelhetünk meg, hogy *felülről korlátos* halmaznak létezzen szuprémuma. Sőt még azt is ki kell kötni, hogy a halmaz *nem üres*, mert az üres halmaznak minden valós szám felső és alsó korlátja is, vagyis $\emptyset$-nak sem létezhet szuprémuma $\mathbb{R}$-ben. Most megadjuk az $(\mathbb{R}, \leq)$ rendezett halmaz olyan bővítését, amelyre a rendezésteljesség az elképzelhető legerősebb formában igaz lesz.

Definíció. Jelöljön $+\infty$ és $-\infty$ két olyan különböző halmazt, amelyek nem elemei $\mathbb{R}$-nek, és legyen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon bevezetjük a

$$\overline{\leq} \ := \leq \ \cup (\overline{\mathbb{R}} \times \{+\infty\}) \ \cup \ (\{-\infty\} \times \overline{\mathbb{R}})$$

relációt, ahol $\leq$ a természetes rendezés $\mathbb{R}$ felett. Az $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\leq})$ párt *kibővített valós számegyenesnek* nevezzük. Az $\{x \in \overline{\mathbb{R}} | 0 \overline{\leq} x\}$ halmazt $\overline{\mathbb{R}}_+$ jelöli (tehát $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$).

Könnyen igazolhatók a következő állítások:

- A kibővített valós számegyenes olyan *lineárisan rendezett halmaz*, amelyben a $\overline{\leq}$ rendezés leszűkítése $\mathbb{R}$-re megegyezik az $\mathbb{R}$ természetes rendezésével.

– A $\overline{\leq}$ rendezés szerint $+\infty$ a legnagyobb és $-\infty$ a legkisebb elem $\overline{\mathbb{R}}$-ben.

– Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmaz *minden* részhalmazának létezik szuprémuma és infimuma a $\overline{\leq}$ rendezés szerint. Pontosabban, ha $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, akkor:

a) $E = \emptyset$ esetén $\sup(E) = -\infty$ és $\inf(E) = +\infty$ a $\overline{\leq}$ rendezés szerint;

b) ha E felülről (illetve alulról) nem korlátos a $\overline{\leq}$ rendezés szerint, akkor $\sup(E) = +\infty$ (illetve $\inf(E) = -\infty$).

c) ha $E \neq \emptyset$ és E felülről (illetve alulról) korlátos $\mathbb{R}$-ben, akkor $\sup(E)$ (illetve $\inf(E)$) a $\overline{\leq}$ rendezés szerint megegyezik a $\leq$ rendezés szerinti $\mathbb{R}$-beli szuprémummal (illetve infimummal).

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban az $\overline{\mathbb{R}}$ feletti rendezést is a $\leq$ szimbólummal jelöljük.

Definíció. Ha $\boldsymbol{s}$ $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat, akkor

$$\limsup(\boldsymbol{s}) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} \boldsymbol{s}(k) \right)$$

$$\liminf(\boldsymbol{s}) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} \boldsymbol{s}(k) \right)$$

és a $\limsup(\boldsymbol{s}) \in \overline{\mathbb{R}}$ (illetve $\liminf(\boldsymbol{s}) \in \overline{\mathbb{R}}$) elemet az $\boldsymbol{s}$ sorozat *felső* (illetve *alsó*) *határértékének* nevezzük. A $\limsup(\boldsymbol{s})$ (illetve $\liminf(\boldsymbol{s})$) jel helyett a $\limsup\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{s}(n)$, $\overline{\lim}(\boldsymbol{s})$ vagy $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, \boldsymbol{s}(n)$ (illetve $\liminf\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{s}(n)$, $\underline{\lim}(\boldsymbol{s})$ vagy $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, \boldsymbol{s}(n)$) jeleket is alkalmazzuk. A felső (illetve alsó) határérték elnevezés helyett a *limesz szuperior* (illetve *limesz inferior*) elnevezést is alkalmazzuk.

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat, akkor:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{s}(n) \leq \liminf(\boldsymbol{s}) \leq \limsup(\boldsymbol{s}) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{s}(n).$$

Bizonyítás. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\underline{\boldsymbol{s}}(n) := \inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} \boldsymbol{s}(k), \quad \overline{\boldsymbol{s}}(n) := \sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} \boldsymbol{s}(k).$$

Világos, hogy az $\underline{\boldsymbol{s}}$ sorozat monoton növő, és az $\overline{\boldsymbol{s}}$ sorozat monoton fogyó. Tehát ha $m, n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek, és $N := \max(m, n)$, akkor $\underline{\boldsymbol{s}}(m) \leq \underline{\boldsymbol{s}}(N) \leq \overline{\boldsymbol{s}}(N) \leq \overline{\boldsymbol{s}}(n)$, így:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k) \leq \underline{\boldsymbol{s}}(m) \leq \overline{\boldsymbol{s}}(n) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k).$$

Ez azt jelenti, hogy $m \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k) \le \underline{\boldsymbol{s}}(m) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{\boldsymbol{s}}(n) \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k),$$

amiből következik, hogy:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k) \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \underline{\boldsymbol{s}}(m) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{\boldsymbol{s}}(n) \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k).$$

A definíció szerint $\limsup(\boldsymbol{s}) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{\boldsymbol{s}}(n)$ és $\liminf(\boldsymbol{s}) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \underline{\boldsymbol{s}}(m)$, amivel az állítást igazoltuk. ■

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ olyan $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozatok, hogy létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n \ge N$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \le \boldsymbol{s}'(n)$, akkor

$$\liminf(\boldsymbol{s}) \le \liminf(\boldsymbol{s}'), \quad \limsup(\boldsymbol{s}) \le \limsup(\boldsymbol{s}').$$

Bizonyítás. Legyen C olyan valós szám, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}') < C$. A definíció szerint ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge n} \boldsymbol{s}'(k) < C,$$

tehát minden $k \ge n$ természetes számra $\boldsymbol{s}'(k) < C$. Ekkor

$$\limsup(\boldsymbol{s}) \le \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge\max(n,N)} \boldsymbol{s}(k) \le \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge\max(n,N)} \boldsymbol{s}'(k) \le \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge n} \boldsymbol{s}'(k) < C,$$

amiből következik, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) \le \limsup(\boldsymbol{s}')$.
Legyen C olyan valós szám, hogy $C < \liminf(\boldsymbol{s})$. A definíció szerint ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$C < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\ge n} \boldsymbol{s}(k),$$

tehát minden $k \ge n$ természetes számra $C < \boldsymbol{s}(k)$. Ekkor

$$C < \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\ge n} \boldsymbol{s}(k) \le \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\ge\max(n,N)} \boldsymbol{s}(k) \le \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\ge\max(n,N)} \boldsymbol{s}'(k) \le \liminf(\boldsymbol{s}'),$$

amiből következik, hogy $\liminf(\boldsymbol{s}) \le \liminf(\boldsymbol{s}')$. ■

Az előző állításból következik, hogy ha az $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatnak *véges sok* helyen megváltoztatjuk az értékét, akkor az így nyert $\boldsymbol{s}'$ sorozatra $\liminf(\boldsymbol{s}) = \liminf(\boldsymbol{s}')$ és $\limsup(\boldsymbol{s}) = \limsup(\boldsymbol{s}')$ teljesül. Ezért minden olyan $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail \overline{\mathbb{R}}$ függvénynek is tekinthetjük az alsó és felső határértékét, amelyre $\mathbb{N} \setminus Dom(\boldsymbol{s})$ *véges* halmaz; ehhez elegendő az $\boldsymbol{s}$-t kiterjeszteni $\mathbb{N}$-re *tetszőlegesen*, és venni a kiterjesztett sorozat alsó és felső határértékét; ezek az $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemek *függetlenek* a kiterjesztés választásától.

Vigyázzunk arra, hogy $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat részsorozatainak az alsó és felső határértékei *egészen mások* lehetnek, mint az eredeti sorozaté (**11**. gyakorlat).

Állítás. Az $\boldsymbol{s}$ valós számsorozat pontosan akkor konvergens $\mathbb{R}$-ben, ha $\liminf \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$, $\limsup \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ és $\liminf \boldsymbol{s} = \limsup \boldsymbol{s}$. Ha az $\boldsymbol{s}$ valós számsorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor $\lim \boldsymbol{s} = \liminf \boldsymbol{s} = \limsup \boldsymbol{s}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\boldsymbol{s}$ valós számsorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és legyen $x := \lim \boldsymbol{s}$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, és vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$, $k > N$ esetén $|\boldsymbol{s}(k) - x| < \varepsilon$, vagyis $x - \varepsilon < \boldsymbol{s}(k) < x + \varepsilon$. Tehát ha $n > N$ tetszőleges természetes szám, akkor

$$-\infty < x - \varepsilon \leq \inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \boldsymbol{s}(k) \leq \liminf \boldsymbol{s} \leq \limsup \boldsymbol{s} \leq \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \boldsymbol{s}(k) \leq x + \varepsilon < +\infty.$$

Ebből következik, hogy $\liminf \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$, $\limsup \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ és $|\limsup \boldsymbol{s} - \liminf \boldsymbol{s}| \leq 2 \cdot \varepsilon$. Ez utóbbi egyenlőtlenség minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra igaz, ezért $\liminf \boldsymbol{s} = \limsup \boldsymbol{s}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\liminf \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$, $\limsup \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ és $\liminf \boldsymbol{s} = \limsup \boldsymbol{s}$. Legyen $x := \liminf \boldsymbol{s}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $\liminf \boldsymbol{s} := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \boldsymbol{s}(k) \right) > x - \varepsilon$, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\inf\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \boldsymbol{s}(k) > x - \varepsilon$, így minden $k \geq n$ természetes számra $\boldsymbol{s}(k) > x - \varepsilon$. Ugyanakkor $\limsup \boldsymbol{s} := \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \boldsymbol{s}(k) \right) < x+\varepsilon$, ezért van olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre $\sup\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \boldsymbol{s}(k) < x+\varepsilon$, így minden $k \geq m$ természetes számra $\boldsymbol{s}(k) < x + \varepsilon$. Ekkor $N := \max(m, n) \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > N$ természetes számra $x - \varepsilon < \boldsymbol{s}(k) < x + \varepsilon$, vagyis $|\boldsymbol{s}(k) - x| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{s}$ valós számsorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és $\lim \boldsymbol{s} = \liminf \boldsymbol{s} = \limsup \boldsymbol{s}$. ■

Az előző állítás alapján $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozatok konvergenciájának fogalmát a következőképpen adjuk meg.

Definíció. Az $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot *$\overline{\mathbb{R}}$-ban konvergensnek* nevezzük, ha $\liminf \boldsymbol{s} = \limsup \boldsymbol{s}$ teljesül, és ekkor ezt a közös értéket az $\boldsymbol{s}$ sorozat *határértékének* nevezzük $\overline{\mathbb{R}}$-ban, és szintén a $\lim(s)$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}(n)$ szimbólummal jelöljük.

Az előző állításból látszik, hogy ha $\boldsymbol{s}$ valós számsorozat, akkor $\boldsymbol{s}$ konvergenciája $\mathbb{R}$-ben ekvivalens azzal, hogy $\boldsymbol{s}$ konvergens $\overline{\mathbb{R}}$-ban és az $\overline{\mathbb{R}}$-beli határértéke véges (vagyis eleme $\mathbb{R}$-nek); továbbá, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor a határértékei $\mathbb{R}$-ben és $\overline{\mathbb{R}}$-ban egyenlőek.

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat, amely konvergens $\overline{\mathbb{R}}$-ban, akkor teljesülnek a következő állítások:

$$\lim \boldsymbol{s} = +\infty \ \Leftrightarrow\ (\forall r \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\ ((k > n)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{s}(k) > r),$$

$$\lim \boldsymbol{s} = -\infty \ \Leftrightarrow\ (\forall r \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\ ((k > n)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{s}(k) < r).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat $\overline{\mathbb{R}}$-ban konvergens.

Ha $\lim \boldsymbol{s} = +\infty$, akkor $\liminf \boldsymbol{s} = +\infty$, vagyis minden $r \in \mathbb{R}$ esetén $\liminf \boldsymbol{s} > r$, tehát létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\inf\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} \boldsymbol{s}(k) > r$, így minden $k > n$ természetes számra $\boldsymbol{s}(k) > r$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\boldsymbol{s}$-re teljesül az első ekvivelancia jobb oldalán álló kijelentés. Legyen $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $k > n$ természetes számra $\boldsymbol{s}(k) > r$. Ekkor

$$\lim \boldsymbol{s} = \liminf \boldsymbol{s} \geq \inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n+1} \boldsymbol{s}(k) \geq r,$$

vagyis a $\lim(\boldsymbol{s}) \in \overline{\mathbb{R}}$ elem minden valós számnál nagyobb-egyenlő, így $\lim \boldsymbol{s} = +\infty$. A második ekvivalencia hasonlóan bizonyítható. ■

Az $\overline{\mathbb{R}}$ felett nem adhatók meg olyan $+$ és $\cdot$ műveletek, amelyek a megfelelő $\mathbb{R}$ feletti műveletek kiterjesztései és amelyekkel $\mathbb{R}$ test volna (**17**. gyakorlat). Azonban bizonyos $\overline{\mathbb{R}}$-beli elempárokra értelmezzük az összeadást és a szorzást a következő módon:

- minden $x \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén:

$$\begin{aligned} x + (+\infty) &:= (+\infty) + x := +\infty, \text{ ha } x \neq -\infty, \\ x + (-\infty) &:= (-\infty) + x := -\infty, \text{ ha } x \neq +\infty. \end{aligned}$$

- minden $x \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén:

$$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := \begin{cases} +\infty & \text{ha } x > 0 \\ -\infty & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0, \end{cases},$$

$$x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := \begin{cases} -\infty & \text{ha } x > 0 \\ +\infty & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0, \end{cases}.$$

Azonban a $(+\infty) + (-\infty)$ és $(-\infty) + (+\infty)$ értékeket nem értelmezzük.

Könnyen igazolható, hogy az összeadás az $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ halmazon *asszociatív, kommutatív*, 0 a *neutrális eleme*, de $+\infty$-nek nincs additív inverze. Továbbá, az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon a szorzás *asszociatív, kommutatív*, 1 a *neutrális eleme*, de a 0, $+\infty$ és $-\infty$ elemeknek nincs multiplikatív inverze. Ha $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ és az $y + z$ és $x \cdot y + x \cdot z$ elemek értelmezve vannak, akkor fennáll az $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ egyenlőség. Azonban az $x := +\infty$, $y := 2$ és $z := -1$ értékek esete mutatja, hogy előfordulhat az, hogy $y + z$ létezik és $x \cdot (y + z) = +\infty$, azonban $x \cdot y = +\infty$ és $x \cdot z = -\infty$, így $x \cdot y + x \cdot z$ nem létezik, ezért a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitásával vigyázni kell!

Azonban nyilvánvaló, hogy $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$ esetén $x + y$ és $x \cdot y$ értelmezve van és $x + y,\ x \cdot y \in \overline{\mathbb{R}}_+$, ezért az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon az összeadás és szorzás asszociatív, kommutatív, neutrális elemes, és a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Gyakorlatok

1. Egy $\boldsymbol{s}$ valós sorozatot *Fibonacci-sorozatnak* nevezünk, ha minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\boldsymbol{s}(n+2) = \boldsymbol{s}(n+1) + \boldsymbol{s}(n)$ teljesül. Ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ Fibonacci-sorozatok, valamint $c \in \mathbb{R}$, akkor $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}'$ és $c \cdot \boldsymbol{s}$ is Fibonacci-sorozatok. Ha $x \in \mathbb{R}^+$, akkor az $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor Fibonacci-sorozat, ha x egyenlő az

$$x_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

számok valamelyikével. Minden $\boldsymbol{s}$ Fibonacci-sorozathoz egyértelműen léteznek olyan $c_+, c_- \in \mathbb{R}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) = c_+ \cdot x_+^n + c_- \cdot x_-^n$ teljesül. Ha $q, p \in \mathbb{Z}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra:

$$q \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + p \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \in \mathbb{Z}.$$

2. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ekkor végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül az, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ számra, ha $n \le m$, akkor $x_m \le x_n$ (vagyis az $\{n \in \mathbb{N} | (\forall m \in \mathbb{N})((n \le m) \Rightarrow (x_m \le x_n))\}$ halmaz végtelen).

3. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ekkor végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül az, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ számra, ha $m \le n$, akkor $x_n \le x_m$ (vagyis az $\{n \in \mathbb{N} | (\forall m \in \mathbb{N})((m \le n) \Rightarrow (x_n \le x_m))\}$ halmaz végtelen).

4. Egy számsorozat konvergens részsorozatainak határértékeit a sorozat *torlódási pontjainak* nevezzük. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ számra $x_{n+1} \ge x_n - \varepsilon_n$. Legyen $a := \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $b := \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, és tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontjainak halmaza egyenlő az $[a, b]$ intervallummal.

5. Tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}_+$ esetén iterációval értelmezzük azt az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Mutassuk meg, hogy ez a sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és számítsuk ki a határértékét!

6. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{1\le k\le n}$ tetszőleges rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, akkor:

$$\min_{1\le k\le n} x_k \le \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \le \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \le \max_{1\le k\le n} x_k.$$

(A *számtani, mértani* és *harmonikus közép* közötti kapcsolat).

(*Útmutatás.* Elég a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget igazolni. Legyen H azon $n \in \mathbb{N}^+$ számok halmaza, amelyekre teljesül az, hogy minden $\mathbb{R}^+$-ban

haladó $(x_k)_{1\le k\le n}$ rendszerre $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k$ teljesül. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $2^m \in H$. Az teljesen nyilvánvaló, hogy ha $n \in H$ és $n \ge 2$, akkor $n-1 \in H$. Ebből a két állításból következik, hogy $H = \mathbb{N}$.)

7. Mutassuk meg, hogy minden $q \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} q^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1,$$

továbbá $z \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|z| < 1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0,$$

és $|z| > 1$ esetén a $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos.

(*Útmutatás.* Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és először tegyük fel, hogy $q \ge 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $q^{1/n} \ge 1$, és ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor az $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettsége folytán van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $(q-1)/\varepsilon \le N$, és akkor minden $n > N$ természetes számra az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alapján $q < 1 + n\cdot\varepsilon \le (1+\varepsilon)^n$, azaz

$$1-\varepsilon < 1 \le q^{1/n} < 1+\varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $q \ge 1$ valós számra $\lim_{n\to\infty} q^{1/n} = 1$. Ha viszont $q \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $q < 1$, akkor $q^{-1} > 1$, tehát az előzőek szerint $\lim_{n\to\infty} \left(q^{-1}\right)^{1/n} = 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} q^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(q^{-1}\right)^{1/n}} = 1.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\varepsilon < 1$. A binomiális tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra

$$(1+\varepsilon)^n \ge 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2,$$

következésképpen

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2}$$

esetén $(1+\varepsilon)^n > n$, tehát $1+\varepsilon > n^{1/n} \ge 1 > 1-\varepsilon$, ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Most megmutatjuk, hogy $z \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|z| < 1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0,$$

és $|z| > 1$ esetén a $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos.

Tegyük fel, hogy $z \in \mathbb{K}$ és $|z| < 1$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az (I) szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon^{1/n} = 1$, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n > N$ természetes számra $|z| < \varepsilon^{1/n}$, vagyis

$$-\varepsilon < 0 \leq |z^n| = |z|^n < \varepsilon,$$

így $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

Legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|z| > 1$. Ekkor van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, amelyre $|z| > 1+\varepsilon$, így az elemi Bernoulli-egyenlőtlenség alapján minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$|z^n| = |z|^n > (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n \cdot \varepsilon,$$

amiből következik, hogy a $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos, hiszen az $(1 + n \cdot \varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozat az $\mathbb{R}$ archimédészi rendezettsége folytán nem korlátos.)

8. Legyenek x_0 és y_0 olyan valós számok, hogy $0 < y_0 \leq x_0$. Mutassuk meg, hogy egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}; \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}.$$

Igazoljuk, hogy ezek a valós sorozatok konvergensek, és a határértékeik egyenlők. (Ezt a közös határértéket nevezzük az x_0 és y_0 számok *számtani-mértani közepének.*)

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval belátható, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó és az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{4 \cdot (x_{n+1} + y_{n+1})}$$

teljesül.)

9. Legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges $\overline{\mathbb{R}}$-ban haladó sorozat.

- Az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ elem pontosan akkor egyenlő $\limsup(\boldsymbol{s})$-sel, ha minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | c < \boldsymbol{s}(n)\}$ halmaz *végtelen*, és minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | c < \boldsymbol{s}(n)\}$ halmaz *véges.*

- Az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ elem pontosan akkor egyenlő $\liminf(\boldsymbol{s})$-sel, ha minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(n) < c\}$ halmaz *véges*, és minden $c \in \mathbb{R}$ számra, $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(n) < c\}$ halmaz *végtelen.*

10. Legyenek $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ tetszőleges $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban haladó sorozatok. Definíció szerint legyenek $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}'$ és $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$ azok az $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban haladó sorozatok, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}')(n) := \boldsymbol{s}(n) + \boldsymbol{s}'(n)$ és $(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(n) := \boldsymbol{s}(n) \cdot \boldsymbol{s}'(n)$. Ekkor

$$\limsup(\boldsymbol{s}) + \liminf(\boldsymbol{s}') \leq \limsup(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}') \leq \limsup(\boldsymbol{s}) + \limsup(\boldsymbol{s}'),$$

és ha a $(\limsup(\boldsymbol{s}), \limsup(\boldsymbol{s}'))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, akkor

$$\limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \liminf(\boldsymbol{s}') \leq \limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') \leq \limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \limsup(\boldsymbol{s}').$$

Ha az $\boldsymbol{s}'$ sorozat $\mathbb{R}_+$-ban halad és konvergens, akkor

$$\limsup(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}') = \limsup(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}'),$$

és ha még $\lim(\boldsymbol{s}') > 0$ is igaz, akkor

$$\limsup(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}') = \limsup(\boldsymbol{s})\cdot\lim(\boldsymbol{s}').$$

Mutassuk meg, hogy ez az utóbbi egyenlőség megsérülhet, ha $\lim(\boldsymbol{s}') = 0$ és $\limsup(\boldsymbol{s}) = +\infty$; viszont érvényes akkor, ha $\lim(\boldsymbol{s}') = 0$ és $\limsup(\boldsymbol{s}) < +\infty$.

(*Útmutatás.* (I) Megmutatjuk, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}') \le \limsup(\boldsymbol{s}) + \limsup(\boldsymbol{s}')$. Világos, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) < +\infty$ és $\limsup(\boldsymbol{s}') < +\infty$ feltehető. Legyen C olyan valós szám, amelyre $\limsup(\boldsymbol{s}) + \limsup(\boldsymbol{s}') < C$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $S + S' < C$, $\limsup(\boldsymbol{s}) < S$ és $\limsup(\boldsymbol{s}') < S'$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $n' \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \ge n$, akkor $\boldsymbol{s}(k) < S$, és ha $k \ge n'$, akkor $\boldsymbol{s}'(k) < S'$. Világos, hogy minden $k \ge \max(n, n')$ természetes számra $(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')(k) := \boldsymbol{s}(k) + \boldsymbol{s}'(k) < S + S'$, így

$$\limsup(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}') \le \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge\max(n,n')} (\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{s}'(k)) \le S + S' < C,$$

amiből következik, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}') \le \limsup(\boldsymbol{s}) + \limsup(\boldsymbol{s}')$.

(II) Megmutatjuk, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) + \liminf(\boldsymbol{s}') \le \limsup(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')$. Nyilvánvalóan itt is feltehető, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) < +\infty$. Legyen C olyan valós szám, amelyre $C < \limsup(\boldsymbol{s}) + \liminf(\boldsymbol{s}')$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $C < S + S'$, $S < \limsup(\boldsymbol{s})$ és $S' < \liminf(\boldsymbol{s}')$. Ekkor $S' < \liminf(\boldsymbol{s}')$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \ge N$ természetes számra $S' < \boldsymbol{s}'(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor

$$S < \limsup(\boldsymbol{s}) \le \sup_{k\in\mathbb{N},\ k\ge\max(n,N)} \boldsymbol{s}(k),$$

tehát van olyan $k \ge \max(n, N)$ természetes szám, hogy $S < \boldsymbol{s}(k)$, és ekkor $S' < \boldsymbol{s}'(k)$ is igaz, így

$$S+S' < \boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{s}'(k) = (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')(k) \le \sup_{j\in\mathbb{N},\ j\ge\max(n,N)} (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')(j) \le \sup_{j\in\mathbb{N},\ j\ge n} (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')(j).$$

Ebből következik, hogy

$$C < S + S' \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{j\in\mathbb{N},\ j\ge n} (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')(j) \right) =: \limsup(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}'),$$

ami maga után vonja, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) + \liminf(\boldsymbol{s}') \le \limsup(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')$.

(III) Megmutatjuk, hogy ha a $(\limsup(\boldsymbol{s}), \limsup(\boldsymbol{s}'))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, akkor $\limsup(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}') \le \limsup(\boldsymbol{s})\cdot\limsup(\boldsymbol{s}')$. Ha $\limsup(\boldsymbol{s}) > 0$ és $\limsup(\boldsymbol{s}') = +\infty$, vagy $\limsup(\boldsymbol{s}) = +\infty$ és $\limsup(\boldsymbol{s}') > 0$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldalán $+\infty$ áll, ezért elég arra az esetre bizonyítani, amikor $\limsup(\boldsymbol{s})$ és $\limsup(\boldsymbol{s}')$ mindketten végesek.

Legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \limsup(\boldsymbol{s}') < C$. Ekkor léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy $S \cdot S' < C$, $\limsup(\boldsymbol{s}) < S$ és $\limsup(\boldsymbol{s}') < S'$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $n' \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \geq n$, akkor $\boldsymbol{s}(k) < S$, és ha $k \geq n'$, akkor $\boldsymbol{s}'(k) < S'$. Világos, hogy minden $k \geq \max(n, n')$ természetes számra $(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(k) := \boldsymbol{s}(k) \cdot \boldsymbol{s}'(k) < S \cdot S' < C$, így

$$\limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') \leq \sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq \max(n,n')} (\boldsymbol{s}(k) \cdot \boldsymbol{s}'(k)) \leq S \cdot S' < C,$$

amiből következik, hogy $\limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') \leq \limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \limsup(\boldsymbol{s}')$.

(IV) Megmutatjuk, hogy ha a $(\limsup(\boldsymbol{s}), \limsup(\boldsymbol{s}'))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, akkor $\limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \liminf(\boldsymbol{s}') \leq \limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')$. Természetesen feltehető, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) > 0$ és $\liminf(\boldsymbol{s}') > 0$. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, amelyre $C < \limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \liminf(\boldsymbol{s}')$. Léteznek olyan $S, S' \in \mathbb{R}$ számok, hogy $C < S \cdot S'$, $S < \limsup(\boldsymbol{s})$ és $S' < \liminf(\boldsymbol{s}')$. Ekkor $S' < \liminf(\boldsymbol{s}')$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq N$ természetes számra $S' < \boldsymbol{s}'(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor

$$S < \limsup(\boldsymbol{s}) \leq \sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq \max(n,N)} \boldsymbol{s}(k),$$

tehát van olyan $k \geq \max(n, N)$ természetes szám, hogy $S < \boldsymbol{s}(k)$, és ekkor $S' < \boldsymbol{s}'(k)$ is igaz, így

$$S \cdot S' < \boldsymbol{s}(k) \cdot \boldsymbol{s}'(k) =: (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(k) \leq \sup_{j \in \mathbb{N},\ j \geq \max(n,N)} (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(j) \leq \sup_{j \in \mathbb{N},\ j \geq n} (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(j).$$

Ebből következik, hogy

$$C < S \cdot S' \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N},\ j \geq n} (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')(j) \right) =: \limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'),$$

ami maga után vonja, hogy $\limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \liminf(\boldsymbol{s}') \leq \limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}')$.

(V) Ha $\boldsymbol{s}'$ az $\mathbb{R}_+$-ban halad és konvergens, akkor $\limsup(\boldsymbol{s}') = \liminf(\boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s}')$, tehát az (I) és (II) alapján

$$\limsup(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}') = \limsup(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}')$$

teljesül. Ha még az is igaz, hogy $\lim(\boldsymbol{s}') > 0$, akkor a $(\limsup(\boldsymbol{s}), \limsup(\boldsymbol{s}'))$ pár nem egyenlő sem a $(0, +\infty)$, sem a $(+\infty, 0)$ párral, így a (III) és (IV) alapján

$$\limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') = \limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \lim(\boldsymbol{s}')$$

teljesül.

(VI) Ha $\boldsymbol{s}'$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, és $\boldsymbol{s}$ a $+\infty$ értékű konstans-sorozat, akkor $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$ szintén a $+\infty$ értékű konstans-sorozat, tehát $\limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') = +\infty$, ugyanakkor $\limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \lim(\boldsymbol{s}') = (+\infty) \cdot 0 := 0$, vagyis

$$\limsup(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}') \neq \limsup(\boldsymbol{s}) \cdot \lim(\boldsymbol{s}').$$

Azonban itt $\lim(\boldsymbol{s}') = 0$ teljesül.)

11. Ha $\boldsymbol{s}$ tetszőleges $\overline{\mathbb{R}}$-ben haladó sorozat, és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, akkor

$$\liminf(\boldsymbol{s}) \leq \liminf(\boldsymbol{s} \circ \sigma) \leq \limsup(\boldsymbol{s} \circ \sigma) \leq \limsup(\boldsymbol{s}),$$

és lehetséges, hogy mindhárom egyenlőtlenség *szigorú.*

(*Útmutatás.* Legyenek $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ teljsül, és értelmezzük azt az $\boldsymbol{s}$ valós sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ és $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén $\boldsymbol{s}(4k+j) := a_j$. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(2n) := 8n + 1$ és $\sigma(2n + 1) := 8n + 6$. Ekkor σ szigorúan monoton növő és a definíciók alapján könnyen látható, hogy

$$\liminf(\boldsymbol{s}) = a_0 < a_1 = \liminf(\boldsymbol{s} \circ \sigma) < \limsup(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = a_2 < a_3 = \limsup(\boldsymbol{s}),$$

teljesül.)

12. Ha $\boldsymbol{s}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ számra

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k + m)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k}.$$

(*Útmutatás.* Legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy $\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} < C$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} < C,$$

tehát minden $k \geq n$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(k)| < C^k$. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq n$ esetén $|\boldsymbol{s}(k + m)| < C^{k+m}$, vagyis

$$|\boldsymbol{s}(k + m)|^{1/k} \leq C\,(C^m)^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k + m)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \left(C\,(C^m)^{1/k}\right) = C \lim_{k\to\infty} (C^m)^{1/k} = C.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k + m)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k}$$

teljesül.

Megfordítva, legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy $\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k+m)|^{1/k} < C$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\boldsymbol{s}(k + m)|^{1/k} < C,$$

tehát minden $k \geq n$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(k+m)| < C^k$. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq n+m$ esetén $|\boldsymbol{s}(k)| < C^{k-m}$, vagyis

$$|\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \leq C \left(\frac{1}{C^m}\right)^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \left(C\left(\frac{1}{C^m}\right)^{1/k}\right) = C \lim_{k\to\infty} (C^m)^{1/k} = C.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k+m)|^{1/k}$$

teljesül.)

13. Legyen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $c_{m+n} \leq c_m \cdot c_n$. Ekkor a $({c_n}^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ valós sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} {c_n}^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}^+} {c_n}^{1/n}.$$

(*Útmutatás.* Elég arra az esetre bizonyítani, amikor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_n > 0$. Legyen $c_0 := 1$. Minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ számhoz egyértelműen léteznek olyan $q(m,n), p(m,n) \in \mathbb{N}$ számok, hogy $m = p(m,n) \cdot n + q(m,n)$ és $q(m,n) < n$. Ezért minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$c_m \leq c_n^{p(m,n)} \cdot c_{q(m,n)}$$

teljesül, továbbá

$$\frac{1}{n} = \frac{p(m,n)}{m} + \frac{q(m,n)}{m \cdot n},$$

következésképpen fennáll a

$${c_m}^{1/m} \leq {c_n}^{1/n} \cdot \left(\frac{\max\limits_{1\leq k<n} c_k}{\min\limits_{1\leq k<n} c_k^{k/n}}\right)^{1/m}$$

egyenlőtlenség. Ebből kapjuk, hogy

$$\limsup_{m\to\infty} {c_m}^{1/m} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}^+} {c_n}^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} {c_n}^{1/n}$$

teljesül.)

14. Minden $x > 0$ valós számra a

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^+}, \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozatok monoton növők, korlátosak, és a határértékük egyenlő.

(*Útmutatás.* A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy $x \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{1}{n+1} \cdot \left(n \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)+1\right)\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ismét a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy $x \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \leq$$
$$\leq \left(\frac{1}{n+[x]+1} \cdot \left(n \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)+([x]+1) \cdot \left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)\right)\right)^{n+[x]+1} = 1,$$

ezért

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}.$$

Tehát az

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$$

rendszer monoton növő és felülről korlátos, így konvergens $\mathbb{R}$-ben.

Ha $x \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a binomiális tétel alapján

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} c_n(k) \cdot \frac{x^k}{k!},$$

ahol $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ esetén

$$c_n(k) := 1 - \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n}\right),$$

amiből a Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy ha $n > 1$, akkor

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!}.$$

Ezért elég azt igazolni, hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat *felülről korlátos.*)

15. Minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozatra legyenek $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azok a sorozatok, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\overline{x}(n) := \max_{0\le k\le n} x_k, \quad \underline{x}(n) := \min_{0\le k\le n} x_k.$$

- Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos valós sorozat, akkor az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek.

- Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós sorozat, hogy az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek és a határértékeik egyenlők, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és mindhárom sorozat határértéke ugyanaz.

- Létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens valós sorozat, amelyre az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek.

16. Legyen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *nem korlátos*. Minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozatra legyen $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\overline{x}_n := \begin{cases} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=0}^{n} p_k} & \text{, ha } \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0 \end{cases}.$$

Minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozatra

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} \overline{x}_n \le \limsup_{n\to\infty} \overline{x}_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

és ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor az $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n$$

teljesül.)

17. Az $\overline{\mathbb{R}}$ felett *nem létezik* olyan kommutatív csoportművelet, amely az $\mathbb{R}$ feletti összeadás kiterjesztése.

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $+$ olyan kommutatív csoportművelet $\overline{\mathbb{R}}$ felett, amelyek az $\mathbb{R}$ feletti összeadás kiterjesztése. Ekkor a $+$ szerinti neutrális elem szükségképpen 0, és minden $x \in \mathbb{R}$ számra az x inverze $+$ szerint $-x$ lesz. Ezért $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + (+\infty)$ nem lehet valós szám, tehát $x+(+\infty) = +\infty$ vagy $x+(+\infty) = -\infty$. De ha $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x+(+\infty) = +\infty$, akkor ehhez az egyenlőséghez hozzádva a $+\infty$ elem $+$ szerinti inverzét kapjuk, hogy $x = 0$. Tehát $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén szükségképpen $x + (+\infty) = -\infty$. Ekkor viszont bármely két nem nulla valós szám egyenlő lenne (ti. megegyezne a $(-\infty) - (+\infty)$ elemmel).)

18. Mutassuk meg, hogy minden valós számsorozatnak létezik *monoton* részsorozata. (Ezzel a Bolzano-Weierstass kiválasztási tételnek új bizonyítását kapjuk.)

(*Útmutatás.* Legyen $\boldsymbol{s}$ valós számsorozat és

$$H := \{\, n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \in \mathbb{N}) : ((n \leq m) \Rightarrow (\boldsymbol{s}(n) \leq \boldsymbol{s}(m)))\}.$$

Tegyük fel, hogy a H halmaz végtelen. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\{k \in H | n < k\}$ halmaz nem üres, tehát jól értelmezett az

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min\{k \in H | n < k\}$$

függvény. Jelölje σ a $\min\{k \in H | 0 < k\}$ kezdőpont és f függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény (tehát indexsorozat), mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in H | \sigma(n) < k\}$, azaz $\sigma(n) < \sigma(n+1)$. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) \in H$, ezért $\boldsymbol{s}(\sigma(n)) \leq \boldsymbol{s}(\sigma(n+1))$, tehát $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ monoton növő sorozat.

Tegyük fel, hogy a H halmaz véges, és legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy a H minden eleme kisebb n_0-nál. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n_0 \leq n$, akkor $n \notin H$, tehát van olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre $n < m$ és $\boldsymbol{s}(n) > \boldsymbol{s}(m)$, vagyis a $\{k \in \mathbb{N} | (n < k) \wedge (\boldsymbol{s}(n) > \boldsymbol{s}(k))\}$ halmaz nem üres. Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amely minden n_0-nál kisebb természetes számhoz 0-t rendel, és minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ esetén

$$f(n) := \min\{k \in \mathbb{N} | (n < k) \wedge (\boldsymbol{s}(n) > \boldsymbol{s}(k))\}.$$

Jelölje σ az n_0 kezdőpont és f függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény (tehát indexsorozat), mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N} | (\sigma(n) < k) \wedge (\boldsymbol{s}(\sigma(n)) > \boldsymbol{s}(k))\}$, azaz $\sigma(n) < \sigma(n+1)$. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(\sigma(n)) > \boldsymbol{s}(\sigma(n+1))$, tehát $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ szigorúan monoton fogyó sorozat.)

19. Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_n := \overline{\{\boldsymbol{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\}},$$

akkor a $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ halmaz *egyenlő* az $\boldsymbol{s}$ konvergens részsorozatai határértékeinek halmazával.

(*Útmutatás.* Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, hogy $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+m) \geq n$, tehát $\boldsymbol{s}(\sigma(n+m)) \in F_n$, vagyis az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $m \mapsto \boldsymbol{s}(\sigma(n+m))$ sorozat az F_n zárt halmazban halad, így a zárt halmazok sorozatokkal való jellemzési tétele alapján

$$\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = \lim_{m \to \infty} \boldsymbol{s}(\sigma(n+m)) \in F_n$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{s}$ minden konvergens részsorozatának határértéke eleme a $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ halmaznak. A fordított irányú következtetés bizonyításában ugyanúgy érvelhetünk, mint a Bolzano-Weirstrass kiválaszási tétel bizonyításának (I) részében.)

20. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat és K az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\overline{\mathbb{R}}$-ban konvergens részsorozatai határértékeinek halmaza. Ekkor $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ a K halmaz legnagyobb és $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ a K halmaz legkisebb eleme.

(*Útmutatás.* Elegendő a $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ esetét vizsgálni, mert erre a $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ problémája visszavezethető, ha áttérünk az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatról a $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra.

(I) Tegyük fel, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Ekkor

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} x_k\right) = +\infty,$$

így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} x_k = +\infty,$$

következésképpen bármely $\mathbb{R} \ni c$-hez van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $k \geq n$ és $c < x_k$. Ez azt jelenti, hogy teljesül a következő:

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (c < x_k)).$$

Legyen $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan valós számsorozat, amelyre $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} c_m = +\infty$. Az előzőek alapján

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (c_m < x_k)).$$

teljesül. A természetes számok halmazának jólrendezettsége miatt jól értelmezett az az $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre minden $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m, n)$-re

$$g(m, n) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (k > n) \wedge (c_m < x_k)\}.$$

Jelölje σ a 0 kezdőpont és a g függvény által egyszerű rekurzióval előállított $\mathbb{N}$-ben haladó sorozatot. Ekkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(m + 1) = g(m, \sigma(m))$, így $\sigma(m + 1) > \sigma(m)$ és $c_m < x_{\sigma(m+1)}$. Ebből látható, hogy σ szigorúan monoton növő (tehát indexsorozat) és $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} x_{\sigma(m)} \geq \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} c_m = +\infty$, tehát $\lim\limits_{m\to\infty} x_{\sigma(m)} = +\infty$ teljesül $\overline{\mathbb{R}}$-ban, így $+\infty \in K$, tehát $+\infty$, vagyis $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ a K halmaz legnagyobb eleme.

(II) Legyen most $-\infty < \limsup\limits_{n\to\infty} x_n < +\infty$, és jelölje c a $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ számot.

Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} x_k\right) =: \limsup_{n\to\infty} x_n < c + \varepsilon,$$

így van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\sup\limits_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} x_k < c + \varepsilon$, következésképpen minden $k \geq n$ természetes számra $x_k < c + \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \Rightarrow (x_k < c + \varepsilon))$$

teljesül. Ugyanakkor, minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} x_k \right) =: \limsup_{n\to\infty} x_n > c - \varepsilon,$$

így minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\sup\limits_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} x_k > c - \varepsilon$, tehát van olyan $k \geq n$ természetes szám, amelyre $c_k > c - \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (x_k > c - \varepsilon))$$

teljesül.

Rögzítsünk most egy tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Az előzőek alapján ekkor teljesülnek a

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \Rightarrow (x_k < c + \varepsilon_m)),$$

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (x_k > c - \varepsilon_m))$$

kijelentések. Az első állítás és a természetes számok halmazának jólrendezettsége miatt jól értelmezett az az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(m) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \Rightarrow (x_k < c + \varepsilon_m))\}.$$

Ezért a második állítás és a természetes számok halmazának jólrendezettsége miatt jól értelmezett az a $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre minden $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén

$$g(m, n) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (k \geq \max(f(m), n + 1)) \wedge (x_k > c - \varepsilon_m)\}.$$

Jelölje σ a 0 kezdőpont és a g függvény által egyszerű rekurzióval meghatározott $\mathbb{N}$-ben haladó sorozatot. Ekkor $m \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(m + 1) = g(m, \sigma(m)) \geq \max(f(m), \sigma(m) + 1) > \sigma(m)$, amiből látható, hogy σ szigorúan monoton növő (tehát indexsorozat). Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\sigma(m + 1) \in \{k \in \mathbb{N} \mid (k \geq \max(f(m), \sigma(m) + 1)) \wedge (x_k > c - \varepsilon_m)\}$, így $x_{\sigma(m+1)} > c - \varepsilon_m$, valamint $\sigma(m + 1) \geq f(m)$, így $x_{\sigma(m+1)} < c + \varepsilon_m$. Ez azt jelenti, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $|x_{\sigma(m+1)} - c| < \varepsilon_m$, ezért az $(x_{\sigma(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ részsorozat konvergens és a határértéke egyenlő c-vel, tehát $c \in K$.

Még be kell látni, hogy c felső korlátja K-nak. Ehhez legyen $x \in K$ és rögzítsünk olyan σ indexsorozatot, amelyre $\lim\limits_{m\to\infty} x_{\sigma(m)} = x$. Legyen $c' \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan szám, amelyre $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n < c'$. A felső határérték értelmezése alapján ekkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $k \geq n$ természetes számra $x_k < c'$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq n$, akkor $\sigma(k) \geq k \geq n$, így $x_{\sigma(k)} < c'$. Ebből következik, hogy $x = \lim\limits_{m\to\infty} x_{\sigma(m)} \leq c'$. Ezzel igazoltuk, hogy $x \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

(III) Végül tegyük fel, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N};\ k\geq n} x_k \right) =: \limsup_{n\to\infty} x_n < c,$$

így

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \Rightarrow (x_k < c))$$

teljesül. Legyen $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan valós számsorozat, amelyre $\inf\limits_{m\in\mathbb{N}} c_m = -\infty$. Az előzőek alapján

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (x_k < c_m)).$$

teljesül, így a természetes számok halmazának jólrendezettsége miatt jól értelmezett az az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$f(m) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (\forall k \in \mathbb{N}) : ((k \geq n) \wedge (x_k < c_m))\}.$$

Értelmezzük most a

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad (m, n) \mapsto g(m, n) := \max(f(m), n + 1)$$

függvényt, és jelölje σ a 0 kezdőpont és a g függvény által egyszerű rekurzióval előállított $\mathbb{N}$-ben haladó sorozatot. Ekkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(m + 1) = g(m, \sigma(m)) > \sigma(m)$ és $\sigma(m+1) \geq f(m)$ miatt $x_{\sigma(m+1)} < c_m$. Ebből látható, hogy σ szigorúan monoton növő (tehát indexsorozat) és $\inf\limits_{m\in\mathbb{N}} x_{\sigma(m)} \leq \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} c_m = -\infty$, tehát $\lim\limits_{m\to\infty} x_{\sigma(m)} = -\infty$ teljesül $\overline{\mathbb{R}}$-ban, így $-\infty \in K$, tehát $-\infty$, vagyis $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ a K halmaz legnagyobb eleme.)

21. Legyen $\boldsymbol{s}$ valós számsorozat, és $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ indexsorozatok olyan *véges* rendszere, hogy minden $\lambda \in \Lambda$ esetén $\boldsymbol{s} \circ \sigma_\lambda$ $\overline{\mathbb{R}}$-ban konvergens sorozat és

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Im\,(\sigma_\lambda) = \mathbb{N}$$

teljesül. Legyen $K := \{\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$, ahol a határértéket $\overline{\mathbb{R}}$-ban kell venni. Ekkor $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ a K halmaz legnagyobb és $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ a K halmaz legkisebb eleme.

(*Útmutatás.* A **20**. gyakorlat alapján elég azt igazolni, hogy ha σ olyan indexsorozat, amelyre $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens, akkor $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) \in K$. A hipotézis szerint

$$Im(\sigma) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (Im(\sigma) \cap Im\,(\sigma_\lambda)),$$

így a Λ halmaz végessége folytán van olyan $\lambda \in \Lambda$, hogy az $Im(\sigma) \cap Im\,(\sigma_\lambda)$ halmaz végtelen. Ekkor az I.3.**47**. gyakorlat alapján értelmezhetünk olyan σ' és σ'' indexsorozatokat, hogy $\sigma \circ \sigma' = \sigma_\lambda \circ \sigma''$, ezért

$$\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma \circ \sigma') = \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma_\lambda \circ \sigma'') = \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma_\lambda) \in K$$

teljesül.)

22. Legyen $((\lambda_{n,k})_{k\in n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\lambda_{n,k})_{k\in n+1}$ olyan rendszer a $[0, 1]$ valós intervallumban, hogy $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = 1$. Tegyük fel, hogy

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $\mathbb{K}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra teljesül az, hogy ha $\boldsymbol{s}$ konvergens, akkor a

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \boldsymbol{s}(k)$$

sorozat is konvergens $\mathbb{K}$-ban, és

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \boldsymbol{s}(k) = \lim(\boldsymbol{s})$$

teljesül. Speciálisan, ha a $\mathbb{K}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, akkor az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)$$

aritmetikai középsorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k) = \lim(\boldsymbol{s})$$

teljesül.

(*Útmutatás.* A második állítás következik az elsőből, ha minden $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$ esetén $\lambda_{n,k} := \dfrac{1}{n+1}$; ezért elég az első állítást igazolni. Tegyük fel, hogy a $\mathbb{K}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens. Ekkor $\boldsymbol{s}$ korlátos, így vehetünk olyan $M \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $|s(k)| \le M$ teljesül.

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzítve, és először vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k \in \mathbb{N}$ és $k > N'$ esetén $|s(k) - \lim(\boldsymbol{s})| < \varepsilon/2$. A hipotézis alapján vehetünk olyan $(N'_k)_{k\in N'+1}$ rendszert $\mathbb{N}$-ben, hogy minden $k \le N'$ és $n > N'_k$ természetes számra $\lambda_{n,k} < \dfrac{\varepsilon/2}{M + |\lim(\boldsymbol{s})|}$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > \max\left(N', \max\limits_{k\in N'+1} N'_k\right)$; ekkor

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \boldsymbol{s}(k) - \lim(\boldsymbol{s})\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \boldsymbol{s}(k) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \lim(\boldsymbol{s})\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} |\boldsymbol{s}(k) - \lim(\boldsymbol{s})| = \sum_{k=0}^{N'} \lambda_{n,k} |\boldsymbol{s}(k) - \lim(\boldsymbol{s})| + \sum_{k=N'+1}^{n} \lambda_{n,k} |\boldsymbol{s}(k) - \lim(\boldsymbol{s})| \le$$

$$\le (M + |\lim(\boldsymbol{s})|) \sum_{k=0}^{N'} \lambda_{n,k} + (\varepsilon/2) \sum_{k=N'+1}^{n} \lambda_{n,k} \le (M + |\lim(\boldsymbol{s})|) \sum_{k=0}^{N'} \lambda_{n,k} + \varepsilon/2 \le \varepsilon,$$

ami az állítást igazolja.)

23. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbb{R}^+$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)}$$

geometriai középsorozat, és az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{s}(k)}}$$

harmonikus középsorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{s}(k)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k) = \lim(\boldsymbol{s})$$

teljesül.
(*Útmutatás.* Tudjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$0 < \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{s}(k)}} \leq \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)$$

teljesül. Ebből, és a **22**. gyakorlatból látható, hogy az állítás igaz, ha $\lim(\boldsymbol{s}) = 0$. Tegyük fel, hogy $\lim(\boldsymbol{s}) > 0$. Ekkor az $1/\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(1/\boldsymbol{s}) = 1/\lim(\boldsymbol{s})$, tehát a **22**. gyakorlat erednényét alkalmazva $\boldsymbol{s}$ helyett az $1/\boldsymbol{s}$ sorozatra kapjuk, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{s}(k)}$$

sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{s}(k)} = \frac{1}{\lim(\boldsymbol{s})}.$$

Ebből következik, hogy a

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{s}(k)}}$$

harmonikus középsorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\boldsymbol{s}(k)}} = \lim(\boldsymbol{s})$$

teljesül, így a csendőrelv alapján kapjuk, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)}$$

geometriai középsorozat is konvergens, és fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)} = \lim(\boldsymbol{s})$$

egyenőség is.)

24. Legyen $\boldsymbol{a}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó és $\boldsymbol{b}$ olyan $\mathbb{R}\setminus\{0\}$-ban haladó, szigorúan monoton számsorozat, hogy $\lim(|\boldsymbol{b}|) = +\infty$, és az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \frac{\boldsymbol{a}(n+1) - \boldsymbol{a}(n)}{\boldsymbol{b}(n+1) - \boldsymbol{b}(n)}$$

sorozat konvergens $\mathbb{K}$-ban. Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \frac{\boldsymbol{a}(n)}{\boldsymbol{b}(n)}$$

sorozat is konvergens $\mathbb{K}$-ban, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{a}(n+1) - \boldsymbol{a}(n)}{\boldsymbol{b}(n+1) - \boldsymbol{b}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{a}(n)}{\boldsymbol{b}(n)}$$

teljesül (*Stolcz-tétel*).

(*Útmutatás.* Elegendő arra az esetre bizonyítani, amikor $\boldsymbol{b}$ szigorúan monoton növő sorozat és $\lim(\boldsymbol{b}) = +\infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\boldsymbol{a}(n+1)}{\boldsymbol{b}(n+1)} = \frac{\boldsymbol{a}(0) + \sum_{k=0}^{n} (\boldsymbol{b}(k+1) - \boldsymbol{b}(k)) \left(\frac{\boldsymbol{a}(k+1) - \boldsymbol{a}(k)}{\boldsymbol{b}(k+1) - \boldsymbol{b}(k)} \right)}{\boldsymbol{b}(0) + \sum_{k=0}^{n} (\boldsymbol{b}(k+1) - \boldsymbol{b}(k))} =$$

$$= \frac{\dfrac{\boldsymbol{a}(0)}{\boldsymbol{b}(n+1) - \boldsymbol{b}(0)} + \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \left(\dfrac{\boldsymbol{a}(k+1) - \boldsymbol{a}(k)}{\boldsymbol{b}(k+1) - \boldsymbol{b}(k)} \right)}{\dfrac{\boldsymbol{b}(0)}{\boldsymbol{b}(n+1) - \boldsymbol{b}(0)} + 1}$$

teljesül, ahol minden $k \le n$ természetes számra

$$\lambda_{n,k} := \frac{\boldsymbol{b}(k+1) - \boldsymbol{b}(k)}{\sum_{j=0}^{n} (\boldsymbol{b}(j+1) - \boldsymbol{b}(j))} \in [0,1].$$

Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = 1$, továbbá minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \le n$, akkor

$$\lambda_{n,k} = \frac{\boldsymbol{b}(k+1) - \boldsymbol{b}(k)}{\boldsymbol{b}(n+1) - \boldsymbol{b}(0)},$$

tehát minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = 0$. Ezért a **22**. gyakorlat alapján az állítás igaz.)

4. Numerikus sorok és elemi függvények

Állítás. A $\mathbb{K}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozathoz egyértelműen léteznek azok a szintén $\mathbb{K}$-ban haladó $\sum \boldsymbol{s}$ és $\prod \boldsymbol{s}$ sorozatok, amelyekre

$$(\sum \boldsymbol{s})(0) := \boldsymbol{s}(0), \quad \left(\prod \boldsymbol{s}\right)(0) := \boldsymbol{s}(0),$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\sum \boldsymbol{s})(n+1) = (\sum \boldsymbol{s})(n) + \boldsymbol{s}(n+1), \quad \left(\prod \boldsymbol{s}\right)(n+1) = \left(\prod \boldsymbol{s}\right)(n) \cdot \boldsymbol{s}(n+1).$$

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, és értelmezzük az

$$S : \mathbb{N} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; \quad (n, x) \mapsto x + \boldsymbol{s}(n+1),$$

$$P : \mathbb{N} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; \quad (n, x) \mapsto x \cdot \boldsymbol{s}(n+1)$$

függvényeket. Ekkor $\sum \boldsymbol{s}$ azonos a $\boldsymbol{s}(0) \in \mathbb{K}$ kezdőpont és S függvény által meghatározott, $\mathbb{K}$-ban haladó rekurzív sorozattal, továbbá $\prod \boldsymbol{s}$ azonos az $\boldsymbol{s}(0) \in \mathbb{K}$ kezdőpont és P függvény által meghatározott, $\mathbb{K}$-ban haladó rekurzív sorozattal. ■

Definíció. Ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat, akkor az előző állításban értelmezett $\sum \boldsymbol{s}$ (illetve $\prod \boldsymbol{s}$) számsorozatot az $\boldsymbol{s}$ *által meghatározott*, vagy $\boldsymbol{s}$*-hez tartozó*, vagy $\boldsymbol{s}$*-hez rendelt sornak* (illetve *szorzatnak*) nevezzük. Ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat, és $n \in \mathbb{N}$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor (illetve a $\prod \boldsymbol{s}$ szorzat) n-edik tagját, vagyis a $\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n)$ (illetve $\left(\prod \boldsymbol{s}\right)(n)$) számot az $\boldsymbol{s}$ sorozat *n-edik részletösszegének* (illetve *n-edik részletszorzatának*) nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az $\boldsymbol{s}$ számsorozathoz tartozó sort (illetve szorzatot) a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)$ (illetve a $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)$) szimbólummal is szokták jelölni, bár nyilvánvaló, hogy a $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)$ jel félrevezető, mert itt természetesen nem az $(\boldsymbol{s}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer halmazszorzatáról van szó. Ezért olykor a $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)$ szimbólum helyett a $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)$ jelölést alkalmazzuk.

Definíció. Ha az $\boldsymbol{s}$ számsorozat által meghatározott $\sum \boldsymbol{s}$ sor (illetve $\prod \boldsymbol{s}$ szorzat) konvergens, akkor a sor (illetve szorzat) határértékét a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)$ (illetve $\prod\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)$) szimbólum jelöli, és ezt a $\sum \boldsymbol{s}$ sor (illetve $\prod \boldsymbol{s}$ szorzat) *összegének* (illetve *szorzatának*) nevezzük.

Megjegyezzük azt, hogy ha az $\boldsymbol{s}$ számsorozat által meghatározott $\prod \boldsymbol{s}$ szorzat konvergens, de a határértéke egyenlő 0-val, akkor azt mondjuk, hogy a $\prod \boldsymbol{s}$ szorzat *nullához divergál.* Ezt a furcsa elnevezést az indokolja, hogy az ilyen szorzatok tulajdonságai egészen mások, mint a nem nulla számhoz konvergáló szorzatoké. A komplex sorozatokhoz tartozó szorzatokkal részletesebben a XI. fejezetben foglalkozunk.

A numerikus sorok speciális sorozatok, ezért a számsorozatokra értelmezett műveletek numerikus sorokra is alkalmazhatók. Könnyen látható, hogy ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ numerikus sorozatok és $c \in \mathbb{K}$, akkor

$$\sum(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}') = \sum \boldsymbol{s} + \sum \boldsymbol{s}', \quad \sum(c\cdot\boldsymbol{s}) = c\cdot\sum \boldsymbol{s}, \quad \overline{\sum \boldsymbol{s}} = \sum \overline{\boldsymbol{s}}$$

teljesül. Ebből az is következik, hogy ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ olyan numerikus sorozatok $\mathbb{K}$-ban, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ és $\sum \boldsymbol{s}'$ sorok konvergensek, továbbá $c \in \mathbb{K}$, akkor a $\sum(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')$, $\sum(c\cdot\boldsymbol{s})$ és $\sum \overline{\boldsymbol{s}}$ sorok konvergensek, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{s}'(k)) = \sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{s}(k) + \sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{s}'(k),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(c\cdot\boldsymbol{s}(k)) = c\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{s}(k),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\boldsymbol{s}(k)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{s}(k)}.$$

Azonban vigyázzunk arra, hogy általában $\left|\sum \boldsymbol{s}\right| \neq \sum |\boldsymbol{s}|$ és $\left(\sum \boldsymbol{s}\right)\cdot\left(\sum \boldsymbol{s}'\right) \neq \sum(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}')$!

A numerikus sorok konvergenciájának legegyszerűbb *szükséges feltételét* fogalmazzuk meg a következő állításban.

Állítás. Ha az $\boldsymbol{s}$ számsorozathoz tartozó $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens, akkor $\boldsymbol{s}$ zérussorozat.

Bizonyítás. Ha a $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens és határértéke egyenlő S-sel, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra $\left|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) - S\right| < \varepsilon/2$; ekkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor *rekurzív definíciója* szerint, minden $n > N+1$ természetes számra

$$|\boldsymbol{s}(n)| = \left|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n-1)\right| \leq$$
$$\leq \left|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) - S\right| + \left|S - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n-1)\right| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim \boldsymbol{s} = 0$. ■

Azonban létezik olyan $\boldsymbol{s}$ zérussorozat, amelyre a $\sum \boldsymbol{s}$ sor divergens, ezért az előző állításban megfogalmazott feltétel *nem elégséges* a sor konvergencájához. Uganakkor, a Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján könnyen megadható nemtirviális szükséges és elégséges feltétel a sorok konvergenciájára.

Állítás. (*Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra.*) Az $\boldsymbol{s}$ számsorozathoz tartozó $\sum \boldsymbol{s}$ sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > m > N$, akkor

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \boldsymbol{s}(k) \right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Ha a $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens, akkor ez Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m, n > N$ természetes számra $\left| \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(m) \right| < \varepsilon$. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$ és $n > m > N$ esetén

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \boldsymbol{s}(k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k) - \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{s}(k) \right| = \left| \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(m) \right| < \varepsilon.$$

Megfordítva; tegyük fel, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor rendelkezik az adott tulajdonsággal és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A feltétel szerint vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > m > N$, akkor

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \boldsymbol{s}(k) \right| < \varepsilon.$$

Ekkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, $m > N$, $n > N$ és $m \neq n$ esetén $\max(m, n) > \min(m, n) > N$, tehát

$$\left| \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(m) - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) \right| = \left| \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \boldsymbol{s}(k) \right| < \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\sum \boldsymbol{s}$ *Cauchy-sorozat*, tehát a sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumból következik, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens. ■

Definíció. Az $\boldsymbol{s}$ számsorozathoz tartozó $\sum \boldsymbol{s}$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum |\boldsymbol{s}|$ sor konvergens.

Következmény. Minden abszolút konvergens numerikus sor konvergens, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan számsorozat, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens, akkor fennáll az

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}(k)|$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ olyan számsorozat, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens. Ekkor a $\sum |\boldsymbol{s}|$ konvergens sorra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$ és $n > m > N$ esetén

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \boldsymbol{s}(k) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\boldsymbol{s}(k)| < \varepsilon,$$

tehát a $\sum \boldsymbol{s}$ sorra is teljesül a Cauchy-féle konvergenciakritérium, így $\sum \boldsymbol{s}$ konvergens. Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left| \left(\sum \boldsymbol{s} \right)(n) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{s}(k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}(k)|,$$

ezért fennáll a

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k) \right| = \left| \lim \left(\sum \boldsymbol{s} \right) \right| = \lim \left| \sum \boldsymbol{s} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \left(\sum \boldsymbol{s} \right)(n) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}(k)|$$

egyenlőtlenség. ■

Azonban könnyen megadható példa konvergens és nem abszolút konvergens számsorzatokra. A nem abszolút konvergens, de konvergens számsorozatokat *feltételesen konvergens* soroknak nevezzük.

Állítás. (*Majoráns kritérium.*) Ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat, és $\boldsymbol{s}'$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum \boldsymbol{s}'$ sor konvergens és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq N$ esetén $|\boldsymbol{s}(k)| \leq \boldsymbol{s}'(k)$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).

Bizonyítás. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq N$ esetén $|\boldsymbol{s}(k)| \leq \boldsymbol{s}'(k)$. Ha $n > N$ tetszőleges temészetes szám, akkor

$$\begin{aligned} \left(\sum |\boldsymbol{s}| \right)(n) &= \sum_{k=0}^{N} |\boldsymbol{s}(k)| + \sum_{k=N+1}^{n} |\boldsymbol{s}(k)| \leq \sum_{k=0}^{N} |\boldsymbol{s}(k)| + \sum_{k=N+1}^{n} \boldsymbol{s}'(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N} |\boldsymbol{s}(k)| - \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{s}'(k) + \left(\sum \boldsymbol{s}' \right)(n). \end{aligned}$$

A $\sum \boldsymbol{s}'$ sorozat monoton növő konvergens valós sorozat, így felülről korlátos. Az előző egyenlőtlenség szerint a $\sum |\boldsymbol{s}|$ monoton növő valós sorozat is felülről korlátos, tehát konvergens, vagyis a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens. ■

Definíció. *Hatványsorozatoknak* nevezzük az $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$; $n \mapsto \boldsymbol{a}(n) \cdot z^n$ alakú számsorozatokat, ahol $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat és $z \in \mathbb{K}$. *Komplex*

trigonometrikus sorozatoknak nevezzük azokat az $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$; $n \mapsto \boldsymbol{a}(n) \cdot z^n$ alakú hatványsorozatokat, amelyekre $z \in \mathbb{U}$ (azaz $|z| = 1$). A hatványsorozatokhoz (illetve komplex trigonometrikus sorozatokhoz) tartozó sorokat *hatványsoroknak* (illetve *komplex trigonometrikus soroknak*) nevezzük.

Állítás. (*A geometriai sorok konvergenciája.*) Tegyük fel, hogy $z \in \mathbb{K}$.
- Ha $|z| < 1$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z^k$ sor abszolút konvergens $\mathbb{K}$-ban, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z},$$

- Ha $|z| \geq 1$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z^k$ sor divergens.

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{K}$, és tegyük fel, hogy $|z| < 1$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|},$$

és a II. fejezet 3. pont **7**. gyakorlat szerint $\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^n}{|1-z|} = 0$, tehát a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z^k$ sor konvergens $\mathbb{K}$-ban, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Egyidejűleg azt is megkaptuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |z|^k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, vagyis a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z^k$ sor abszolút konvergens $\mathbb{K}$-ban.
Ha $z \in \mathbb{K}$ és $|z| \geq 1$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $|z^k| = |z|^k \geq 1$, tehát a $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat nem konvergál nullához, ezért a $\sum_{k\in\mathbb{N}} z^k$ sor nem lehet konvergens. ■

Állítás. (*Cauchy-féle gyökkritérium.*) Legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges számsorozat.
- Ha $\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} < 1$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens.
- Ha $\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} > 1$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor divergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} < 1$, és rögzítsünk olyan $q \in \mathbb{R}$ számot, amelyre

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \right) =: \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} < q < 1.$$

Ekkor vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} < q$, így minden $k \geq n$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(k)| < q^k$. A $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$ geometriai sor konvergens, mert $q \in]0,1[$, így a majoráns kritérium szerint a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens.

Tegyük fel, hogy $\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/n} > 1$, és rögzítsünk olyan $q \in \mathbb{R}$ számot, amelyre

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \right) =: \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} > \ q > \ 1.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n+1} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \ > \ q,$$

tehát van olyan $k > n$ természetes szám, amelyre $|\boldsymbol{s}(k)| > q^k$. Ezért értelmezhetjük azt az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n) := \min\{k \in \mathbb{N} | (k > n) \wedge (|\boldsymbol{s}(k)| > q^k)\}.$$

Legyen σ a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozat. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma(n+1) = f(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N} | (k > \sigma(n)) \wedge (|\boldsymbol{s}(k)| > q^k)\},$$

tehát $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ és $|\boldsymbol{s}(\sigma(n+1))| > q^{\sigma(n+1)} \geq q^{n+1}$. A $q > 1$ feltétel miatt a $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos, ugyanakkor az előzőek szerint minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $|(\boldsymbol{s} \circ \sigma)(k)| > q^k$, így $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ az $\boldsymbol{s}$-nek nem korlátos részsorozata. Ezért az $\boldsymbol{s}$ sorozat nem konvergál 0-hoz, így a $\sum \boldsymbol{s}$ sor nem lehet konvergens. ■

Azonban $\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} = 1$ esetén a $\sum \boldsymbol{s}$ sor lehet divergens, lehet feltételesen konvergens és lehet abszolút konvergens, tehát ebben az esetben a Cauchy-féle gyökkritérium *alkalmatlan* a sor konvergenciájának eldöntésére.

Definíció. Ha $\boldsymbol{a}$ számsorozat, akkor értelmezzük a következő elemet $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban

$$R_{\boldsymbol{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k}} & \text{, ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = 0, \end{cases}$$

és $R_{\boldsymbol{a}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet az $\boldsymbol{a}$ sorozathoz tartozó *Cauchy-féle konvergenciasugárnak* nevezzük.

Tétel. (*Cauchy-Hadamard tétel.*) Legyen $\boldsymbol{a}$ számsorozat, $c \in \mathbb{K}$ és $z \in \mathbb{K}$.

- Ha $|z - c| < R_{\boldsymbol{a}}$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ hatványsor abszolút konvergens.

- Ha $|z - c| > R_{\boldsymbol{a}}$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ hatványsor divergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 < R_{\boldsymbol{a}} < +\infty$. Ekkor $|z-c| < R_{\boldsymbol{a}}$ esetén

$$1 > |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} \Big(|z-c||\boldsymbol{a}(k)|^{1/k}\Big) = \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)(z-c)^k|^{1/k},$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ sor abszolút konvergens. Ha viszont $|z-c| > R_{\boldsymbol{a}}$, akkor

$$1 < |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} \Big(|z-c||\boldsymbol{a}(k)|^{1/k}\Big) = \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)(z-c)^k|^{1/k},$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ sor divergens.

Most tegyük fel, hogy $R_{\boldsymbol{a}} = 0$, vagyis $\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = +\infty$. Ha $z \neq c$, akkor

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)(z-c)^k|^{1/k} = |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = |z-c| \cdot (+\infty) := +\infty > 1,$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ sor divergens.

Végül tegyük fel, hogy $R_{\boldsymbol{a}} = +\infty$, vagyis $\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = 0$. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbb{K}$ esetén

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)(z-c)^k|^{1/k} = |z-c| \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = |z-c| \cdot 0 = 0 < 1,$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ sor abszolút konvergens. ■

A Cauchy-Hadamard tétel semmit nem mond arról, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ hatványsor konvergens-e $|z-c| = R_{\boldsymbol{a}}$ esetén? A későbbiekben szó lesz az Abel-féle konvergenciakritériumról, amely legalábbis részben választ ad erre a kérdésre.

Lemma. Ha $\boldsymbol{s}$ olyan számsorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(k) \neq 0$, akkor

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|} \leq \liminf_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}$$

teljesül.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\limsup_{k\to\infty} \frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|} < C$, akkor $\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \leq C$ is igaz; ez a tény a harmadik egyenlőtlenséget igazolja.

Valóban, ha

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}\right)=:\limsup_{k\to\infty}\frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}<C,$$

akkor vehetünk olyan $n\in\mathbb{N}$ számot, amelyre minden $k\in\mathbb{N}$, $k\geq n$ esetén

$$\frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}<C$$

teljesül. Ebből teljes indukcióval könnyen kapjuk, hogy minden $k>n$ természetes számra

$$|\boldsymbol{s}(k)|^{1/k}<C\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{s}(n)|}{C^n}\right)^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}|\boldsymbol{s}(k)|^{1/k}\leq\limsup_{k\to\infty}\left(C\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{s}(n)|}{C^n}\right)^{1/k}\right)=C.$$

Most megmutatjuk, hogy ha $C\in\mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\liminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}>C$, akkor $\liminf\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{s}(k)|^{1/k}\geq C$ is igaz; ez a tény az első egyenlőtlenséget igazolja.
Valóban, ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}\right)=:\liminf_{k\to\infty}\frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}>C,$$

akkor vehetünk olyan $n\in\mathbb{N}$ számot, amelyre minden $k\in\mathbb{N}$, $k\geq n$ esetén

$$\frac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|}>C$$

teljesül. Ebből teljes indukcióval könnyen kapjuk, hogy minden $k>n$ természetes számra

$$|\boldsymbol{s}(k)|^{1/k}>C\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{s}(n)|}{C^n}\right)^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\liminf_{k\to\infty}|\boldsymbol{s}(k)|^{1/k}\geq\liminf_{k\to\infty}\left(C\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{s}(n)|}{C^n}\right)^{1/k}\right)=C$$

teljesül. ■

Következmény. Ha $\boldsymbol{s}$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó számsorozat, hogy az $\left(\dfrac{\boldsymbol{s}(k+1)}{\boldsymbol{s}(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor a $((\boldsymbol{s}(k))^{1/k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\boldsymbol{s}(k+1)}{\boldsymbol{s}(k)}=\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{s}(k))^{1/k}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az előző lemma és a valós sorozatok konvergenciájának limsup-pal és liminf-fel való kapcsolata alapján nyilvánvaló. ■

Állítás. (*D'Alembert-féle hányadoskritérium.*) Legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges olyan számsorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(k) \neq 0$.

- Ha $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|} < 1$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens.

- Ha $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|} > 1$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor divergens.

Bizonyítás. Az előző lemma és Cauchy-féle gyökkritérium alapján nyilvánvaló. ■

Látható, hogy ha egy numerikus sor abszolút konvergenciája, illetve divergenciája eldönthető a hányadoskritérium alapján, akkor a gyökkritérium alapján is eldönthető; azonban ennek megfordítása nem igaz. Ez azt jelenti, hogy létezhet olyan $\boldsymbol{s}$ számsorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(k)\neq 0$ és $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|} \geq 1$ *és* $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\boldsymbol{s}(k+1)|}{|\boldsymbol{s}(k)|} \leq 1$, vagyis a hányadoskritérium nem alkalmazható, ugyanakkor $\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^{1/k} \neq 1$, tehát a gyökkritérium alkalmazható. Például a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^k+2}{2^k}$ sor a gyökkritérium szerint abszolút konvergens, de a hányadoskritériummal nem dönthető el a konvergenciája. Viszont ez a tény nem teszi feleslegessé a hányadoskritériumot, mert sok sor konvergenciáját egyszerűbb eldönteni a hányadoskritérium alapján, mint a gyökkritérium alkalmazásával.

Definíció. Minden $m \in \mathbb{N}$ számra σ_m jelöli az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $n \mapsto m+n$ leképezést. Ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat és $m \in \mathbb{N}$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor *m-edik maradéktagjának* nevezzük és a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \boldsymbol{s}(k)$ szimbólummal jelöljük a $\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)$ sort, továbbá ennek összegét (ha létezik) a $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)$ szimbólummal jelöljük.

Tehát ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat és $m \in \mathbb{N}$, akkor $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \boldsymbol{s}(k)$ az a sorozat, amely minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz a $\sum\limits_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(m+k)$, vagyis a $\sum\limits_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{s}(k)$ értéket rendeli. Figyeljük meg, hogy ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat és $m \in \mathbb{N}$, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor m-edik maradéktagja *független* az $\{\boldsymbol{s}(k)|(k \in \mathbb{N}) \wedge (k < m)\}$ halmaztól, vagyis ha $\boldsymbol{s}'$ olyan számsorozat, hogy minden $k \geq m$ természetes számra $\boldsymbol{s}(k) = \boldsymbol{s}'(k)$, akkor $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \boldsymbol{s}(k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \boldsymbol{s}'(k)$. Sőt, ha $m \in \mathbb{N}$ és $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{K}$ olyan függvény, hogy $Dom(\boldsymbol{s}) = \{k \in \mathbb{N}|k \geq m\}$, akkor minden $n \geq m$ természetes számra az $\boldsymbol{s}\circ\sigma_n$ függvény definíciós tartománya egyenlő $\mathbb{N}$-nel (vagyis ez sorozat), így van értelme

a $\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_n)$ sorról beszélni, amit szintén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n}\boldsymbol{s}(k)$ szimbólummal jelölünk. Például a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1}\dfrac{1}{k}$ sor az a sorozat, amely minden $n>0$ természetes számhoz a $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ értéket rendeli.

A következő állítás bizonyításában felhasználjuk azt, hogy ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat, és van olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy az $\boldsymbol{s}\circ\sigma_m$ sorozat konvergens, akkor az $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens. Valóban, ha $x:=\lim(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)$, akkor $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $k>N$ természetes számra $|x-\boldsymbol{s}(m+k)|<\varepsilon$; ekkor világos, hogy minden $n>m+N$ természetes számra $|x-\boldsymbol{s}(n)|<\varepsilon$, tehát $\boldsymbol{s}$ konvergens.

Állítás. Ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) *Minden* $m\in\mathbb{N}$ esetén a $\sum\boldsymbol{s}$ sor m-edik maradéktagja konvergens.

b) *Létezik* olyan $m\in\mathbb{N}$, amelyre a $\sum\boldsymbol{s}$ sor m-edik maradéktagja konvergens.

c) A $\sum\boldsymbol{s}$ sor konvergens.

Továbbá, ha a $\sum\boldsymbol{s}$ sor konvergens, akkor minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{s}(k)=\sum_{k=0}^{m}\boldsymbol{s}(k)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\boldsymbol{s}(k).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $m\in\mathbb{N}^+$ számra

$$\left(\sum\boldsymbol{s}\right)\circ\sigma_m=\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m-1)+\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m),$$

ahol a jobb oldalon a $\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m)$ értékű konstans-sorozat és a $\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)$ sorozat összege áll. Legyen $m\in\mathbb{N}^+$ rögzítve; teljes indukcióval azt fogjuk igazolni, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ számra

$$\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m+n)=\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m-1)+\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)\right)(n).$$

Ez $n=0$ esetén nyilvánvalóan igaz, mert $\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)\right)(0):=\boldsymbol{s}(m)$, és a sorok rekurzív definíciója alapján

$$\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m)=\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m-1)+\boldsymbol{s}(m).$$

Ha az egyenlőség igaz az $n\in\mathbb{N}$ számra, akkor

$$\begin{aligned}\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m+n+1)&:=\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(n+m)+\boldsymbol{s}(m+n+1)=\\&=\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m-1)+\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)\right)(n)+\boldsymbol{s}(m+n+1)=\\&=\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m-1)+\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)\right)(n)+(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)(n+1)=:\\&=:\left(\sum\boldsymbol{s}\right)(m-1)+\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma_m)\right)(n+1),\end{aligned}$$

tehát az állítás $n+1$-re is igaz.
(i)$\Rightarrow$(ii) Triviális.
(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen $m \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor m-edik maradéktagja konvergens. Ekkor

$$\left(\sum \boldsymbol{s}\right) \circ \sigma_m = \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(m-1) + \sum(\boldsymbol{s} \circ \sigma_m)$$

miatt a $\left(\sum \boldsymbol{s}\right) \circ \sigma_m$ sorozat konvergens, tehát az állítás előtt álló megjegyzés alapján a $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens, vagyis (iii) teljesül.
(iii)$\Rightarrow$(i) Minden $m \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum(\boldsymbol{s} \circ \sigma_m) = \left(\sum \boldsymbol{s}\right) \circ \sigma_m - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(m-1),$$

és ha a $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens, akkor a $\left(\sum \boldsymbol{s}\right) \circ \sigma_m$ sorozat is konvergens, így $\sum(\boldsymbol{s} \circ \sigma_m)$ konvergens. Az is látható, hogy ha $m \in \mathbb{N}$ és $\sum \boldsymbol{s}$ konvergens, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k) := \lim \left(\sum \boldsymbol{s}\right) = \lim \left(\left(\sum \boldsymbol{s}\right) \circ \sigma_{m+1}\right) =$$

$$= \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(m) + \lim \left(\sum(\boldsymbol{s} \circ \sigma_{m+1})\right) =: \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{s}(k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)$$

teljesül. ■

Következmény. Ha az $\boldsymbol{s}$ számsorozathoz tartozó sor konvergens, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \boldsymbol{s}(k) \;=\; 0.$$

Definíció. Ha $\boldsymbol{s}$ számsorozat, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor *átrendezésének* nevezünk minden $\sum(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$ alakú sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges *bijekció*.

Állítás. Abszolút konvergens numerikus sor minden átrendezése abszolút konvergens, és bármely átrendezésének ugyanaz az összege, mint az eredeti soré.
Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens, és legyen $S := \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)$. Rögzítünk továbbá egy tetszőleges $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót. A bizonyítás során $n \in \mathbb{N}$ esetén a szemléletesebb $[0,n]_{\mathbb{N}}$ jelölést fogjuk alkalmazni a $\{k \in \mathbb{N} | k \le n\}$ halmazra (tehát valójában $[0,n]_{\mathbb{N}} := n+1$).
Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\sigma\langle[0,n]_{\mathbb{N}}\rangle$ *véges* részhalmaza $\mathbb{N}$-nek, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\sigma\langle[0,n]_{\mathbb{N}}\rangle \subseteq [0,N]_{\mathbb{N}}$, vagyis minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \le n$, akkor $\sigma(k) \le N$; ekkor

$$\left(\sum |\boldsymbol{s} \circ \sigma|\right)(n) = \sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{s}(\sigma(k))| \le \sum_{k=0}^{N} |\boldsymbol{s}(k)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}(k)|,$$

ami azt jelenti, hogy a $\sum |\boldsymbol{s}\circ\sigma|$ monoton növő valós sorozat felülről korlátos, vagyis konvergens, így a $\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma)$ sor abszolút konvergens. (Megjegyezzük, hogy ez még *tetszőleges* $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvényre igaz!) Megmutatjuk, hogy ha $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *bijekció*, akkor a $\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma)$ sor összege egyenlő S-sel.

Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ rögzített. A $\sum|\boldsymbol{s}|$ sor konvergens, ezért az előző következmény alapján vehetünk olyan $N'\in\mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m\in\mathbb{N}$, $m>N'$ esetén

$$\sum_{k=m}^{\infty}|\boldsymbol{s}(k)|<\varepsilon/2.$$

Természetesen ekkor az $m:=N'+1$ választással kapjuk, hogy

$$\left|S-\sum_{k=0}^{N'}\boldsymbol{s}(k)\right|=\left|\sum_{k=N'+1}^{\infty}\boldsymbol{s}(k)\right|\le\sum_{k=N'+1}^{\infty}|\boldsymbol{s}(k)|<\varepsilon/2$$

is teljesül. A $\sigma^{-1}\langle[0,N']_{\mathbb{N}}\rangle$ halmaz véges, ezért vehetünk olyan $N\in\mathbb{N}$ számot, amelyre $\sigma^{-1}\langle[0,N']_{\mathbb{N}}\rangle\subseteq[0,N]_{\mathbb{N}}$, vagyis minden $j\le N'$ természetes számhoz, van (egyetlen) olyan $k\le N$ természetes szám, hogy $j=\sigma(k)$. Ha $n\in\mathbb{N}$ és $n\ge N$, akkor $[0,N']_{\mathbb{N}}\subseteq\sigma\langle[0,N]_{\mathbb{N}}\rangle\subseteq\sigma\langle[0,n]_{\mathbb{N}}\rangle$, ezért fennáll az

$$\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma)\right)(n)=\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{s}(\sigma(k))=\sum_{j=0}^{N'}\boldsymbol{s}(j)+\sum_{k\in[0,n]_{\mathbb{N}},\ \sigma(k)>N'}\boldsymbol{s}(\sigma(k))$$

egyenlőség, amiből következik, hogy

$$\left|\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma)\right)(n)-\sum_{k=0}^{N'}\boldsymbol{s}(k)\right|\le\sum_{k\in[0,n]_{\mathbb{N}},\ \sigma(k)>N'}|\boldsymbol{s}(\sigma(k))|\le$$
$$\le\sum_{j=N'+1}^{\max\sigma\langle[0,n]_{\mathbb{N}}\rangle}|\boldsymbol{s}(j)|\le\sum_{k=N'+1}^{\infty}|\boldsymbol{s}(k)|<\varepsilon/2.$$

Tehát a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $n\ge N$ természetes számra

$$\left|\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma)\right)(n)-S\right|\le\left|\left(\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma)\right)(n)-\sum_{k=0}^{N'}\boldsymbol{s}(k)\right|+\left|S-\sum_{k=0}^{N'}\boldsymbol{s}(k)\right|<\varepsilon$$

is igaz. Ebből következik, hogy a $\sum(\boldsymbol{s}\circ\sigma)$ sor összege egyenlő S-sel. ■

Definíció. Egy numerikus sort *feltétlen konvergensnek* nevezünk, ha minden átrendezése konvergens.

Tehát az abszolút konvergens numerikus sorok feltétlen konvergensek; ennek megfordítása is igaz (*Riemann-tétel*; **4**. és **5**. gyakorlat).

Definíció. Az $\boldsymbol{s}$ számsorozatot *korlátos változásúnak* nevezzük, ha a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}(k+1)|$$

sor konvergens.

Állítás. Minden monoton és korlátos valós számsorozat korlátos változású.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ monoton fogyó valós számsorozat, és legyen $C \in \mathbb{R}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \geq C$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}(k+1)| = \sum_{k=0}^{n} (\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}(k+1)) = \boldsymbol{s}(0) - \boldsymbol{s}(n+1) \leq \boldsymbol{s}(0) - C,$$

vagyis a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}(k+1)|$ monoton növő sorozat felülről korlátos, tehát konvergens.

Legyen $\boldsymbol{s}$ monoton növő valós számsorozat, és legyen $C \in \mathbb{R}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \leq C$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}(k+1)| = \sum_{k=0}^{n} (\boldsymbol{s}(k+1) - \boldsymbol{s}(k)) = \boldsymbol{s}(n+1) - \boldsymbol{s}(0) \leq C - s(0),$$

vagyis a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}(k+1)|$ monoton növő sorozat felülről korlátos, tehát konvergens. ■

Állítás. (*Abel-féle konvergenciakritérium.*) Legyen $\boldsymbol{a}$ korlátos változású zérussorozat $\mathbb{K}$-ban, és $\boldsymbol{b}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_m := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k) \right| < +\infty$$

teljesül. Ekkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)$ sor konvergens, és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k) \right| \leq \left(\sum_{k=m}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)| \right) \cdot \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k) \right| \right)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. Először teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k) =$$

$$= \sum_{k=m}^{m+n-1} \left((\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \boldsymbol{b}(j) \right) \right) + \boldsymbol{a}(m+n) \left(\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k) \right).$$

(Ezt a formulát nevezzük az egyenlőség bal oldalán álló összeg *Abel-féle átrendezésének*).

Ha $n = 1$, akkor egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az egyenlőség mindkét oldalán $\boldsymbol{a}(m)\boldsymbol{b}(m) + \boldsymbol{a}(m+1)\boldsymbol{b}(m+1)$ áll. Tegyük fel, hogy az egyenlőség igaz az $n \in \mathbb{N}^+$ számra. Ekkor

$$\sum_{k=m}^{m+n+1} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k) = \left(\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)\right) + \boldsymbol{a}(m+n+1)\boldsymbol{b}(m+n+1) =$$

$$= \sum_{k=m}^{m+n-1} \left((\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \boldsymbol{b}(j)\right)\right) + \boldsymbol{a}(m+n)\left(\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k)\right) +$$

$$+\boldsymbol{a}(m+n+1)\boldsymbol{b}(m+n+1).$$

Ugyanakkor egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{a}(m+n)\left(\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k)\right) + \boldsymbol{a}(m+n+1)\boldsymbol{b}(m+n+1) =$$

$$= (\boldsymbol{a}(m+n) - \boldsymbol{a}(m+n+1))\left(\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k)\right) +$$

$$+\boldsymbol{a}(m+n+1)\left(\left(\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k)\right) + \boldsymbol{b}(m+n+1)\right) =$$

$$= (\boldsymbol{a}(m+n) - \boldsymbol{a}(m+n+1))\left(\sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k)\right) + \boldsymbol{a}(m+n+1)\left(\sum_{k=m}^{m+n+1} \boldsymbol{b}(k)\right).$$

Ezt az előző formulába helyettesítve, és végrehajtva alkalmas összevonásokat

$$\sum_{k=m}^{m+n+1} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k) =$$

$$= \sum_{k=m}^{m+n} \left((\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \boldsymbol{b}(j)\right)\right) + \boldsymbol{a}(m+n+1)\left(\sum_{k=m}^{m+n+1} \boldsymbol{b}(k)\right)$$

adódik, tehát az egyenlőség $n+1$-re is igaz, amivel a teljes indukciót végrehajtottuk.

A most bizonyított formula a következő ekvivalens formában is felírható: minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}, k\geq m} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)\right)(n+1) =$$

$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}, k\geq m} \left((\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)) \cdot \left(\sum_{j=m}^{k} \boldsymbol{b}(j)\right)\right)\right)(n) +$$

$$+ (\boldsymbol{a} \circ \sigma_{m+1})(n) \cdot \left(\sum_{k=m}^{m+n+1} \boldsymbol{b}(k)\right)$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)\right)\circ\sigma_1$$

sorozatot két sorozat összegeként állítottuk elő. Megmutatjuk, hogy a felbontásban szereplő mindkét sorozat konvergens.

a) A maradéktag-sorok értelmezése alapján

$$\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\left((\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\boldsymbol{b}(j)\right)\right):=$$

$$:=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left((\boldsymbol{a}(m+k)-\boldsymbol{a}(m+k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{m+k}\boldsymbol{b}(j)\right)\right).$$

Továbbá, minden $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$|\boldsymbol{a}(m+k)-\boldsymbol{a}(m+k+1)|\cdot\left|\sum_{j=m}^{m+k}\boldsymbol{b}(j)\right|\leq|\boldsymbol{a}(m+k)-\boldsymbol{a}(m+k+1)|\cdot C_m,$$

ugyanakkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}}|\boldsymbol{a}(m+k)-\boldsymbol{a}(m+k+1)|$ sor konvergens, hiszen ez *egyenlő* a $\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}|\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{a}(k+1)|$ sorral, ami konvergens, mert az $\boldsymbol{a}$ sorozat korlátos változású. Ezért a majoráns kritérium alapján a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\left((\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\boldsymbol{b}(j)\right)\right)$$

sor *abszolút konvergens*, így konvergens.

b) Az $\boldsymbol{a}$ sorozat 0-hoz konvergál, ezért $\boldsymbol{a}\circ\sigma_m$ is zérussorozat. A $\boldsymbol{b}$-re vonatkozó hipotézis szerint az

$$\mathbb{N}\to\mathbb{K};\quad n\mapsto\sum_{k=m}^{m+n+1}\boldsymbol{b}(k)$$

sorozat korlátos. Ebből következik, hogy az

$$\mathbb{N}\to\mathbb{K};\quad n\mapsto(\boldsymbol{a}\circ\sigma_{m+1})(n)\cdot\left(\sum_{k=m}^{m+n+1}\boldsymbol{b}(k)\right)$$

sorozat 0-hoz konvergál.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)\right)\circ\sigma_1$$

sorozat konvergens, ezért a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},k\geq m} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)$ sor is konvergens, továbbá fennáll az

$$\sum_{k=m}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k) := \lim\left(\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq m} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)\right) = \lim\left(\left(\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)\right)\circ\sigma_1\right) =$$

$$= \lim\left(\sum_{k\in\mathbb{N},k\geq m}\left((\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\boldsymbol{b}(j)\right)\right)\right) =:$$

$$=: \sum_{k=m}^{\infty}\left((\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\boldsymbol{b}(j)\right)\right)$$

egyenlőség. Ebből következik, hogy teljesül a

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)\right| = \left|\sum_{k=m}^{\infty}\left((\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{a}(k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{k}\boldsymbol{b}(j)\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left((\boldsymbol{a}(m+k)-\boldsymbol{a}(m+k+1))\cdot\left(\sum_{j=m}^{m+k}\boldsymbol{b}(j)\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(|\boldsymbol{a}(m+k)-\boldsymbol{a}(m+k+1)|\cdot\left|\sum_{j=m}^{m+k}\boldsymbol{b}(j)\right|\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}|\boldsymbol{a}(m+k)-\boldsymbol{a}(m+k+1)|\right)\cdot C_m =:$$

$$=: \left(\sum_{k=m}^{\infty}|\boldsymbol{a}(k)-\boldsymbol{a}(k+1)|\right)\cdot\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\boldsymbol{b}(k)\right|\right)$$

egyenlőtlenség. ■

Fontos az, hogy az Abel-féle konvergenciakritérium tipikus *feltételes* konvergenciakritérium, ami azt jelenti, hogy azok a sorok, amelyek konvergenciáját az Abel-kritériummal bizonyítani lehet, általában nem abszolút konvergensek.

Definíció. *Alternáló* vagy *Leibniz-típusú* soroknak nevezzük a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\boldsymbol{a}(k)$ alakú numerikus sorokat, ahol $\boldsymbol{a}$ állandó előjelű valós számsorozat.

Következmény. (*Leibniz-féle konvergenciakritérium.*) Ha $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+$-ban haladó *monoton fogyó* sorozat, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\boldsymbol{a}(k)$ alternáló sor pontosan akkor konvergens, ha $\lim(\boldsymbol{a}) = 0$; és ha $\lim(\boldsymbol{a}) = 0$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\boldsymbol{a}(k)\right| \leq \boldsymbol{a}(m).$$

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{a}$ monoton fogyó sorozat $\mathbb{R}_+$-ban, akkor $\boldsymbol{a}$ korlátos, így korlátos változású, továbbá minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=m}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)| = \sum_{k=m}^{\infty} (\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)) = \boldsymbol{a}(m).$$

Ugyanakkor a $\boldsymbol{b} : \mathbb{N} \to \mathbb{K};\ k \mapsto (-1)^k$ sorozat olyan, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=m}^{m+n} \boldsymbol{b}(k) \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=m}^{m+n} (-1)^k \right| = 1 < +\infty.$$

Ha tehát $\lim(\boldsymbol{a})=0$, akkor az Abel-féle konvergenciakritérium következtében a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \boldsymbol{a}(k)$ sor konvergens, és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \boldsymbol{a}(k) \right| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=m}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)| \right) \cdot \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=m}^{m+n} (-1)^k \right| \right) = \boldsymbol{a}(m)$$

teljesül.

Megfordítva, ha a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \boldsymbol{a}(k)$ sor konvergens, akkor az $\mathbb{N} \to \mathbb{K};\ k \mapsto (-1)^k \boldsymbol{a}(k)$ sorozat zérussorozat, ezért $\lim(\boldsymbol{a}) = 0$. ■

Megjegyezzük, hogy az alternáló sorok konvergenciájára vonatkozó Leibniz-féle konvergenciakritériumot közvetlenül is könnyen bizonyítani lehet, az Abel-féle konvergenciakritérium nélkül is (**8**. gyakorlat). Azonban a következő állítás közvetlen bizonyítása nehéz volna, ugyanakkor az Abel-kritérium alkalmazásával könnyen belátható.

Következmény. (*Dirichlet-féle konvergenciakritérium.*) Legyen $\boldsymbol{a}$ korlátos változású komplex zérussorozat, és $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ (vagyis $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| = 1$ és $z \neq 1$). Ekkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k) z^k$ sor konvergens, és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \boldsymbol{a}(k) z^k \right| \leq \frac{2}{|1-z|} \cdot \sum_{k=m}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)|.$$

Bizonyítás. Ha $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=m}^{m+n} z^k \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| z^m \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|},$$

ezért az Abel-féle konvergenciakritérium alkalmazható az $\boldsymbol{a}$ sorozatra és arra a $\boldsymbol{b}$ komplex sorozatra, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{b}(k) := z^k$. Azt kapjuk, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)z^k$ sor konvergens, és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)z^k\right| \leq \left(\sum_{k=m}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)|\right) \cdot \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=m}^{m+n} z^k\right|\right) \leq$$
$$\leq \frac{2}{|1-z|} \cdot \sum_{k=m}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k) - \boldsymbol{a}(k+1)|$$

teljesül. ■

Most a numerikus sorok szorzásának problémájával foglalkozunk. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ számsorozatok, és készítsük el az $(\boldsymbol{a}(i)\boldsymbol{b}(j))_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszert. Azt kérdezzük: ha a $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ sorok konvergensek, akkor hogyan kell, vagy hogyan lehet *összegezni* ezt a rendszert úgy, hogy az *összege* megegyezzen a $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ sorok összegének a szorzatával? Itt az a probléma, hogy a $(\boldsymbol{a}(i)\boldsymbol{b}(j))_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ rendszer *nem sorozat*, hiszen nem az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett, ezért e rendszer összegzését még értelmezni kell. Az összegzés definíciójára egy lehetséges módszer az, ha kijelölünk egy $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozatot, amelynek minden tagja nem üres véges részhalmaza $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-nek, és $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ teljesül; ezután elkészíthető a

$$\left(\sum_{(i,j)\in E_k} \boldsymbol{a}(i)\boldsymbol{b}(j)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

számsorozat, és természetesen vehetjük az ehhez tartozó

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{(i,j)\in E_k} \boldsymbol{a}(i)\boldsymbol{b}(j)\right)$$

numerikus *szorzat-sort*. Ezután a pontos matematikai kérdés az, hogy milyen legyen az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat ahhoz, hogy konvergens $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ numerikus sorok esetén az előző *szorzat-sor* konvergens legyen, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{(i,j)\in E_k} \boldsymbol{a}(i)\boldsymbol{b}(j)\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(i)\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{b}(j)\right)$$

teljesüljön? Esetleg előfordulhat, hogy az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat olyan, hogy az általa meghatározott szorzat-sor nem minden konvergens sor-párra konvergens; ilyenkor azt kérdezhetjük, hogy az eredeti sorok konvergenciája mellett milyen egyéb feltételek biztosítják a szorzat-sor konvergenciáját?

Definíció. A $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ numerikus sorok *Cauchy-szorzatának* nevezzük a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ i+j=k} \boldsymbol{a}(i)\boldsymbol{b}(j)\right)$$

sort.

Tehát a Cauchy-szorzat az általános szorzat-sor fogalomnak az a speciális esete, amely ahhoz az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozathoz tartozik, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $E_k := \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | i+j=k\}$. Könnyen látható, hogy a $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ numerikus sorok Cauchy-szorzata a következő alakba is írható:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) \right).$$

Állítás. (*Mertens-tétel*) Ha a $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ numerikus sorok konvergensek, és legalább az egyikük abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzatuk konvergens és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) \right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{b}(j) \right)$$

teljesül. Ha mindkét sor abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum \boldsymbol{a}$ sor abszolút konvergens és a $\sum \boldsymbol{b}$ sor konvergens, továbbá legyenek

$$A := \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(j), \quad B := \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{b}(j).$$

Megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) \right)$$

sor konvergens és az összege egyenlő AB-vel.

Először megjegyezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) \right) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) \right).$$

Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$ rögzített, és minden $j, k \le n$ természetes számra bevezetjük a

$$\boldsymbol{c}(j,k) := \begin{cases} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) & \text{, ha } j \le k, \\ 0 & \text{, ha } j > k \end{cases}$$

számot, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{c}(j,k) \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{c}(j,k) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) \right) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) \left(\sum_{k=j}^{n} \boldsymbol{b}(k-j) \right) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) \right).$$

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ rögzített; ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j) \right) \; - \; AB \; =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B \right) + \left(\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) - A \right) \cdot B$$

A $\sum \boldsymbol{a}$ sor konvergens, ezért az $\mathbb{N} \to \mathbb{K};\ n \mapsto \left(\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) - A \right) \cdot B$ sorozat 0-hoz konvergál, így elég azt igazolni, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \;\mapsto\; \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B \right)$$

függvény zérussorozat.

Ehhez először megjegyezzük, hogy a $\sum \boldsymbol{b}$ sor konvergens, ezért a $\left(\sum \boldsymbol{b}\right) - B$ sorozat 0-hoz konvergál, így korlátos is, tehát vehetünk olyan $C > 0$ valós számot, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\left| \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{b}(k) - B \right| \leq C$ teljesül.

Legyen most $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$, $m > N'$ esetén $\left| \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{b}(k) - B \right| < \varepsilon'$ teljesül. A $\sum \boldsymbol{a}$ sor abszolút konvergens, ezért van olyan $N'' \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N''$ természetes számra $\sum_{k=m}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)| < \varepsilon'$. Legyen $N := \max(N', N'')$, és rögzítsünk egy $n > 2N$ természetes számot. Ekkor

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B \right) \right| \leq \sum_{j=0}^{n} |\boldsymbol{a}(j)| \left| \sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B \right| =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} |\boldsymbol{a}(j)| \left| \sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B \right| + \sum_{j=N+1}^{n} |\boldsymbol{a}(j)| \left| \sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B \right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{N} |\boldsymbol{a}(j)| \right) \cdot \varepsilon' + \left(\sum_{j=N+1}^{n} |\boldsymbol{a}(j)| \right) \cdot C \leq \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(j)| \right) + C \right) \cdot \varepsilon',$$

mert $j \in \mathbb{N}$, $j \leq N$ esetén $n-j > N \geq N'$, tehát $\left|\sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B\right| < \varepsilon'$. Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot úgy értelmezzük, hogy

$$\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(j)|\right) + C\right) \cdot \varepsilon' < \varepsilon$$

teljesüljön, akkor az ε'-höz imént választott $N', N'' \in \mathbb{N}$ számokra az $N := \max(N', N'')$ természetes szám olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > 2N$ esetén

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}(j) \left(\sum_{k=0}^{n-j} \boldsymbol{b}(k) - B\right)\right| < \varepsilon,$$

amit bizonyítani kellett.

Azt kell még igazolni, hogy ha a $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ sorok abszolút konvergensek, akkor a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens. Ez valóban így van, mert ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} |\boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j)|\right) = \sum_{j=0}^{n} |\boldsymbol{a}(j)| \left(\sum_{k=0}^{n-j} |\boldsymbol{b}(k)|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} |\boldsymbol{a}(j)| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|\right) \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(j)|\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|\right),$$

tehát még a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} |\boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j)|\right)$ sor is konvergens, így a majoráns kritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k-j)\right|$ sor konvergens. ■

Definíció. Legyen $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat és $c \in \mathbb{K}$. Ekkor $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}$ jelöli azt a $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt, amelyre

$$Dom(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}) := \{z \in \mathbb{K} \mid \text{"a } \sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k \text{ sor konvergens"}\},$$

és $z \in Dom(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c})$ minden esetén

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k.$$

A $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}$ függvényt *$\boldsymbol{a}$-együtthatójú, c centrumú hatványfüggvénynek* nevezzük. *Polinomiális függvényeknek* nevezzük azokat a $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}$ alakú függvényeket, amelyekre a $\{k \in \mathbb{N} | \boldsymbol{a}(k) \neq 0\}$ halmaz *véges*.

Míg a polinomiális függvények előállításához elegendőek a $\mathbb{K}$ test algebrai műveletei, addig az általános hatványfüggvények konstrukciója megköveteli a határérték analitikus fogalmát.

A Cauchy-Hadamard tétel szerint az $\boldsymbol{a}$ együtthatójú, c centrumú hatványfüggvény definíciós tartománya tartalmazza a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| < R_{\boldsymbol{a}}\}$ halmazt, ahol

$$R_{\boldsymbol{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k}} & \text{, ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = 0, \end{cases}$$

az $\boldsymbol{a}$ sorozathoz tartozó Cauchy-féle konvergenciasugár. Sőt azt is tudjuk, hogy a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| < R_{\boldsymbol{a}}\}$ halmaz minden pontjában a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k$ sor *abszolút konvergens*, ezért a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| < R_{\boldsymbol{a}}\}$ halmazt a $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvény *abszolútkonvergencia-tartományának* nevezzük. Továbbá, az $R_{\boldsymbol{a}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet a $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvény *konvergenciasugarának* nevezzük. Szintén a Cauchy-Hadamard tételből következik, hogy a $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvény definíciós tartománya részhalmaza a $\{z \in \mathbb{K} | |z-c| \le R_{\boldsymbol{a}}\}$ halmaznak.

Definíció. *Komplex exponenciális függvénynek* nevezzük és az *Exp* szimbólummal jelöljük azt a $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvényt, amelyre $c := 0$ és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{a}(k) := \dfrac{1}{k!}$. Az *Exp* függvény $\mathbb{R}$-re vett leszűkítését a *valós exponenciális függvénynek* nevezzük és az *exp* szimbólummal jelöljük.

Állítás. A komplex exponenciális függvény definíciós tartománya egyenlő $\mathbb{C}$-vel, és minden $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$
$$\overline{Exp(z)} = Exp(\overline{z}),$$
$$Exp(z_1 + z_2) = Exp(z_1)Exp(z_2)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{a}$ az a sorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{a}(k) := \dfrac{1}{k!}$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\dfrac{\boldsymbol{a}(k+1)}{\boldsymbol{a}(k)} = \dfrac{1}{k+1}$, ezért

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{a}(k+1)}{\boldsymbol{a}(k)} = 0,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}(k)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $R_{\boldsymbol{a}} = +\infty$, tehát az Exp függvény definíciós tartománya egyenlő $\mathbb{C}$-vel, és minden $z \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}$$

sor abszolút konvergens, és az összege egyenlő $Exp(z)$-vel.
Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor

$$\overline{Exp(z)} := \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} =: Exp(\overline{z}).$$

Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z_1^k}{k!}$ és $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z_2^k}{k!}$ sorok abszolút konvergenciáját, a Mertens-tételt, valamint a binomiális tételt alkalmazva:

$$Exp(z_1) \cdot Exp(z_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j}{j!} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} k! \frac{z_1^j}{j!} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^j z_2^{k-j} \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} =: Exp(z_1+z_2)$$

adódik. ■

Következmény. Teljesülnek az $Im(Exp) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ és $Im(exp) \subseteq \mathbb{R}^+$ összefüggések. Továbbá, minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $Exp(-z) = (Exp(z))^{-1}$.
Bizonyítás. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor

$$Exp(z) \cdot Exp(-z) = Exp(z + (-z)) = Exp(0) = 1,$$

ezért $Exp(z) \neq 0$ és $Exp(-z) = (Exp(z))^{-1}$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\overline{exp(x)} := \overline{Exp(x)} = Exp(\overline{x}) = Exp(x) =: exp(x),$$

ezért $exp(x) \in \mathbb{R}$. Továbbá, $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x > 1,$$

tehát $exp(x) > 1$. Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x < 0$, akkor $-x > 0$, tehát $(exp(x))^{-1} = exp(-x) > 1$, így $1 > exp(x) > 0$. ■

Következmény. A valós exponenciális függvény *szigorúan monoton növő* (ezért *injektív*).

Bizonyítás. Ha $x, x' \in \mathbb{R}$ és $x < x'$, akkor $x' - x > 0$, és az előző állítás bizonyításában láttuk, hogy $exp(x' - x) > 1$, ezért $exp(x) > 0$ miatt

$$exp(x') = exp(x + (x' - x)) = exp(x)exp(x' - x) > exp(x)$$

teljesül. ■

Definíció. A valós exponenciális függvény inverzét *valós logaritmusfüggvénynek* nevezzük és a *log* szimbólummal jelöljük.

Tehát $log := exp^{-1}$ az az $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$Dom(log) := Im(exp) \subseteq \mathbb{R}^+,$$

és minden $x \in Dom(log)$ esetén $log(x) \in \mathbb{R}$ az a szám, amelyre $exp(log(x)) = x$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy

$$Im(log) = Dom(exp) = \mathbb{R},$$

vagyis a *log* függvény *ráképez* $\mathbb{R}$-re.

Állítás. A valós logaritmusfüggvény *szigorúan monoton növő*, és minden $x, x' \in Dom(log)$ esetén $x \cdot x' \in Dom(log)$, valamint

$$log(x \cdot x') = log(x) + log(x')$$

teljesül.

Bizonyítás. A *log* függvény definíciója szerint $x, x' \in Dom(log)$ esetén (egyértelműen) léteznek azok az $y, y' \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre $x = exp(y)$ és $x' = exp(y')$. Ekkor $x \cdot x' = exp(y) \cdot exp(y') = exp(y + y') \in Im(exp) =: Dom(log)$, és az is látszik, hogy $log(x \cdot x') = y + y' = log(x) + log(x')$. A *log* függvény szigorú monoton növése triviálisan következik abból, hogy *exp* szigorúan monoton növő és $log := exp^{-1}$. ■

Később megmutatjuk, hogy $Im(exp) = \mathbb{R}^+$, tehát $Dom(log) = \mathbb{R}^+$ (III. fejezet, 1. pont). Azonban az analízis kifejtésének jelenlegi szintjén ez még egyáltalán nem bizonyítható. Addig is beszélünk $Dom(log)$-ról, de – a hiperharmonikus sorok abszolút konvergenciájáról szóló állítás kivételével – *nem tesszük fel*, hogy ez egyenlő $\mathbb{R}^+$-szal.

Definíció. Ha $a \in Dom(log)$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor

$$a^z := Exp(z \cdot log(a)),$$

és az $a^z \in \mathbb{C}$ számot *a alapú, z kitevőjű hatványnak* nevezzük.

Az *Exp* és *log* függvényekre levezetett egyenlőségekből könnyen származtathatók a *hatványozás azonosságai.*

Állítás. (*A hatványozás azonosságai.*)
a) Ha $a \in Dom(log)$, akkor $a^0 = 1$ és $a^1 = a$.
b) Ha $a \in Dom(log)$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor $a^x \in Dom(log)$ és minden $\mathbb{C} \ni z$-re

$$(a^x)^z = a^{x \cdot z}.$$

c) Ha $a \in Dom(log)$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1} \cdot a^{z_2}.$$

d) Ha $a, b \in Dom(log)$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor

$$(a \cdot b)^z = a^z \cdot b^z.$$

e) Ha $a \in Dom(log)$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $Exp(n \cdot log(a))$ megyezik az $a \in \mathbb{R}$ elem n-edik algebrai hatványával az $\mathbb{R}$ testben (ami azt jelenti, hogy az a^n jelölés nem vezet félreértésre).
Bizonyítás. a) Ha $a \in Dom(log)$, akkor $Exp(0) = 1$ miatt $a^0 := Exp(0 \cdot log(a)) = Exp(0) = 1$, valamint a log definíciója alapján $a^1 := Exp(1 \cdot log(a)) = exp(log(a)) = a$.
b) Ha $a \in Dom(log)$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor $a^x := Exp(x \cdot log(a)) = exp(x \cdot log(a)) \in Im(exp) = Dom(log)$. Tehát, ha $a \in Dom(log)$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$(a^x)^z := Exp(z \cdot log(a^x)) = Exp(z \cdot x \cdot log(a)) =: a^{x \cdot z}$$

teljesül, hiszen a log függvény definíciója alapján nyilvánvaló, hogy $log(a^x) = x \cdot log(a)$.
c) Ha $a \in Dom(log)$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor az Exp függvényre vonatkozó függvényegyenlet alapján:

$$a^{z_1+z_2} := Exp((z_1 + z_2) \cdot log(a)) = Exp(z_1 \cdot log(a) + z_2 \cdot log(a)) =$$

$$= Exp(z_1 \cdot log(a)) \cdot Exp(z_2 \cdot log(a)) =: a^{z_1} \cdot a^{z_2}.$$

d) Ha $a, b \in Dom(log)$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor a log és Exp függvényekre vonatkozó függvényegyenletek alapján:

$$(a \cdot b)^z := Exp(z \cdot log(a \cdot b)) = Exp(z \cdot (log(a) + log(b))) =$$

$$= Exp(z \cdot log(a)) \cdot Exp(z \cdot log(a)) =: a^z \cdot b^z.$$

e) Legyen $a \in Dom(log)$, és értelmezzük az

$$\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto Exp(n \cdot log(a))$$

sorozatot. Ekkor az a) szerint $\boldsymbol{s}(0) = 1$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, az a) és c) szerint:

$$\boldsymbol{s}(n+1) := Exp((n+1) \cdot log(a)) = Exp(n \cdot log(a)) \cdot Exp(1 \cdot log(a)) =$$

$$= Exp(n \cdot log(a)) \cdot a =: \boldsymbol{s}(n) \cdot a$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}$ megegyezik az $a \in \mathbb{R}$ elem által iterációval meghatározott algebrai hatványsorozattal az $\mathbb{R}$ testben. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha $a \in Dom(log)$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor az $a^{z_1 \cdot z_2}$ szám értelmezve van, azonban lehetséges az, hogy a^{z_1} nem valós szám, így az $(a^{z_1})^{z_2}$ kifejezés *értelmetlen.*

Megjegyezzük még, hogy az

$$e := exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

számot a *természetes logaritmus alapszámának* szokták nevezni, és ez a valós szám azért jelentős, mert $e \in Im(exp) = Dom(log)$ és $log(e) = 1$, tehát minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$e^z := Exp(z \cdot log(e)) = Exp(z)$$

teljesül.

Definíció. *Komplex trigonometrikus függvényeknek* nevezzük a következő függvényeket

$$Sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{Exp(iz) - Exp(-iz)}{2i},$$
$$Cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{Exp(iz) + Exp(-iz)}{2}.$$

A komplex trigonometrikus függvények $\mathbb{R}$-re vett leszűkítéseit *valós trigonometrikus függvényeknek* nevezzük, és azokat a *sin*, illetve *cos* szimbólummal jelöljük.

Komplex hiperbolikus függvényeknek nevezzük a következő függvényeket

$$Sh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{Exp(z) - Exp(-z)}{2},$$
$$Ch : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{Exp(z) + Exp(-z)}{2}.$$

A komplex hiperbolikus függvények $\mathbb{R}$-re vett leszűkítéseit *valós hiperbolikus függvényeknek* nevezzük, és azokat a *sh*, illetve *ch* szimbólummal jelöljük.

Az *Exp* függvény tulajdonságaiból következik, hogy a valós trigonometrikus és hiperbolikus függvények értékei valósak, tehát ezek $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények. Továbbá, minden $z \in \mathbb{C}$ esetén nyilvánvalóak a

$$Sh(iz) = iSin(z), \quad Ch(iz) = Cos(z)$$

egyenlőségek, amelyek kapcsolatot teremtenek a trigonometrikus és a hiperbolikus függvények között. Továbbá minden $z, z' \in \mathbb{C}$ esetén érvényesek a

$$\begin{aligned} Sin(z+z') &= Sin(z)Cos(z') + Sin(z')Cos(z), \\ Cos(z+z') &= Cos(z)Cos(z') - Sin(z)Sin(z'), \\ Sh(z+z') &= Sh(z)Ch(z') + Sh(z')Ch(z), \\ Ch(z+z') &= Ch(z)Ch(z') + Sh(z)Sh(z') \end{aligned}$$

addíciós formulák. A definíciókból az is nyilvánvalóan következik, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$Cos^2(z) + Sin^2(z) \;=\; 1 \;=\; Ch^2(z) - Sh^2(z).$$

Megjegyezzük még, hogy a definíció alapján minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$Exp(iz) = Cos(z) + iSin(z),$$

ezért, ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\mathfrak{Re}(Exp(ix)) = cos(x), \quad \mathfrak{Im}(Exp(ix)) = sin(x),$$

következésképpen

$$|Exp(ix)| = \sqrt{cos^2(x) + sin^2(x)} = 1$$

teljesül. Később azt is látni fogjuk, hogy minden z komplex számhoz, $|z| = 1$ esetén létezik olyan x valós szám, amelyre $z = Exp(ix)$.

Állítás. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

sorok abszolút konvergensek, és

$$Sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad Cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$
$$Sh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad Ch(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Bizonyítás. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\frac{\left|\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right|} = \frac{\left|\dfrac{1}{(2(k+1)+1)!}\right|}{\left|\dfrac{1}{(2k+1)!}\right|} = \frac{1}{(2k+2)(2k+3)},$$

valamint

$$\frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}\right|}{\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right|} = \frac{\left|\frac{1}{(2(k+1))!}\right|}{\left|\frac{1}{(2k)!}\right|} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)},$$

ezért a D'Alembert-féle hányadoskritérium szerint:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(2k+1)!}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(2k)!}\right|^{1/k} = 0,$$

így a Cauchy-Hadamard-tétel alapján minden $w \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{w^k}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{w^k}{(2k)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{w^k}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{w^k}{(2k)!}$$

sorok abszolút konvergensek. Ugyanakkor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{\left(z^2\right)^k}{(2k+1)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{\left(z^2\right)^k}{(2k)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(z^2\right)^k}{(2k+1)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(z^2\right)^k}{(2k)!}.$$

Ebből következik, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

sorok abszolút konvergensek.

Legyen $z \in \mathbb{C}$ rögzített; ekkor

$$Sin(z) := \frac{Exp(iz) - Exp(-iz)}{2i} := \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!} - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^k}{k!} =$$
$$= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right)\left(\frac{(iz)^k}{k!}\right) = \frac{1}{i}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right)\left(\frac{(iz)^k}{k!}\right) =$$
$$= \frac{1}{i}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(iz)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

A többi formula teljesen hasonló meggondolásokkal kapható. ■

Állítás. (*Kondenzációs kritérium*) Ha $\boldsymbol{s}$ monoton fogyó, $\mathbb{R}_+$-ban haladó sorozat, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k) \quad \text{és} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k \boldsymbol{s}(2^k)$$

sorok *ekvikonvergensek*, vagyis egyszerre konvergensek, vagy egyszerre divergensek (azonban egészen más lehet az összegük, ha konvergensek).

Bizonyítás. Értelmezzük az $\boldsymbol{S}$ és $\boldsymbol{S}'$ valós sorozatokat úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\boldsymbol{S}(n) := \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k), \quad \boldsymbol{S}'(n) := \sum_{k=0}^{n} 2^k \boldsymbol{s}(2^k).$$

Az $\boldsymbol{s}$ sorozat monoton fogyását kihasználva kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\boldsymbol{S}(2^n) = \boldsymbol{s}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \boldsymbol{s}(2^k + j) \right) + \boldsymbol{s}(2^n) \leq$$

$$\leq \boldsymbol{s}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \boldsymbol{s}(2^k) + 2^n \boldsymbol{s}(2^n) = \boldsymbol{s}(0) + \boldsymbol{S}'(n).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\boldsymbol{S}(2^n) = \boldsymbol{s}(0) + \boldsymbol{s}(1) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{2^k} \boldsymbol{s}(2^k + j) \right) \geq$$

$$\geq \boldsymbol{s}(0) + \boldsymbol{s}(1) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \boldsymbol{s}(2^{k+1}) = \boldsymbol{s}(0) - \frac{1}{2}\boldsymbol{s}(1) + \frac{1}{2}\boldsymbol{S}'(n).$$

Ebből az látszik, hogy az $\boldsymbol{S}$ és $\boldsymbol{S}'$ monoton növő valós sorozatok egyszerre korlátosak (vagyis konvergensek), vagy egyszerre nem korlátosak (vagyis divergensek). Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{S} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k), \quad \boldsymbol{S}' = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k \boldsymbol{s}(2^k),$$

ezért a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)$ és $\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k \boldsymbol{s}(2^k)$ sorok ekvikonvergensek. ■

A következő állításban feltesszük, hogy $Dom(log) = \mathbb{R}^+$, így minden $k \in \mathbb{N}^+$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén a k^z hatvány jól értelmezett.

Állítás. (*A hiperharmonikus sorok abszolút konvergenciája.*) Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \frac{1}{k^z}$$

hiperharmonikus sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha $\mathfrak{Re}(z) > 1$.

Bizonyítás. Minden $k \in \mathbb{N}^+$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$|k^z| := |Exp(z \cdot log(k))| = |Exp(\mathfrak{Re}(z) \cdot log(k))||Exp(i\mathfrak{Im}(z) \cdot log(k))| =$$
$$= |Exp(\mathfrak{Re}(z) \cdot log(k))| =: k^{\mathfrak{Re}(z)},$$

ezért a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \frac{1}{k^z} := \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k+1)^z}$ sor abszolút konvergenciájának problémája arra az esetre redukálódik, amikor $z \in \mathbb{R}$. Ha $z \in \mathbb{R}$ és $z \leq 0$, akkor az $\left(\frac{1}{(k+1)^z}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz, ezért a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \frac{1}{k^z}$ sor divergens. Ha $z \in \mathbb{R}^+$, akkor az $\left(\frac{1}{(k+1)^z}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó, tehát a kondenzációs kritérium szerint a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \frac{1}{k^z}$ sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} 2^k \frac{1}{(2^k+1)^z}$ sor konvergens. Ha $z \in \mathbb{R}^+$ és $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$0 \leq 2^k \frac{1}{(2^k+1)^z} = \left(\frac{1}{2^{z-1}}\right)^k \cdot \frac{1}{(1+2^{-k})^z} \leq \left(\frac{1}{2^{z-1}}\right)^k$$

és $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^{z-1}}\right)^k$ konvergens geometriai sor, ha $z > 1$. ■

Gyakorlatok

1. Legyen S azon $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvények halmaza, amelyekre $\sigma(0) = 0$. Minden $\mathbb{K}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra és $\sigma \in S$ függvényre legyen $\boldsymbol{s}_\sigma$ az a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, amely minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz az

$$\boldsymbol{s}_\sigma(n) := \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} \boldsymbol{s}(k)$$

értéket rendeli.

a) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens, akkor *minden* $\sigma \in S$ függvényre a $\sum \boldsymbol{s}_\sigma$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}_\sigma(k)$$

teljesül.

b) Van olyan $\boldsymbol{s}$ numerikus sorozat, amelyhez léteznek olyan $\sigma, \sigma' \in S$ függvények, hogy $\sum \boldsymbol{s}_\sigma$ konvergens és $\sum \boldsymbol{s}_{\sigma'}$ divergens (ekkor az a) alapján $\sum \boldsymbol{s}$ nem lehet konvergens).

c) Legyen $S' \subseteq S$ olyan *véges* halmaz, hogy

$$\bigcup_{\sigma \in S'} Im(\sigma) = \mathbb{N}.$$

Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $\sigma \in S'$ esetén a $\sum \boldsymbol{s}_\sigma$ sor konvergens *és az összege független* σ-tól, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor konvergens.

2. Az $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ szám *irracionális*, továbbá a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}$ valós sor konvergens, és az összege szintén irracionális szám.

(*Útmutatás.* Mindkét esetben indirekt bizonyíthatunk.)

3. Egy $\mathbb{N}$-ben haladó $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ szigorúan monoton növő rendszert *bázisrendszernek* nevezünk, ha $d_1 > 1$ és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén d_k osztója d_{k+1}-nek. (Például $((k+1)!)_{k \in \mathbb{N}^+}$ bázisrendszer, és minden $a \in \mathbb{N}$ számra, ha $a > 1$, akkor $(a^k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ szintén bázisrendszer.) A továbbiakban legyen $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ tetszőleges bázisrendszer, és legyen $d_0 := 1$.

a) Minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számra legyen

$$\boldsymbol{s}_k(x) := \begin{cases} [d_k x] - [d_{k-1} x] \left(\dfrac{d_k}{d_{k-1}} \right) & \text{, ha } k > 0 \\ [x] & \text{, ha } k = 0. \end{cases}$$

Ekkor $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az $\boldsymbol{s}_k(x)$ *egész szám* olyan, hogy

$$\boldsymbol{s}_k(x) \in \left[0, \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right],$$

továbbá minden x valós számra fennáll

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{s}_k(x)}{d_k}$$

egyenlőség. (Az $x \in \mathbb{R}$ számhoz így értelmezett $(\boldsymbol{s}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot az x *felbontásának* nevezzük a $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ *bázisrendszer szerint.*)

b) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor *végtelen sok* $k \in \mathbb{N}$ számra teljesül az, hogy

$$\boldsymbol{s}_k(x) < \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1.$$

Megfordítva, ha $\boldsymbol{a}$ olyan $\mathbb{Z}$-ben haladó sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\boldsymbol{a}(k) \in \left[0, \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right],$$

és végtelen sok $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{a}(k) < \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1,$$

akkor létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $\boldsymbol{a}$ egyenlő az x felbontásával a $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ bázisrendszer szerint, vagyis minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{a}(k) = \boldsymbol{s}_k(x)$.

c) Az $\mathbb{R}$ és $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ halmazok *ekvipotensek* (vagyis az $\mathbb{R}$ halmaz *kontinuum-számosságú*).

(*Útmutatás.* Ha $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$, akkor az egészrész-függvény értelmezése alapján

$$\boldsymbol{s}_k(x) \in \left[0, \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right],$$

továbbá könnyen kiszámítható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$[x] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\boldsymbol{s}_k(x)}{d_k} = \frac{[d_{n-1}x]}{d_{n-1}} = x + \frac{[d_{n-1}x]}{d_{n-1}} - \frac{d_{n-1}x}{d_{n-1}} \in \left]x - \frac{1}{d_{n-1}}, x\right].$$

Ebből

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_{n-1}} = 0$$

miatt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{s}_k(x)}{d_k},$$

és az is látható, hogy lehetetlen az, hogy a

$$\{k \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}_k(x) < \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\}$$

halmaz véges, különben létezne olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $k \geq N$ természetes számra

$$\boldsymbol{s}_k(x) = \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1$$

teljesülne, következésképpen

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\boldsymbol{s}_k(x)}{d_k} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\frac{d_k}{d_{k-1}} - 1}{d_k} = \frac{[d_{N-1}x]}{d_{N-1}} + \frac{1}{d_{N-1}}$$

is igaz volna, holott a jobb oldalon álló szám x-nél nagyobb.

Vezessük be a következő jelölést

$$P := \{\boldsymbol{a} \in \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left[0, \frac{d_k}{d_{k-1}} - 1\right] | \text{ a } \{k \in \mathbb{N}^+ | \boldsymbol{a}(k) < (d_k/d_{k-1}) - 1\} \text{ halmaz végtelen}\}.$$

Az a) és b) alapján az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times P; \quad x \mapsto ([x], (\boldsymbol{s}_k(x))_{k \in \mathbb{N}^+})$$

leképezés *bijekció*. A P halmaz kontinuum-számosságú, mert

– *kisebb-egyenlő számosságú* az $\mathscr{F}(\mathbb{N}^+; \mathbb{N})$ függvényhalmaznál, így $\mathscr{P}(\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N})$-nél is kisebb-egyenlő számosságú, viszont ez utóbbi halmaz $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel ekvipotens, mert $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}$ ekvipotensek;

– *nagyobb-egyenlő számosságú* az

$$\{\boldsymbol{a} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^+; \{0, 1\}) | \text{ a } \{k \in \mathbb{N}^+ | \boldsymbol{a}(k) = 0\} \text{ halmaz végtelen}\}$$

halmaznál, amely ekvipotens az $\mathbb{N}^+$ végtelen részhalmazainak halmazával, vagyis $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel (I. fejezet, 3. pont **30**. gyakorlat), ezért a Schröder-Bernstein tétel és a számosságaritmetika alaptétele szerint $\mathbb{Z} \times P$ ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel.)

4. (*Riemann-tétel.*) Legyen $\boldsymbol{s}$ olyan valós sorozat, amelyre a $\sum \boldsymbol{s}$ sor feltételesen konvergens. Ekkor minden $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ elemhez, $a \leq b$ esetén van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, hogy

$$\liminf \sum (\boldsymbol{s} \circ \sigma) = a, \quad \limsup \sum (\boldsymbol{s} \circ \sigma) = b$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Legyen $N_+ := \{k \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(k) > 0\}$, $N_- := \{k \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(k) < 0\}$ és $N_0 := \{k \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(k) = 0\}$. Először mutassuk meg, hogy N_+ és N_- *végtelen* halmazok, és elegendő arra az esetre bizonyítani, amikor $N_0 = \emptyset$.

Legyenek $\sigma_+ : \mathbb{N} \to N_+$ és $\sigma_- : \mathbb{N} \to N_-$ szigorúan monoton növő bijekciók (ilyenek egyértelműen léteznek), és rögzítsünk két olyan $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ valós számsorozatot, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{a}(n) \leq \boldsymbol{b}(n)$, továbbá

- ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\lim \boldsymbol{a} = a$, és ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\lim \boldsymbol{b} = b$;
- ha $a = -\infty$, akkor $\inf \boldsymbol{a} = a$;
- ha $b = +\infty$, akkor $\sup \boldsymbol{b} = b$.

Mutassuk meg, hogy a $\sum(\boldsymbol{s} \circ \sigma_+)$ és $\sum(\boldsymbol{s} \circ \sigma_-)$ állandó előjelű sorozatokhoz tartozó sorok *divergensek*, majd egyszerű rekurzióval értelmezzük azokat a $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és $\tau_+, \tau_- : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ sorozatokat, amelyekre a következők teljesülnek:

- $\tau_+(0)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}^+$-ban, amelyre

$$\boldsymbol{B}(0) := \sum_{k=0}^{\tau_+(0)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_+(k)) > \boldsymbol{b}(0);$$

- $\tau_-(0)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}^+$-ban, amelyre

$$\boldsymbol{A}(0) := \boldsymbol{B}(0) + \sum_{k=0}^{\tau_-(0)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_-(k)) < \boldsymbol{a}(0);$$

- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tau_+(n+1)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}$-ben, amely $\tau_+(n)$-nél nagyobb és olyan, hogy

$$\boldsymbol{B}(n+1) := \boldsymbol{A}(n) + \sum_{k=\tau_+(n)}^{\tau_+(n+1)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_+(k)) > \boldsymbol{b}(n+1);$$

- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tau_-(n+1)$ az a legkisebb elem $\mathbb{N}$-ben, amely $\tau_-(n)$-nél nagyobb és olyan, hogy

$$\boldsymbol{A}(n+1) := \boldsymbol{B}(n+1) + \sum_{k=\tau_-(n)}^{\tau_-(n+1)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_-(k)) < \boldsymbol{a}(n+1).$$

Teljes indukcióval bizonyítsuk be a következő összefüggéseket: minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\boldsymbol{B}(n) = \sum_{k=0}^{\tau_+(n)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_+(k)) + \sum_{k=0}^{\tau_-(n-1)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_-(k)),$$
$$\boldsymbol{A}(n) = \sum_{k=0}^{\tau_+(n)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_+(k)) + \sum_{k=0}^{\tau_-(n)-1} \boldsymbol{s}(\sigma_-(k)),$$
$$|\boldsymbol{B}(n) - \boldsymbol{b}(n)| < \boldsymbol{s}(\sigma_+(\tau_+(n)-1)), \quad |\boldsymbol{A}(n) - \boldsymbol{a}(n)| < \boldsymbol{s}(\sigma_-(\tau_-(n)-1)).$$

Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

- ha $k \le \tau_+(0) - 1$, akkor $\sigma(k) := \sigma_+(k)$;
- ha $\tau_+(0) \le k \le \tau_+(0) + \tau_-(0) - 1$, akkor $\sigma(k) := \sigma_-(k - \tau_+(0))$;

- ha $k \geq \tau_+(0) + \tau_-(0)$, akkor egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\tau_-(n) + \tau_+(n) \leq k \leq \tau_-(n+1) + \tau_+(n+1) - 1$: ekkor legyen

$$\sigma(k) := \begin{cases} \sigma_+(k - \tau_-(n)) & \text{, ha } k \leq \tau_-(n) + \tau_+(n+1) - 1 \\ \sigma_-(k - \tau_+(n+1)) & \text{, ha } k \geq \tau_-(n) + \tau_+(n+1). \end{cases}$$

Ezután könnyen ellenőrizhető, hogy $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan bijekció, amelyre

$$\liminf \sum (\boldsymbol{s} \circ \sigma) = a, \quad \limsup \sum (\boldsymbol{s} \circ \sigma) = b$$

teljesül.)

5. Ha $\boldsymbol{s}$ tetszőleges számsorozat, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ sor pontosan akkor feltétlen konvergens, ha abszolút konvergens.
(*Útmutatás.* Ha a $\sum \boldsymbol{s}$ sor feltételesen konvergens, akkor a $\sum \mathfrak{Re}(\boldsymbol{s})$ és $\sum \mathfrak{Im}(\boldsymbol{s})$ valós sorok közül legalább az egyik feltételesen konvergens, tehát a Riemann-tétel szerint van olyan átrendezése, amely divergens. Ezért a $\sum \boldsymbol{s}$ sornak is van divergens átrendezése, vagyis a sor nem feltétlen konvergens.)

6. Mutassuk meg, hogy a $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ sor feltételesen konvergens, és az önmagával vett Cauchy-szorzata divergens sor.
(*Útmutatás.* Minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \leq n$, akkor

$$(k+1)(n-k+1) = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2,$$

következésképpen

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right) \left(\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \right) \right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1}$$

teljesül, így a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right) \left(\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \right) \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

sorozat nem tart 0-hoz.)

7. (*Általánosított kondenzációs kritérium*) Legyen $p \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $p \geq 2$, és legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ $\mathbb{R}_+$-ban haladó monoton fogyó sorozat. Ekkor az $\mathbb{R}_+$-ban haladó

$$\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}; \qquad n \mapsto s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \qquad n \mapsto s'_n := \sum_{k=0}^{n} p^k x_{p^k}$$

monoton növő sorozatokra teljesülnek a következők:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^+)(\exists m \in \mathbb{N}): \ s_n \leq (p-1)s'_m,$$

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}^+): \ s'_m \leq \frac{p}{p-1} s_n,$$

tehát a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^+} x_k \quad \text{és} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} p^k x_{p^k}$$

sorok *ekvikonvergensek*, vagyis egyszerre konvergensek, vagy egyszerre divergensek. (Nyilvánvaló, hogy a kondenzációs kritérium ennek az a speciális esete, amikor $p = 2$.)

(*Útmutatás.* Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$s_{p^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=p^k}^{p^{k+1}-1} x_j \right), \qquad s_{p^n} = x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=p^k+1}^{p^{k+1}} x_j \right)$$

teljesül. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyása miatt minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sum_{j=p^k}^{p^{k+1}-1} x_j \leq (p-1)p^k x_{p^k},$$

valamint

$$\sum_{j=p^k+1}^{p^{k+1}} x_j \geq (p-1)p^k x_{p^{k+1}} = \left(\frac{p-1}{p} \right) p^{k+1} x_{p^{k+1}},$$

amiből kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$s_{p^n-1} \leq (p-1) \sum_{k=0}^{n-1} p^k x_{p^k} = (p-1)s'_{n-1},$$

$$s_{p^n} \geq x_1 + \left(\frac{p-1}{p} \right) \sum_{k=0}^{n-1} p^{k+1} x_{p^{k+1}} = x_1 + \left(\frac{p-1}{p} \right) (s'_n - x_1).$$

Az utolsó egyenlőtlenségből adódik, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$s'_n \leq x_1 + \left(\frac{p}{p-1} \right) (s_{p^n} - x_1) = -\frac{x_1}{p-1} + \left(\frac{p}{p-1} \right) s_{p^n} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) s_{p^n},$$

mert $x_1 \geq 0$.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $n \leq p^n - 1$ miatt $s_n \leq s_{p^n-1} \leq (p-1)s'_{n-1}$, tehát az $m := n-1$ számra $s_n \leq (p-1)s'_m$ teljesül. Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor véve olyan $n \in \mathbb{N}^+$ számot, amelyre $p^m \leq n$ kapjuk, hogy $s'_m \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) s_{p^m} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) s_n$.)

8. Adjunk közvetlen bizonyítást a Leibniz-féle konvergenciakritériumra!

(*Útmutatás.* Legyen $\boldsymbol{a}$ monoton fogyó, $\mathbb{R}_+$-ban haladó zérussorozat, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$\boldsymbol{S}(n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \boldsymbol{a}(k).$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\boldsymbol{S}(2n+1) = \boldsymbol{S}(2n) - \boldsymbol{a}(2n+1) \leq \boldsymbol{S}(2n),$$

$$\boldsymbol{S}(2n+2) = \boldsymbol{S}(2n) - \boldsymbol{a}(2n+1) + \boldsymbol{a}(2n+2) \leq \boldsymbol{S}(2n),$$

$$\boldsymbol{S}(2n+3) = \boldsymbol{S}(2n+1) + \boldsymbol{a}(2n+2) - \boldsymbol{a}(2n+3) \geq \boldsymbol{S}(2n+1).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(\boldsymbol{S}(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő, az $(\boldsymbol{S}(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{S}(2n+1) \leq \boldsymbol{S}(2n)$. Ezért a Cantor-féle közösrész-tételt alkalmazva az $([\boldsymbol{S}(2n+1), \boldsymbol{S}(2n)])_{n\in\mathbb{N}}$ intervallum-sorozatra kapjuk, hogy

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\boldsymbol{S}(2n+1), \boldsymbol{S}(2n)] \neq \emptyset.$$

Ha x eleme ennek a halmaznak, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{S}(2n+1) \leq x \leq \boldsymbol{S}(2n)$, ugyanakkor $\boldsymbol{S}(2n) - \boldsymbol{S}(2n+1) = \boldsymbol{a}(2n+1)$, és a hipotézis alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}(2n+1) = 0$, ezért az $(\boldsymbol{S}(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\boldsymbol{S}(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok x-hez konvergálnak, tehát $\boldsymbol{S}$ konvergens sorozat, vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \boldsymbol{a}(k)$ alternáló sor konvergens.

Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzítve; ekkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sum_{k=m}^{m+2n+1} (-1)^k \boldsymbol{a}(k) = (-1)^m \sum_{j=0}^{n} \left(\boldsymbol{a}(m+2j) - \boldsymbol{a}(m+2j+1)\right),$$

és $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$ esetén $\boldsymbol{a}(m+2j) - \boldsymbol{a}(m+2j+1) \geq 0$, ezért

$$\left| \sum_{k=m}^{m+2n+1} (-1)^k \boldsymbol{a}(k) \right| = \sum_{j=0}^{n} \left(\boldsymbol{a}(m+2j) - \boldsymbol{a}(m+2j+1)\right) =$$

$$= \boldsymbol{a}(m) - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\boldsymbol{a}(m+2j+1) - \boldsymbol{a}(m+2j+2)\right) - \boldsymbol{a}(m+2n+1) \leq \boldsymbol{a}(m),$$

hiszen $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n-1$ esetén $\boldsymbol{a}(m+2j+1) - \boldsymbol{a}(m+2j+2) \geq 0$, valamint $\boldsymbol{a}(m+2n+1) \geq 0$. Ebből következik, hogy

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \boldsymbol{a}(k) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=m}^{m+2n+1} (-1)^k \boldsymbol{a}(k) \right| \leq \boldsymbol{a}(m)$$

teljesül.)

9. Minden $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ számsorozatra értelmezzük azt a $\boldsymbol{a}\top\boldsymbol{b}$ számsorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\boldsymbol{a}\top\boldsymbol{b})(n) := \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ \max(j,k)=n} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k).$$

Mutassuk meg, hogy ha a $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ sorok konvergensek, akkor a $\sum(\boldsymbol{a}\top\boldsymbol{b})$ sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\boldsymbol{a}\top\boldsymbol{b})(n) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty}\boldsymbol{a}(k)\right)\cdot\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty}\boldsymbol{b}(k)\right)$$

teljesül. (Megjegyezzük, hogy az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ számsorozathoz rendelt $\sum(\boldsymbol{a}\top\boldsymbol{b})$ sort a $\sum \boldsymbol{a}$ és $\sum \boldsymbol{b}$ sorok *téglányszorzatának* nevezzük.)

(*Útmutatás.* Legyenek $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ számsorozatok. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{N}(\boldsymbol{a}\top\boldsymbol{b})(n) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ j,k\leq N} \boldsymbol{a}(j)\boldsymbol{b}(k) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{N}\boldsymbol{a}(k)\right)\cdot\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}^{N}\boldsymbol{b}(k)\right),$$

amiből azonnal következik az állítás.)

10. Mutassuk meg, hogy minden $a \in Dom(log)$ számra az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növő, ha $a > 1$ és szigorúan monoton fogyó, ha $a < 1$. Ha $a \in \mathbb{R}^+$ és $a \neq 1$, akkor ennek az injektív függvénynek az inverzét log_a jelöli, és ezt a függvényt *a-alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük. Igazoljuk, hogy $a \in Dom(log)$ és $a \neq 1$ esetén $Im(log_a) = \mathbb{R}$ és $Dom(log_a) = Dom(log)$, valamint $log(a) \neq 0$ és minden $Dom(log) \ni x$-re:

$$log_a(x) = \frac{log(x)}{log(a)}$$

teljesül. (Megjegyezzük, hogy az általunk értelmezett *log* függvényt olykor az *ln* szimbólummal jelölik, és úgy nevezik, hogy *természetes alapú logaritmusfüggvény*, vagyis "*logaritmus naturalis*".)

III. ELEMI FÜGGVÉNYANALÍZIS

Ebben a fejezetben a függvényanalízis három alapvetően fontos fogalmáról: a *határértékről*, a *folytonosságról* és a *differenciálhatóságról* lesz szó; egyelőre valós változós és valós értékű, vagy komplex változós és komplex értékű függvények esetében.

Az "egyváltozós" függvények speciális esetének külön tárgyalását többféleképpen lehet indokolni. Egyrészt; ez az elmélet olyan konkrét, csakis analitikus eszközökkel előállítható objektumok létezéséről tanusít, amelyek viszonylag egyszerűen kezelhetők és könnyen áttekinthetők. Másrészt; az egyváltozós esetben megfigyelhető matematikai jelenségek egy része általánosítható többváltozós esetre, ezért e speciális elméletnek fontos motiváló szerep jut. Azonkívül természetesen az egyváltozós esetben megadható néhány érdekes fogalom, és bebizonyítható néhány érdekes állítás, amelyek általánosabb körülmények között vagy értelmezhetetlenek, vagy csak egyszerűen nem igazak.

Irodalomjegyzék

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle*, Hermann, Paris

2. L. Schwartz, *Analyse mathématique*, I., Hermann, Paris, 1967.

3. Г. Е. Шилов, *Математический анализ, Функции одного переменного*, Наука, Москва, 1969.

4. M. Zamansky, *Introduction a l'algébre et l'analyse modernes*, Dunod, 1963.

5. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill Book Comp., 1964.

1. Határérték és folytonosság

Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. Azt mondjuk, hogy *$f$-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban*, ha $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $Dom(f)$-nek, és létezik olyan $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$, amelyre

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+) \quad f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \backslash \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\mathfrak{b}; \mathbb{K})$$

teljesül. Minden ilyen tulajdonságú $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$ pontot az f függvény *határértékének* nevezünk az $\mathfrak{a}$ pontban.

Természetesen a határérték létezésének fogalma könnyen megadható a gömbök fogalmának alkalmazása nélkül is: az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvénynek pontosan akkor létezik határértéke az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek és van olyan $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$, amelyre

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in Dom(f)) \quad (0 < |x - \mathfrak{a}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon)$$

teljesül. Figyeljük meg, hogy ez a formula nyilvánvalóan akkor is *értelmes*, ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $Dom(f)$-nek. De ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $Dom(f)$-nek, akkor könnyen belátható, hogy *minden* $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$ pontra teljesül a fenti kijelentés, tehát akkor minden pont határértéke volna f-nek $\mathfrak{a}$-ban. Ezzel szemben érvényes a következő állítás.

Állítás. (*A határérték egyértelműsége.*) Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, akkor legfeljebb egy határértéke létezik f-nek az $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Legyenek $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathbb{K}$ az f határértékei az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \backslash \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\mathfrak{b}; \mathbb{K})$, valamint van olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy $f\langle B_{\delta'}(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \backslash \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\mathfrak{b}'; \mathbb{K})$. Ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r \leq \min(\delta, \delta')$, akkor $(B_r(\mathfrak{a}; K) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f) \neq \emptyset$, mert $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Ha x eleme ennek a halmaznak, akkor $f(x) \in B_\varepsilon(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \cap B_\varepsilon(\mathfrak{b}'; \mathbb{K})$, következésképpen $|\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'| < 2\varepsilon$ teljesül. Ezért $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, mivel az előző egyenlőtlenség *minden* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra igaz. ■

Definíció. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek és létezik f-nek határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to \mathfrak{a}} f(x)$$

jelöli az f egyértelműen meghatározott határértékét az $\mathfrak{a}$ pontban.

A határérték létezése "lokális" tulajdonság, tehát csak azon múlik, hogy a függvény hogyan viselkedik a pont közelében.

Állítás. (*A határérték lokalitása.*) Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f) \cap Dom(g)$-nek, és tegyük fel, hogy létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $(B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f) = (B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(g)$, és

$f = g$ ezen a halmazon. Ekkor f-nek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Továbbá, ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}} g$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $\delta' > 0$ valós számot, amelyre $f\langle B_{\delta'}(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f;\mathbb{K})$. Ekkor az r definíciója alapján bármely $\delta \in]0, \min(r,\delta')[$ valós számra

$$g\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle = f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f;\mathbb{K}),$$

ami azt jelenti, hogy g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim_{\mathfrak{a}} g = \lim_{\mathfrak{a}} f$. ■

Állítás. (*Átviteli elv határértékekre.*) Legyen $f{:}\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Az f-nek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f\circ\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor bármely $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim(f\circ\boldsymbol{s})$$

teljesül.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges olyan $Dom(f)\backslash\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor vehetünk olyan $\delta > 0$ számot, amelyre $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f;\mathbb{K})$. A δ-hoz legyen $N{\in}\mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n{>}N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(n) - \mathfrak{a}|{<}\delta$. Ekkor minden $n{>}N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n){\in}(B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f)$, ezért $f(\boldsymbol{s}(n)){\in}B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f;\mathbb{K})$. Ez azt jelenti, hogy $f{\circ}\boldsymbol{s}$ konvergens sorozat és $\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim(f\circ\boldsymbol{s})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f{\circ}\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens. Legyenek $\boldsymbol{s}'$ és $\boldsymbol{s}''$ olyan $Dom(f)\backslash\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozatok, hogy $\lim(\boldsymbol{s}') = \mathfrak{a}$ és $\lim(\boldsymbol{s}'') = \mathfrak{a}$. Képezzük azt az $\boldsymbol{s}$ számsorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(2k) := \boldsymbol{s}'(k)$ és $\boldsymbol{s}(2k+1) := \boldsymbol{s}''(k)$. Ekkor $\boldsymbol{s}$ szintén olyan $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, ezért a hipotézis szerint $f\circ\boldsymbol{s}$ konvergens sorozat. Azonban $f\circ\boldsymbol{s}'$ és $f\circ\boldsymbol{s}''$ részsorozatai $f\circ\boldsymbol{s}$-nek, így $\lim(f\circ\boldsymbol{s}') = \lim(f\circ\boldsymbol{s}'')$. Továbbá *létezik* olyan $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, mert $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Ezért jól értelmezett az $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$ pont, amelyre $\mathfrak{b} := lim(f\circ\boldsymbol{s})$ bármely olyan $\boldsymbol{s}$ sorozatra, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál és $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban halad. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}$ az f határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, vagyis, hogy

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)\quad f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})$$

teljesül. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy ez nem igaz, vagyis

$$(\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall\delta \in \mathbb{R}^+)\quad f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \neq \emptyset.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $\delta > 0$ valós számra $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}\rangle \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis

$$(B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. Ekkor az ε definíciója szerint a

$$\left((B_{\delta_n}(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

halmazsorozat minden tagja nem üres halmaz, így a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left((B_{\delta_n}(\mathfrak{a};\mathbb{K})\backslash\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{b};\mathbb{K})\rangle\right) \neq \emptyset.$$

Legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}(n)-\mathfrak{a}| < \delta_n$ és $|f(\boldsymbol{s}(n))-\mathfrak{b}| \geq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, tehát a feltevés szerint $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozat, továbbá a $\mathfrak{b}$ pont definíciója alapján $\mathfrak{b} = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$. Ez viszont ellentmond annak, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\boldsymbol{s}(n)) - \mathfrak{b}| \geq \varepsilon$. ■

Következmény. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és $\mathfrak{b} \in \mathbb{K}$. A $\mathfrak{b}$ elem pontosan akkor határértéke f-nek az $\mathfrak{a}$ pontban, ha minden $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = \mathfrak{b}$ teljesül.

Bizonyítás. Közvetlenül látszik az előző állítás alapján. ■

Az átviteli elv alkalmazható annak bizonyítására, hogy egy függvénynek *nem létezik* határértéke egy adott pontban. Ugyanis, ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, akkor ahhoz, hogy f-nek ne létezzen határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban *elégséges*

- egy olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot találni, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, de az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat *nem konvergens*, vagy
- két olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ sorozatot találni, amelyekre az $f \circ \boldsymbol{s}$ és $f \circ \boldsymbol{s}'$ sorozatok konvergensek, de $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) \neq \lim(f \circ \boldsymbol{s}')$.

Az átviteli elv alkalmazható függvény határértékének *kiszámítására*, ha már tudjuk, hogy a függvénynek létezik határértéke az adott pontban. Ugyanis, ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és f-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ egyenlő az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat határértékével, ahol $\boldsymbol{s}$ *tetszőleges* olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$.

Nem létezik olyan eljárás, amely tetszőleges $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényről és a $Dom(f)$ bármely $\mathfrak{a}$ torlódási pontjáról eldöntené, hogy létezik-e f-nek határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban. Éppen ezért fontosak azok az állítások, amelyek visszavezetik a bonyolultabb alakú függvények határértéke létezésének problémáját egyszerűbb függvényekre.

Definíció. (*A függvényműveletek értelmezése.*) Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények és $c \in \mathbb{K}$.

- $f+g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $Dom(f+g) := Dom(f) \cap Dom(g)$ és minden $x \in Dom(f+g)$ esetén $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$;
- $f \cdot g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $Dom(f \cdot g) := Dom(f) \cap Dom(g)$ és minden $x \in Dom(f \cdot g)$ esetén $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$;
- $1/g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $Dom(1/g) := \{x \in Dom(g) | g(x) \neq 0\}$ és minden $x \in Dom(1/g)$ esetén $(1/g)(x) := 1/g(x)$;
- $c \cdot f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $Dom(c \cdot f) := Dom(f)$ és minden $x \in Dom(c \cdot f)$ esetén $(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x)$;
- $|f| : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $Dom(|f|) := Dom(f)$ és minden $x \in Dom(|f|)$ esetén $(|f|)(x) := |f(x)|$;
- $\overline{f} : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $Dom\overline{f} := Dom(f)$ és minden $x \in Dom(\overline{f})$ esetén $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$.

Állítás. Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $c \in \mathbb{K}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ tetszőleges pont.

a) Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f) \cap Dom(g)$-nek, továbbá f-nek és g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f+g$-nek és $f \cdot g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f+g) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right) \cdot \left(\lim_{\mathfrak{a}} g\right).$$

b) Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(1/g)$-nek, továbbá g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim_{\mathfrak{a}} g \neq 0$, akkor $1/g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}(1/g) = 1/\left(\lim_{\mathfrak{a}} g\right).$$

c) Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, továbbá f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $c \cdot f$-nek, $|f|$-nek és $\overline{f}$-nak létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}(c \cdot f) = c \cdot \lim_{\mathfrak{a}} f,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}} |f| = |\lim_{\mathfrak{a}} f|,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}} \overline{f} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}} f}.$$

Bizonyítás. a) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $(Dom(f) \cap Dom(g)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $f \circ \boldsymbol{s}$ és $g \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozatok, így az $(f+g) \circ \boldsymbol{s} = (f \circ \boldsymbol{s}) + (g \circ \boldsymbol{s})$ és $(f \cdot g) \circ \boldsymbol{s} = (f \circ \boldsymbol{s}) \cdot (g \circ \boldsymbol{s})$ sorozatok is konvergensek. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $f+g$-nek és $f \cdot g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan $(Dom(f) \cap Dom(g)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f+g) = \lim((f+g) \circ \boldsymbol{s}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s}) + \lim(g \circ \boldsymbol{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g,$$
$$\lim_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = \lim((f \cdot g) \circ \boldsymbol{s}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s}) \cdot \lim(g \circ \boldsymbol{s}) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right) \cdot \left(\lim_{\mathfrak{a}} g\right).$$

b) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(1/g) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint a $g \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(g \circ \boldsymbol{s}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} g \neq 0$, így az $(1/g) \circ \boldsymbol{s} = 1/(g \circ \boldsymbol{s})$ sorozat konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy az $1/g$ függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(1/g) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(1/g) = \lim((1/g) \circ \boldsymbol{s}) = 1/\lim(g \circ \boldsymbol{s}) = 1/\lim_{\mathfrak{a}} g.$$

c) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$, így a $(c \cdot f) \circ \boldsymbol{s} = c \cdot (f \circ \boldsymbol{s})$, $|f| \circ \boldsymbol{s} = |f \circ \boldsymbol{s}|$ és $\overline{f} \circ \boldsymbol{s} = \overline{f \circ \boldsymbol{s}}$ sorozatok is konvergensek. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $c \cdot f$-nek, $|f|$-nek és $\overline{f}$-nak létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathfrak{a}}(c \cdot f) &= \lim((c \cdot f) \circ \boldsymbol{s}) = c \cdot \lim(f \circ \boldsymbol{s}) = c \cdot \lim_{\mathfrak{a}} f, \\
\lim_{\mathfrak{a}} |f| &= \lim(|f| \circ \boldsymbol{s}) = |\lim(f \circ \boldsymbol{s})| = |\lim_{\mathfrak{a}} f|, \\
\lim_{\mathfrak{a}} \overline{f} &= \lim(\overline{f \circ \boldsymbol{s}}) = \overline{\lim(f \circ \boldsymbol{s})} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}} f}
\end{aligned}$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, akkor $f/g := f \cdot (1/g)$, tehát $f/g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $Dom(f/g) := \{x \in Dom(f) \cap Dom(g) | g(x) \neq 0\}$, és minden $x \in Dom(f/g)$ esetén $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$. Az előző állítás a) és b) pontjából következik, hogy ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f/g)$-nek, továbbá f-nek és g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} g \neq 0$, akkor f/g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f/g) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right) / \left(\lim_{\mathfrak{a}} g\right).$$

Állítás. Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f \cdot g)$-nek. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határéréke $\mathfrak{a}$-ban, $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = 0$, és létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy $g\langle B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle$ korlátos halmaz. Ekkor $f \cdot g$-nek létezik hatérértéke az $\mathfrak{a}$ pontban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, hogy $g\langle B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle$ korlátos halmaz. Ekkor vehetünk olyan $R > 0$ valós számot, amelyre $g\langle B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq B_R(0; \mathbb{K})$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és $\delta > 0$ olyan valós szám, hogy $f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_{\varepsilon/R}(0; \mathbb{K})$, akkor minden $x \in Dom(f \cdot g) \cap (B_{\min(\delta,r)}(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\})$ esetén $|f \cdot g|(x) = |f(x)| \cdot |g(x)| < (\varepsilon/R) \cdot R = \varepsilon$, vagyis $(f \cdot g)\langle B_{\min(\delta,r)}(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(0; \mathbb{K})$, ami éppen azt jelenti, hogy $f \cdot g$-nek létezik hatérértéke az $\mathfrak{a}$ pontban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}}(f \cdot g) = 0$. ■

Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, valamint $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ torlódási pontja $Dom(g)$-nek. A következő kérdésekre keressük a választ:

- Az $\mathfrak{a}$ pont torlódási pontja-e $Dom(g \circ f)$-nek?
- Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(g \circ f)$-nek, és g-nek létezik határértéke a $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pontban, akkor létezik-e $g \circ f$-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban?
- Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(g \circ f)$-nek, és g-nek létezik határértéke a $\mathfrak{b} := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pontban, továbbá létezik-e $g \circ f$-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor fennáll-e a

$$\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$$

egyenlőség?

Mindhárom kérdésre nemleges választ kapunk (**1**. gyakorlat). Azonban könnyen megadhatók olyan mellékfeltételek, amelyek biztosítják azt, hogy mindhárom kérdésre pozitív választ lehessen adni.

Állítás. (*Függvénykompozíció határértéke.*) Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények és tegyük fel, hogy

- az $\mathfrak{a}$ pont torlódási pontja $Dom(g \circ f)$-nek,
- f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban,
- a $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pont torlódási pontja $Dom(g)$-nek,
- a g függvénynek létezik határéréke a $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pontban.

Tegyük fel, hogy a következő feltételek *valamelyike* teljesül:

a) $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f \notin Dom(g)$;

b) $\mathfrak{b} := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f \in Dom(g)$ és $\lim\limits_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$.

Ekkor $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és fennáll a

$$\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Először az a) és b) feltevések nélkül tekintsünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. A g függvénynek van határértéke $\mathfrak{b}$-ben, tehát vehetünk olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre

$$g\langle B_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g; \mathbb{K}).$$

Ugyanakkor $\mathfrak{b} := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$, ezért δ'-höz vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre

$$f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}).$$

Ekkor nyilvánvalóan teljesül az, hogy

$$(g \circ f)\langle B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = g\langle f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle \subseteq g\langle B_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K})\rangle.$$

Ha most a) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \notin Dom(g)$ akkor

$$g\langle B_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K})\rangle = g\langle B_{\delta'}(\mathfrak{b}; \mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g; \mathbb{K}).$$

Ha viszont b) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \in Dom(g)$ és $\lim\limits_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$, akkor

$$g\langle B_{\delta'}(\mathfrak{b};\mathbb{K})\rangle = g\langle\{\mathfrak{b}\} \cup (B_{\delta'}(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\})\rangle =$$
$$= \{g(\mathfrak{b})\} \cup g\langle B_{\delta'}(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle = \{\lim_{\mathfrak{b}} g\} \cup g\langle B_{\delta'}(\mathfrak{b};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g;\mathbb{K}).$$

Tehát akár a), akár b) teljesül, az adódik, hogy a $\delta > 0$ valós számra

$$(g \circ f)\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{b}} g;\mathbb{K}),$$

vagyis $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim\limits_{\mathfrak{b}} g$. ■

Állítás. Legyen $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat és $c \in \mathbb{K}$. Ekkor a $P_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvénynek minden $z_0 \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ pontban létezik határértéke, és

$$\lim_{z_0} P_{\boldsymbol{a},c} = P_{\boldsymbol{a},c}(z_0).$$

Bizonyítás. Legyen $z_0 \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ rögzített és vegyünk egy $r \in]0, R_{\boldsymbol{a}} - |z_0 - c|[$ számot. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $C > 0$ valós szám, amelyre teljesül az, hogy minden $z \in B_r(z_0;\mathbb{K})$ esetén

$$|P_{\boldsymbol{a},c}(z) - P_{\boldsymbol{a},c}(z_0)| \leq C \cdot |z - z_0|.$$

Ebből már következik az állítás, mert ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és a $\delta > 0$ valós számot úgy választjuk meg, hogy $C \cdot \delta < \varepsilon$ és $\delta < r$ egyszerre teljesüljön, akkor még a

$$P_{\boldsymbol{a},c}\langle B_\delta(z_0;\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(P_{\boldsymbol{a},c}(z_0);\mathbb{K})$$

tartalmazás is igaz.
Legyen $z \in B_r(z_0;\mathbb{K})$ tetszőleges. Ekkor

$$P_{\boldsymbol{a},c}(z) - P_{\boldsymbol{a},c}(z_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z_0-c)^k =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\left((z-c)^k - (z_0-c)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\left((z-z_0)\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy $P_{\boldsymbol{a},c}(z) - P_{\boldsymbol{a},c}(z_0)$ egyenlő a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \boldsymbol{a}(k)\left((z-z_0)\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right)$$

konvergens sor összegével. Most megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \boldsymbol{a}(k)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j}\right) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k+1)\left(\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right)$$

sor abszolút konvergens. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor a binomiális tétel alapján

$$\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k}((z-z_0)+(z_0-c))^j(z_0-c)^{k-j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k}(z_0-c)^{k-j} = \left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{j-m}\right) =$$
$$\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right).$$

Most $k \in \mathbb{N}$ esetén minden $j, m \leq k$ természetes számra legyen

$$S_{j,m} := \begin{cases} \binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m} & \text{, ha } m \leq j \\ 0 & \text{, ha } m > j; \end{cases}$$

ekkor

$$\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right) = \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{m=0}^{k}S_{j,m}\right) = \sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{k}S_{j,m}\right) =$$
$$\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right) = \sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}\right)(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}.$$

Ugyanakkor teljes indukcióval könnyen belátható, hogy $k, m \in \mathbb{N}$ és $m \leq k$ esetén

$$\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m} \leq (k-m+1)\binom{k}{m} \leq (k+1)\binom{k}{m}.$$

Ezért minden $k \in \mathbb{N}$ számra

$$\left|\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right| = \left|\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}\right)(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-m}\right| \leq$$
$$\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}\binom{j}{m}\right)|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-m} \leq (k+1)\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-m} =$$
$$= (k+1)(|z-z_0|+|z_0-c|)^k < (k+1)(r+|z_0-c|)^k.$$

Ebből következik, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\boldsymbol{a}(k+1)\left(\sum_{j=0}^{k}(z-c)^j(z_0-c)^{k-j}\right)\right| \leq |\boldsymbol{a}(k+1)|(k+1)(r+|z_0-c|)^k.$$

Tudjuk, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k+1)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k},$$

továbbá $\lim\limits_{k\to\infty} (k+1)^{1/k} = 1$ (II. fejezet, 3. pont, **12**. gyakorlat). Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \left| \boldsymbol{a}(k+1) \left(\sum_{j=0}^{k} (z-c)^j (z_0-c)^{k-j} \right) \right|^{1/k} \leq \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \left| \boldsymbol{a}(k+1)(k+1)(r+|z_0-c|)^k \right|^{1/k} \leq \\
&\leq \left(\limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} \right) (r+|z_0-c|) < 1,
\end{aligned}$$

tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a

$$\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq 1} \boldsymbol{a}(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} (z-c)^j (z_0-c)^{k-1-j} \right)$$

sor abszolút konvergens, sőt az is látszik, hogy

$$\begin{aligned}
|P_{\boldsymbol{a},c}(z) - P_{\boldsymbol{a},c}(z_0)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z-z_0) \left(\sum_{j=0}^{k-1} (z-c)^j (z_0-c)^{k-1-j} \right) \right| = \\
&= |z-z_0| \left| \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k+1) \left(\sum_{j=0}^{k} (z-c)^j (z_0-c)^{k-j} \right) \right| \leq \\
&\leq |z-z_0| \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k+1)| \left| \sum_{j=0}^{k} (z-c)^j (z_0-c)^{k-j} \right| \\
&\leq |z-z_0| \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k+1)|(k+1)(r+|z_0-c|)^k.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$C := \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k+1)|(k+1)(r+|z_0-c|)^k \in \mathbb{R}_+$$

számra minden $z \in B_r(z_0;\mathbb{K})$ esetén

$$|P_{\boldsymbol{a},c}(z) - P_{\boldsymbol{a},c}(z_0)| \leq C \cdot |z-z_0|$$

teljesül. ■

Az előző állításból következik, hogy az Exp, Sin, Cos, Sh és Ch függvényeknek, valamint a komplex polinomiális függvényeknek mindenütt létezik határértéke, és a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.

Nevezetes határértékek a következők:

$$\lim_{z\to\mathbf{0}} \frac{Exp(z)-1}{z} = 1, \quad \lim_{z\to\mathbf{0}} \frac{1-Cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{z\to\mathbf{0}} \frac{Ch(z)-1}{z^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{z\to\mathbf{0}} \frac{Sin(z)}{z} = 1, \quad \lim_{z\to\mathbf{0}} \frac{Sh(z)}{z} = 1, \quad \lim_{x\to\mathbf{0}} \frac{log(1+x)}{x} = 1.$$

Ezek bizonyítása megtalálható a **6**. gyakorlatban.

Egy $\mathbb{K}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat olyan $\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvény, amelynek definíciós tartománya az $\mathbb{N}$ halmaz, tehát $Dom(\boldsymbol{s})$-nek egyáltalán nem létezik torlódási pontja $\mathbb{K}$-ban, így $\boldsymbol{s}$-nek, mint $\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvénynek semmilyen $\mathbb{K}$-beli pontban nem létezhet határértéke. Ugyanakkor bevezettük a sorozatok határértékének a fogalmát, ami - ezek szerint - nem speciális esete a függvények e pontban értelmezetett határérték-fogalmának. Azonban a függvények határértékének fogalma könnyen általánosítható úgy, hogy annak speciális esete legyen a valós sorozatok határértékének fogalma is.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $E \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak $+\infty$ (illetve $-\infty$) *torlódási pontja*, ha minden $r \in \mathbb{R}$ esetén $]r, \rightarrow [\cap E \neq \emptyset$ (illetve $] \leftarrow, r[\cap E \neq \emptyset$). Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénynek *létezik határértéke* $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben), ha $+\infty$ (illetve $-\infty$) torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és létezik olyan $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}$, amelyre

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists r \in \mathbb{R}) \quad f\langle]r, \rightarrow [\rangle \subseteq]\mathfrak{b}-\varepsilon, \mathfrak{b}+\varepsilon[,$$

(illetve

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists r \in \mathbb{R}) \quad f\langle] \leftarrow, r[\rangle \subseteq]\mathfrak{b}-\varepsilon, \mathfrak{b}+\varepsilon[\quad)$$

teljesül. Minden ilyen tulajdonságú $\mathfrak{b}\in\mathbb{R}$ pontot az f függvény *határértékének* nevezünk $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben).

Könnyen belátható, hogy ha $+\infty$ (illetve $-\infty$) torlódási pontja az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény definíciós tartományának, akkor f-nek legfeljebb egy határértéke létezhet $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben); ezt a határértéket (amennyiben létezik) a

$$\lim_{+\infty} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

(illetve

$$\lim_{-\infty} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad)$$

szimbólummal jelöljük. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az $\boldsymbol{s}$ valós sorozatnak pontosan akkor létezik határértéke az itt bevezetett értelemben, ha létezik határértéke a 2. pontban meghatározott értelemben, továbbá, ha $\boldsymbol{s}$-nek van határértéke, akkor

$$\lim_{+\infty} \boldsymbol{s} = \lim(\boldsymbol{s})$$

teljesül.

Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos az* $\mathfrak{a}$ *pontban*, ha

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+) \quad f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy f-nek *szakadása van* az $\mathfrak{a}$ pontban, ha f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény *folytonos*, ha f a definíciós tartományának minden pontjában folytonos.

Tehát az $f{:}\mathbb{K}{\rightarrowtail}\mathbb{K}$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathfrak{a}{\in}Dom(f)$ pontban, ha

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in Dom(f))\ \ ((|x-\mathfrak{a}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\mathfrak{a})| < \varepsilon)$$

teljesül. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény a definíciós tartományának minden *izolált* pontjában folytonos. Speciálisan, minden olyan $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény folytonos, amelynek a definíciós tartománya *véges*.

Állítás. (*A folytonosság lokalitása.*) Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a} \in Dom(f) \cap Dom(g)$, és tegyük fel, hogy létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap Dom(f) = B_r(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap Dom(g)$ és $f = g$ ezen a halmazon. Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha g folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $\delta' > 0$ valós számot, amelyre $f\langle B_{\delta'}(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle{\subseteq}B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$. Ekkor az r definíciója alapján bármely $\delta \in]0, \min(r, \delta')[$ valós számra

$$g\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle = f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}) = B_\varepsilon(g(\mathfrak{a});\mathbb{K}),$$

ami azt jelenti, hogy g folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

A pontbeli folytonosság és a pontbeli határérték létezésének fogalma logikailag *összehasonlíthatatlan*. Ennek az az egyszerű oka, hogy

- pontbeli határértékről beszélhetünk akkor is, ha a pont nem eleme a függvény definíciós tartományának, hanem annak torlódási pontja; ilyen pontban a függvény folytonossága értelmetlen;

- pontbeli folytonosságról beszélhetünk akkor is, ha a pont nem torlódási pontja a függvény definíciós tartományának, hanem annak eleme; ilyen pontban a függvény határértéke értelmetlen.

Ha azonban egy pont egyszerre eleme és torlódási pontja a függvény definíciós tartományának, akkor a pontbeli határérték létezésének és a pontbeli folytonosságnak szoros kapcsolata van.

Állítás. Legyen $f{:}\mathbb{K}{\rightarrowtail}\mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle{\subseteq}B_\varepsilon(f(\mathfrak{a};\mathbb{K}))$; ekkor $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\setminus\{\mathfrak{a}\}\rangle{\subseteq}f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle$ miatt f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$. Megfordítva; ha $f(\mathfrak{a})$ az f-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle{\subseteq}B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}))$; ekkor $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle = \{f(\mathfrak{a})\} \cup f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle{\subseteq}B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}))$, következésképpen f folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Következmény. Legyen $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, $R_{\boldsymbol{a}}$ az $\boldsymbol{a}$-hoz tartozó Cauchy-féle konvergenciasugár, és $c \in \mathbb{K}$. A $P_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvény a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmaz minden pontjában folytonos.

Bizonyítás. Láttuk, hogy a $P_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvénynek minden $\mathfrak{a} \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ pontban létezik határértéke, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} P_{\boldsymbol{a},c} = P_{\boldsymbol{a},c}(\mathfrak{a})$, ezért az előző állítás szerint $P_{\boldsymbol{a},c}$ folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Speciálisan; minden polinomiális függvény, a valós és komplex exponenciális függvények, valamint a valós és komplex trigonometrikus és hiperbolikus függvények folytonosak.

Állítás. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Ha $g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a függvény, amelyre $Dom(g) := Dom(f) \cup \{\mathfrak{a}\}$ és minden $x \in Dom(g)$ esetén

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, ha } x \in Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}, \\ \lim\limits_{\mathfrak{a}} f & \text{, ha } x = \mathfrak{a}, \end{cases}$$

akkor g folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f;\mathbb{K})$. Ekkor a g értelmezése alapján

$$g\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle = \{g(\mathfrak{a})\} \cup g\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = \{\lim_{\mathfrak{a}} f\} \cup f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq$$
$$\subseteq \{\lim_{\mathfrak{a}} f\} \cup B_\varepsilon(\lim_{\mathfrak{a}} f;\mathbb{K}) = B_\varepsilon(g(\mathfrak{a});\mathbb{K}),$$

tehát g folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Állítás. (*Átviteli elv folytonosságra.*) Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$. Az f pontosan akkor folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ha minden $Dom(f)$-ben haladó és $\mathfrak{a}$-hoz konvergáló $\boldsymbol{s}$ sorozatra az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens és a határértéke egyenlő $f(\mathfrak{a})$-val.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$. Ekkor $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})$, ezért $f(\boldsymbol{s}(n)) \in B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens és a határértéke egyenlő $f(\mathfrak{a})$-val.

Megfordítva; tegyük fel, hogy f *nem folytonos* $\mathfrak{a}$-ban, vagyis létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\delta \in \mathbb{R}^+$ esetén $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \setminus B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}) \neq \emptyset$, vagyis

$$B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ilyen és rögzítsünk egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(B_{\delta_n}(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap \overset{-1}{f}\langle \mathbb{K} \setminus B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})\rangle \right) \neq \emptyset.$$

Ha $\boldsymbol{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - \mathfrak{a}| < \delta_n$, így $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, ugyanakkor minden n természetes számra $f(\boldsymbol{s}(n)) \notin B_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$, ezért az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat biztosan *nem konvergál* az $f(\mathfrak{a})$ ponthoz (vagyis $f \circ \boldsymbol{s}$ nem konvergens, vagy konvergens, de $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) \neq f(\mathfrak{a})$). ■

Állítás. Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények.

a) Ha $\mathfrak{a} \in Dom(f) \cap Dom(g)$, továbbá f és g folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $f + g$ és $f \cdot g$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

b) Ha $\mathfrak{a} \in Dom(f/g)$, továbbá f és g folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az f/g függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

c) Ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, továbbá f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $|f|$ és $\overline{f}$ függvény, valamint minden $c \in \mathbb{K}$ számra a $c.f$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Bizonyítás. Ha f és g folytonos az $\mathfrak{a} \in Dom(f) \cap Dom(g)$ pontban és $\boldsymbol{s}$ olyan sorozat, amely $Dom(f) \cap Dom(g)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, akkor a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint az $f \circ \boldsymbol{s}$ és $g \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = f(\mathfrak{a})$ és $\lim(g \circ \boldsymbol{s}) = g(\mathfrak{a})$; ezért az $(f + g) \circ \boldsymbol{s} = (f \circ \boldsymbol{s}) + (g \circ \boldsymbol{s})$ és $(f \cdot g) \circ \boldsymbol{s} = (f \circ \boldsymbol{s}) \cdot (g \circ \boldsymbol{s})$ sorozat is konvergens, valamint $\lim((f + g) \circ \boldsymbol{s}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s}) + \lim(g \circ \boldsymbol{s}) = (f + g)(\mathfrak{a})$ és $\lim((f \cdot g) \circ \boldsymbol{s}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s}) \cdot \lim(g \circ \boldsymbol{s}) = (f \cdot g)(\mathfrak{a})$. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv alapján ez a)-t igazolja.

Ha f és g folytonos az $\mathfrak{a} \in Dom(f/g)$ pontban és $\boldsymbol{s}$ olyan sorozat, amely $Dom(f/g)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, akkor a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint az $f \circ \boldsymbol{s}$ és $g \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = f(\mathfrak{a})$ és $\lim(g \circ \boldsymbol{s}) = g(\mathfrak{a}) \neq 0$; ezért az $(f/g) \circ \boldsymbol{s} = (f \circ \boldsymbol{s})/(g \circ \boldsymbol{s})$ sorozat is konvergens, valamint $\lim((f/g) \circ \boldsymbol{s}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s})/\lim(g \circ \boldsymbol{s}) = (f/g)(\mathfrak{a})$. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv alapján ez b)-t igazolja.

Ha f folytonos az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban, $c \in \mathbb{K}$ és $\boldsymbol{s}$ olyan sorozat, amely $Dom(f)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, akkor a folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = f(\mathfrak{a})$; ezért az $|f| \circ \boldsymbol{s} = |f \circ \boldsymbol{s}|$, $\overline{f} \circ \boldsymbol{s} = \overline{f \circ \boldsymbol{s}}$ és $(c.f) \circ \boldsymbol{s} = c.(f \circ \boldsymbol{s})$ sorozat is konvergens, valamint $\lim(|f| \circ \boldsymbol{s}) = |\lim(f \circ \boldsymbol{s})| = |f|(\mathfrak{a})$, $\lim(\overline{f \circ \boldsymbol{s}}) = \overline{\lim(f \circ \boldsymbol{s})} = \overline{f}(\mathfrak{a})$ és $\lim((c.f) \circ \boldsymbol{s}) = c.\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = (c.f)(\mathfrak{a})$. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv alapján ez c)-t igazolja. ■

Állítás. (*A függvénykompozíció folytonossága.*) Ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a} \in Dom(g \circ f)$, továbbá f folytonos $\mathfrak{a}$-ban és g folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(g \circ f)$-ben haladó sorozat, amely konvergál $\mathfrak{a}$-hoz. Ekkor az f függvény $\mathfrak{a}$-beli folytonossága és az átviteli elv szerint az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergál $f(\mathfrak{a})$-hoz. Ugyanakkor az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat $Dom(g)$-ben halad, így a g függvény $f(\mathfrak{a})$-beli folytonossága és az átviteli elv szerint a $g \circ (f \circ \boldsymbol{s}) = (g \circ f) \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergál a $g(f(\mathfrak{a})) =: (g \circ f)(\mathfrak{a})$ ponthoz. Az átviteli elv alapján ez azt jelenti, hogy $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Az állítást könnyen igazolhatjuk az átviteli elv nélkül is, közvetlenül a folytonosság definícióját alkalmazva. Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és a g függvény $f(\mathfrak{a})$ pontbeli folytonossága alapján vegyünk olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre

$g\langle B_{\delta'}(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(g(f(\mathfrak{a}));\mathbb{K})$. Az f függvény $\mathfrak{a}$-beli folytonossága miatt van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_{\delta'}(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$; ekkor nyilvánvaló, hogy

$$(g \circ f)\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle = g\langle f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle\rangle \subseteq g\langle B_{\delta'}(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})\rangle \subseteq$$
$$\subseteq B_\varepsilon(g(f(\mathfrak{a}));\mathbb{K}) = B_\varepsilon((g \circ f)(\mathfrak{a});\mathbb{K}),$$

így $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Állítás. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, és $K \subseteq Dom(f)$ olyan korlátos és zárt halmaz, amelynek minden pontjában f folytonos, akkor $f\langle K\rangle$ is korlátos és zárt halmaz.

Bizonyítás. A $\mathbb{K}$-ra vonatkozó Bolzano-Weierstrass-tételt fogjuk alkalmazni. Ehhez legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges $f\langle K\rangle$-ban haladó sorozat; az $\boldsymbol{s}$-nek olyan részsorozatát keressük, amely konvergens és a határértéke eleme $f\langle K\rangle$-nak. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in f\langle K\rangle$, tehát $K \cap \overset{-1}{f}\langle\{\boldsymbol{s}(n)\}\rangle \neq \emptyset$. Ebből a kiválasztási axióma alapján kapjuk, hogy

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(K \cap \overset{-1}{f}\langle\{\boldsymbol{s}(n)\}\rangle\right) \neq \emptyset.$$

Legyen $\boldsymbol{s}'$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\boldsymbol{s}'$ olyan K-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\boldsymbol{s}'(n)) = \boldsymbol{s}(n)$, vagyis $f \circ \boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s}$. A K halmaz a feltevés szerint korlátos és zárt, tehát a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan növő függvény, hogy az $\boldsymbol{s}' \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(\boldsymbol{s}' \circ \sigma) \in K$. Az f függvény folytonos a $\lim(\boldsymbol{s}' \circ \sigma)$ pontban, ezért az átviteli elv alapján az $f \circ (\boldsymbol{s}' \circ \sigma) = (f \circ \boldsymbol{s}') \circ \sigma = \boldsymbol{s} \circ \sigma$ sorozat konvergens, és $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = \lim(f \circ (\boldsymbol{s}' \circ \sigma)) = f(\lim(\boldsymbol{s}' \circ \sigma)) \in f\langle K\rangle$. Ezért a Bolzano-Weierstrass-tételből következik, hogy $f\langle K\rangle$ is korlátos és zárt halmaz. ■

Állítás. (*Weierstrass-féle maximum-minimum elv.*) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $K \subseteq Dom(f)$ olyan nem üres, korlátos és zárt halmaz, amelynek minden pontjában f folytonos, akkor léteznek olyan x_{min} és x_{max} pontok K-ban, amelyekre minden $x \in K$ esetén $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ teljesül (tehát f az x_{min} pontban felveszi a legkisebb értékét K-ban, és az x_{max} pontban felveszi a legnagyobb értékét K-ban).

Bizonyítás. Az $f\langle K\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres és korlátos $\mathbb{R}$-ben, így léteznek a $\sup f\langle K\rangle$ és $\inf f\langle K\rangle$ számok. Tudjuk, hogy ezek benne vannak az $\overline{f\langle K\rangle}$ lezártban. Azonban az $f\langle K\rangle$ halmaz zárt is, így $\sup f\langle K\rangle, \inf f\langle K\rangle \in f\langle K\rangle$, vagyis léteznek olyan $x_{min}, x_{max} \in K$, hogy $f(x_{min}) = \inf f\langle K\rangle$ és $f(x_{max}) = \sup f\langle K\rangle$ teljesül. Ezek a pontok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x \in K$ esetén $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$. ■

Állítás. (*Az inverzfüggvény folytonossága.*) Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ folytonos injekció, továbbá $Dom(f)$ korlátos és zárt halmaz, akkor az f^{-1} inverzfüggvény folytonos.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\mathfrak{b} \in Dom(f^{-1}) := Im(f)$ olyan pont, amelyben f^{-1} *nem folytonos.* Legyen $\mathfrak{a} := f^{-1}(\mathfrak{b})$ és az átviteli elv alapján vegyünk olyan $\boldsymbol{s}$ sorozatot, amely az $Im(f)$ halmazban halad, $\mathfrak{b}$-hez konvergál, és az $\boldsymbol{s}' := f^{-1} \circ \boldsymbol{s}$ sorozat nem konvergál $\mathfrak{a}$-hoz. Ez azt jelenti, hogy

létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $n > N$ természetes szám, amelyre $|\boldsymbol{s}'(n) - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ilyen szám és jelölje g azt az $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$g(N) := \min\{n \in \mathbb{N} | (n > N) \wedge (|\boldsymbol{s}'(n) - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon)\}.$$

Legyen σ a 0 kezdőpont és a g függvény által meghatározott iterációs sorozat. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = g(\sigma(n)) > \sigma(n)$ és $|\boldsymbol{s}'(\sigma(n+1)) - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon$. Tehát az $\boldsymbol{s}'' : \mathbb{N} \to \mathbb{K};\ n \mapsto \boldsymbol{s}'(\sigma(n+1))$ függvény az $\boldsymbol{s}'$-nek olyan részsorozata, amely a $Dom(f) \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$ korlátos és zárt halmazban halad. Ezért a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján vehetünk olyan $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan növő függvényt, amelyre az $\boldsymbol{s}'' \circ \sigma'$ sorozat konvergens és $\mathfrak{a}' := \lim(\boldsymbol{s}'' \circ \sigma') \in Dom(f) \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$. Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}'$-ben, ezért az átviteli elv alapján az $f \circ \boldsymbol{s}'' \circ \sigma'$ sorozat konvergens és $\lim(f \circ \boldsymbol{s}'' \circ \sigma') = f(\mathfrak{a}')$. Világos, hogy $f \circ \boldsymbol{s}'' = \boldsymbol{s} \circ \sigma \circ \sigma_1$, ahol σ_1 jelöli az $\mathbb{N} \to \mathbb{N};\ n \mapsto n+1$ sorozatot, ilymódon $\boldsymbol{s} \circ (\sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma')$ az $\boldsymbol{s}$-nek olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke $f(\mathfrak{a}')$-vel egyenlő. De az $\boldsymbol{s}$ sorozat $\mathfrak{b}$-hez konvergál, ezért $f(\mathfrak{a}') = \mathfrak{b} = f(\mathfrak{a})$, így az f injektivitása folytán $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. Ez viszont $\mathfrak{a}' \in Dom(f) \setminus B_\varepsilon(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$ miatt lehetetlen. ■

Az előző állításban egészen lényeges az, hogy a $Dom(f)$ halmaz *korlátos és zárt*; e nélkül az állítás általában nem igaz (ld. **21**. gyakorlat).

Lemma. (*Bolzano-lemma.*) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor van olyan $c \in]a, b[$, amelyre $f(c) = 0$ teljesül.

Bizonyítás. A meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $f(a) < 0 < f(b)$. A másik eset (amikor $f(a) > 0 > f(b)$) erre visszavezethető, ha az f függvényről áttérünk $-f$-re.

Értelmezzük az $E := \{x \in [a, b] | f(x) < 0\}$ halmazt, amely természetesen nem üres, hiszen $a \in E$, továbbá felülről korlátos, hiszen b felső korlátja. Ezért tekinthetjük a $c := \sup(E)$ pontot, amelyre $c \in \overline{E} \subseteq [a, b]$ teljesül, ugyanis $E \subseteq [a, b]$ és $[a, b]$ zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

Az f folytonos a-ban, ezért a $-f(a) \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre $f\langle]a - \delta, a + \delta[\rangle \subseteq]f(a) - (-f(a)), f(a) + (-f(a))[=]2f(a), 0[$, vagyis minden $x \in]a, \min(a + \delta, b)[$ pontra $f(x) < 0$. Ebből következik, hogy E-nek létezik a-nál nagyobb eleme, így $c := \sup(E) > a$. Ugyanakkor létezik olyan $\boldsymbol{s}$ sorozat, amely E-ben halad és c-hez konvergál, mert $c := \sup(E) \in \overline{E}$. Az f függvény folytonos c-ben, ezért az átviteli elv alapján $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergál $f(c)$-hez. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\boldsymbol{s}(n)) < 0$, tehát $f(c) \leq 0$, amiből az is látszik, hogy $c < b$.

A bizonyítás befejezéséhez megmutatjuk, hogy $f(c) < 0$ lehetetlen. Valóban, ha $f(c) < 0$ igaz volna, akkor az f függvény c pontbeli folytonossága miatt az $-f(c) \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\delta < \min(c - a, b - c)$ és $f\langle]c - \delta, c + \delta[\rangle \subseteq]f(c) - (-f(c)), f(c) + (-f(c))[=]2f(c), 0[$, így minden $x \in]c - \delta, c + \delta[$ pontra $f(x) < 0$, vagyis $x \in E$. Ez azt jelenti, hogy E-nek van c-nél nagyobb pontja (a $]c, c + \delta[$ intervallum minden eleme ilyen), ami ellentmond annak, hogy c felső korlátja E-nek. ■

Tétel. (*Bolzano-tétel.*) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq Dom(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában f folytonos, akkor az $f\langle I\rangle$ halmaz is intervallum.

Bizonyítás. Legyenek $a', b' \in f\langle I\rangle$ olyanok, hogy $a' < b'$; megmutatjuk, hogy ekkor $]a', b'[\subseteq f\langle I\rangle$, következésképpen az $f\langle I\rangle$ halmaz intervallum. Valóban, legyenek $a, b \in I$ olyan pontok, hogy $a' = f(a)$ és $b' = f(b)$. Világos, hogy $a' \neq b'$ miatt $a \neq b$.

Tegyük fel, hogy $a < b$. Vegyünk tetszőleges $y \in]a', b'[$ pontot, és képezzük a $g : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) - y$ függvényt. Az f folytonos az $[a, b]$ minden pontjában, ezért a g függvény folytonos, továbbá nyilvánvalóan $g(a) := f(a) - y = a' - y < 0$ és $g(b) := f(b) - y = b' - y > 0$. Ezért az előző lemma szerint van olyan $x \in]a, b[$, amelyre $g(x) = 0$, azaz $f(x) = y$ teljesül, így $y \in f\langle I\rangle$. Ez azt jelenti, hogy $]a', b'[\subseteq f\langle I\rangle$.

Ha $b < a$, akkor az előző érvelést megismételve az a és b felcserélésével, szintén azt kapjuk, hogy $]a', b'[\subseteq f\langle I\rangle$. ■

Következmény. A valós logaritmusfüggvény definíciós tartománya egyenlő az $\mathbb{R}^+$ halmazzal.

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy $\mathbb{R}^+ \subseteq Dom(log) := Im(exp)$, vagyis hogy minden $y \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $y = exp(x)$. Ha $x > 0$, akkor $exp(x) \geq 1 + x$, ezért bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén, minden $x > \max(y - 1, 0)$ valós számra $y < exp(x)$ teljesül. Ha tehát $y \in \mathbb{R}^+$, akkor az y-hoz van olyan $b \in \mathbb{R}^+$, hogy $y < exp(b)$, továbbá az $1/y$-hoz van olyan $b' \in \mathbb{R}^+$, hogy $1/y < exp(b')$, vagyis $exp(-b') < y$. Ha tehát $a := -b'$, akkor $a < 0 < b$ és $exp(a) < y < exp(b)$. Az exp függvény folytonossága és a Bolzano-tétel szerint $exp\langle[a, b]\rangle$ intervallum, tehát $y \in]exp(a), exp(b)[\subseteq exp\langle[a, b]\rangle \subseteq Im(exp)$, így van olyan $x \in \mathbb{R}$ (sőt $x \in]a, b[$), amelyre $y = exp(x)$. ■

Ebből az is következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén az $x^z := Exp(z \cdot \log(x))$ hatvány jól értelmezett.

Következmény. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény, $I \subseteq Dom(f)$ nyílt intervallum, továbbá f az I halmazon szigorúan monoton, akkor $f\langle I\rangle$ *nyílt* intervallum és az $(f|_I)^{-1}$ függvény *folytonos.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy f szigorúan monoton növő az I intervallumon; a szigorúan monoton fogyó függvények esete erre visszavezethető.

Legyen $\mathfrak{a} \in I$ tetszőleges, és válasszunk olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r] \subseteq I$. Az f monoton növése és a Bolzano-tétel alapján $f\langle[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]\rangle = [f(\mathfrak{a} - r), f(\mathfrak{a} + r)]$. Ugyanakkor f szigorúan monoton növő, tehát ha $\delta \in]0, \min(f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{a} - r), f(\mathfrak{a} + r) - f(\mathfrak{a}))[$ tetszőleges valós szám, akkor

$$f(\mathfrak{a}) \in]f(\mathfrak{a}) - \delta, f(\mathfrak{a}) + \delta[\subseteq [f(\mathfrak{a} - r), f(\mathfrak{a} + r)] = f\langle[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]\rangle \subseteq f\langle I\rangle,$$

így $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $f\langle I\rangle$-nek, és az is látszik, hogy az $(f|_I)^{-1}$ és $(f|_{[\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r]})^{-1}$ függvények egyenlők a $]f(\mathfrak{a}) - \delta, f(\mathfrak{a}) + \delta[$ nyílt intervallumon. De az $f|_{[\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r]}$ függvény folytonos injekció, és $[\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r]$ korlátos és zárt halmaz, ezért az

$(f|_{[\mathfrak{a}-r,\mathfrak{a}+r]})^{-1}$ inverzfüggvény folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban. A folytonosság lokalitásából következik, hogy az $(f|_I)^{-1}$ függvény is folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban. ■

Az előző állítást alkalmazva az *exp* függvényre kapjuk, hogy a $log := exp^{-1}$ függvény folytonos.

Ha $f{:}\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ folytonos függvény, akkor minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számhoz és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ ponthoz létezik olyan ε-tól és $\mathfrak{a}$-tól függő $\delta \in \mathbb{R}^+$ szám, amelyre $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ teljesül. Könnyen látható, hogy ha $Dom(f)$ *véges* halmaz, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy *minden* $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ esetén $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ teljesül. Azonban *végtelen* $Dom(f)$ esetén előfordulhat, hogy adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén nem létezik olyan közös $\delta > 0$ valós szám, hogy minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontra $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ teljesül. Ezért nemtriviális tulajdonság a következő.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontra $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ teljesül.

Állítás. (*Az egyenletes folytonosság jellemzése.*) Az $f{:}\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvény pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x, x' \in Dom(f)$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Bizonyítás. Ha f egyenletesen folytonos és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontra $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ teljesül; ekkor $x, x' \in Dom(f)$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $x' \in B_\delta(x;\mathbb{K}) \cap Dom(f)$, így $f(x') \in B_\varepsilon(f(x);\mathbb{K})$, vagyis $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Megfordítva, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, amelyre minden $x, x' \in Dom(f)$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $x \in B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap Dom(f)$ pontra $|x - \mathfrak{a}| < \delta$, így $|f(x) - f(\mathfrak{a})| < \varepsilon$, vagyis minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontra $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$ teljesül, ami azt jelenti, hogy f egyenletesen folytonos. ■

Állítás. Ha az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény egyenletesen folytonos, akkor folytonos.

Bizonyítás. Az f függvény egyenletes folytonossága azt jelenti, hogy

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)(\forall\mathfrak{a} \in Dom(f)) \quad f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}),$$

amiből következik az, hogy

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall\mathfrak{a} \in Dom(f))(\exists\delta \in \mathbb{R}^+) \quad f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}).$$

Ez utóbbi állítás viszont ekvivalens azzal, hogy

$$(\forall\mathfrak{a} \in Dom(f))(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+) \quad f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K}),$$

ami pontosan azt jelenti, hogy f a $Dom(f)$ minden pontjában folytonos. ■

Könnyen adható példa folytonos, de nem egyenletesen folytonos függvényre. Azonban bizonyos esetekben a folytonosságból következtethetünk az egyenletes folytonosságra; ilyen esetről szól a következő állítás.

Állítás. (*Heine-tétel.*) Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ folytonos függvény és $Dom(f)$ korlátos és zárt halmaz, akkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ folytonos függvény, $Dom(f)$ korlátos és zárt halmaz, továbbá f nem egyenletesen folytonos. Az egyenletes folytonosság jellemzése szerint ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\delta > 0$ valós számhoz létezik olyan $(x, x') \in Dom(f) \times Dom(f)$ pár, amelyre $|x - x'| < \delta$ és $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ egy ilyen szám és rögzítsünk egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{(x, x') \in Dom(f) \times Dom(f) | (|x - x'| < \delta_n) \wedge (|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)\} \neq \emptyset,$$

ezért a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (\{(x, x') \in Dom(f) \times Dom(f) | (|x - x'| < \delta_n) \wedge (|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)\}) \neq \emptyset.$$

Legyen $\boldsymbol{S}$ eleme ennek a szorzathalmaznak; ekkor $\boldsymbol{s} := pr_1(\boldsymbol{S})$ és $\boldsymbol{s}' := pr_2(\boldsymbol{S})$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozatok, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}(n) - \boldsymbol{s}'(n)| < \delta_n$ és $|f(\boldsymbol{s}(n)) - f(\boldsymbol{s}'(n))| \geq \varepsilon$. A $Dom(f)$ halmaz korlátos és zárt, ezért a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van olyan $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\boldsymbol{s} \circ \sigma'$ konvergens és $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma') \in Dom(f)$. Ismét a Bolzano-Weierstrass-tételt alkalmazva kapjuk olyan $\sigma'' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény létezését, amelyre $(\boldsymbol{s}' \circ \sigma') \circ \sigma''$ konvergens és $\lim((\boldsymbol{s}' \circ \sigma') \circ \sigma'') \in Dom(f)$. Ekkor $\sigma := \sigma' \circ \sigma''$ olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre az $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ és $\boldsymbol{s}' \circ \sigma$ sorozatok mindketten konvergensek, és a határértékük eleme a $Dom(f)$ halmaznak. Legyenek $\mathfrak{a} := \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$ és $\mathfrak{a}' := \lim(\boldsymbol{s}' \circ \sigma)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\boldsymbol{s}(\sigma(n)) - \boldsymbol{s}'(\sigma(n))| < \delta_{\sigma(n)}$, és $(\delta_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ is zérussorozat, ezért $\lim(\boldsymbol{s}\circ\sigma - \boldsymbol{s}'\circ\sigma) = 0$. Ebből következik, hogy $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. Az f függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért az átviteli elv alapján $\lim(f \circ (\boldsymbol{s} \circ \sigma)) = f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a}') = \lim(f \circ (\boldsymbol{s}' \circ \sigma))$. Ez azt jelenti, hogy $\lim(f \circ (\boldsymbol{s} \circ \sigma) - f \circ (\boldsymbol{s}' \circ \sigma)) = 0$, ami viszont lehetetlen, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\boldsymbol{s}(\sigma(n))) - f(\boldsymbol{s}'(\sigma(n)))| \geq \varepsilon$. ■

Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f-nek létezik *jobboldali* (illetve *baloldali*) *határértéke az* $\mathfrak{a}$ *pontban*, ha az $f|_{]\mathfrak{a},\to[\cap Dom(f)}$ (illetve $f|_{]\leftarrow,\mathfrak{a}[\cap Dom(f)}$) függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Ha f-nek létezik jobboldali (illetve baloldali) határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor a

$$\lim_{\mathfrak{a}} f|_{]\mathfrak{a},\to[\cap Dom(f)} \quad (\text{illetve } \lim_{\mathfrak{a}} f|_{]\leftarrow,\mathfrak{a}[\cap Dom(f)})$$

határértéket az f függvény *jobboldali* (illetve *baloldali*) $\mathfrak{a}$ *határértékének* nevezzük az $\mathfrak{a}$ pontban, és a

$$\lim_{\mathfrak{a}+0} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to\mathfrak{a},\ x>\mathfrak{a}} f(x) \quad (\text{illetve } \lim_{\mathfrak{a}-0} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to\mathfrak{a},\ x<\mathfrak{a}} f(x)\ )$$

szimbólummal jelöljük.

Tehát ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$, akkor f-nek pontosan akkor létezik jobboldali (illetve baloldali) határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja a $]\mathfrak{a}, \to[\cap Dom(f)$ (illetve $]\leftarrow, \mathfrak{a}[\cap Dom(f)$) halmaznak, és

$$(\exists \mathfrak{b} \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in Dom(f)) \ \ (\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a} + \delta \Rightarrow |f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon)$$

(illetve

$$(\exists \mathfrak{b} \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in Dom(f)) \ \ (\mathfrak{a} - \delta < x < \mathfrak{a} \Rightarrow |f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon) \ )$$

teljesül.

Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ *belső pontja* $Dom(f)$-nek. Az f-nek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}+0} f = \lim_{\mathfrak{a}-0} f.$$

Bizonyítás. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre $f\langle]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq]\lim\limits_{\mathfrak{a}} f - \varepsilon, \lim\limits_{\mathfrak{a}} f + \varepsilon[$; ekkor minden $x \in Dom(f)$ esetén, ha $\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a} + \delta$ vagy $\mathfrak{a} - \delta < x < \mathfrak{a}$, akkor $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}} f| < \varepsilon$, tehát f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$; jelöle $\mathfrak{b}$ ezt az elemet. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta_+, \delta_- \in \mathbb{R}^+$ számokat, amelyekre minden $x \in Dom(f)$ esetén, ha $\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a} + \delta_+$, akkor $|f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon$, és ha $\mathfrak{a} - \delta_- < x < \mathfrak{a}$, akkor $|f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon$. Nyilvánvaló. hogy minden $\delta \in]0, \min(\delta_-, \delta_+)]$ számra teljesül az, hogy minden $x \in Dom(f)$ esetén, ha $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$, akkor $|f(x) - \mathfrak{b}| < \varepsilon$, tehát f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$, akkor lehetséges az, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, így $\mathfrak{a}$ *torlódási pontja* $Dom(f)$-nek, azonban $\mathfrak{a}$ *nem torlódási pontja* a $]\mathfrak{a}, \rightarrow[\cap Dom(f)$ vagy a $]\leftarrow, \mathfrak{a}[\cap Dom(f)$ halmaznak, tehát az f jobboldali vagy baloldali határértéke *nem létezik.*

Következmény. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ *belső pontja* $Dom(f)$-nek. Az f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $f(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$.

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, akkor torlódási pontja is $Dom(f)$-nek, ezért f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha létezik f-nek határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $f(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$. Ez utóbbi tulajdonság viszont az előző állítás szerint ekvivalens azzal, hogy f-nek létezik a jobboldali és baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $f(\mathfrak{a}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$. ■

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénynek *elsőfajú szakadása* van az $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban, de f-nek mind a jobboldali, mind a baloldali határértéke létezik $\mathfrak{a}$-ban. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvénynek *másodfajú szakadása* van az $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban és f-nek nem elsőfajú szakadása van $\mathfrak{a}$-ban (vagyis $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f$ vagy $\lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f$ nem létezik).

Definíció. Az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt *rendszerisnak* nevezzük, ha $Dom(f)$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, és a $Dom(f)$ minden pontjában az f folytonos vagy elsőfajú

szakadása van (vagyis ha f-nek a $Dom(f)$ minden pontjában létezik a jobboldali és létezik a baloldali határértéke).

Állítás. Minden nyílt intervallumon értelmezett, *monoton* $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény reguláris.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ monoton növő függvény és $Dom(f)$ nyílt intervallum. Rögzítsünk egy $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontot.

Az $f\langle]\mathfrak{a}, \rightarrow [\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres, mert $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, és alulról korlátos, mert az f monoton növése miatt $f(\mathfrak{a})$ alsó korlátja ennek a halmaznak. Ezért képezhető a $\mathfrak{b}_+ := \inf(f\langle]\mathfrak{a}, \rightarrow [\rangle)$ valós szám. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}_+$ az f-nek jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Valóban, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\mathfrak{b}_+ + \varepsilon$ már nem alsó korlátja $f\langle]\mathfrak{a}, \rightarrow [\rangle$-nak, tehát van olyan $\mathfrak{a}' \in Dom(f) \cap]\mathfrak{a}, \rightarrow [$, amelyre $f(\mathfrak{a}') < \mathfrak{b}_+ + \varepsilon$; ekkor a $\delta := \mathfrak{a}' - \mathfrak{a} \in \mathbb{R}^+$ szám olyan, hogy minden $x \in Dom(f)$ pontra, ha $\mathfrak{a} < x < \mathfrak{a} + \delta := \mathfrak{a}'$, akkor az f monoton növése miatt

$$\mathfrak{b}_+ - \varepsilon < \mathfrak{b}_+ \leq f(x) \leq f(\mathfrak{a}') < \mathfrak{b}_+ + \varepsilon,$$

tehát $|f(x) - \mathfrak{b}_+| < \varepsilon$.

Az $f\langle] \leftarrow, \mathfrak{a}[\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres, mert $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, és felülről korlátos, mert az f monoton növése miatt $f(\mathfrak{a})$ felső korlátja ennek a halmaznak. Ezért képezhető a $\mathfrak{b}_- := \sup(f\langle]\leftarrow, \mathfrak{a}[\rangle)$ valós szám. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}_-$ az f-nek baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Valóban, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\mathfrak{b}_- - \varepsilon$ már nem felső korlátja $f\langle] \leftarrow, \mathfrak{a}[\rangle$-nak, tehát van olyan $\mathfrak{a}'' \in Dom(f) \cap] \leftarrow, \mathfrak{a}[$, amelyre $\mathfrak{b}_- - \varepsilon < f(\mathfrak{a}'')$; ekkor a $\delta := \mathfrak{a} - \mathfrak{a}'' \in \mathbb{R}^+$ szám olyan, hogy minden $x \in Dom(f)$ pontra, ha $\mathfrak{a} - \delta = \mathfrak{a}'' < x < \mathfrak{a}$, akkor az f monoton növése miatt

$$\mathfrak{b}_- - \varepsilon < f(\mathfrak{a}'') \leq f(x) \leq \mathfrak{b}_- < \mathfrak{b}_- + \varepsilon,$$

tehát $|f(x) - \mathfrak{b}_-| < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy f reguláris függvény.

Ha f monoton fogyó, akkor $-f$ monoton növő, tehát $-f$ reguláris függvény, ezért f is reguláris. ■

Állítás. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ reguláris függvény, akkor az f szakadási pontjainak halmaza *megszámlálható*.

Bizonyítás. Értelmezzük azt az $\omega : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $Dom(\omega) := Dom(f)$, és minden $x \in Dom(\omega)$ esetén

$$\omega(x) := max\left(\left|f(x) - \lim_{x-0} f\right|, \left|f(x) - \lim_{x+0} f\right|\right).$$

Világos, hogy minden $x \in Dom(f)$ esetén az $\omega(x) = 0$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy f-nek x-ben létezik határértéke és az megegyezik $f(x)$-szel, vagyis az f folytonos x-ben. Tehát az f függvény szakadási pontjainak halmaza egyenlő az $\{x \in Dom(f) | \omega(x) > 0\}$ halmazzal; ennek a megszámlálhatóságát kell igazolni.

Megmutatjuk, hogy ω-nak a definíciós tartománya minden pontjában létezik határértéke, és minden $\mathfrak{a} \in Dom(\omega)$ esetén $\lim_{\mathfrak{a}} \omega = 0$.

Legyen $\mathfrak{a} \in Dom(\omega)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített. Az $\mathfrak{a}$ pont belső pontja $Dom(f)$-nek és f-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban jobboldali és baloldali határértéke, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}$, hogy $]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\subseteq Dom(f)$ és minden $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+\delta[$ pontra $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$, továbbá minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}[$ pontra $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f| < \varepsilon/2$. Legyen $\delta \in \mathbb{R}^+$ ilyen szám és vegyünk egy $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+\delta[$ pontot. Ha $\boldsymbol{s}_+$ olyan számsorozat, amely $]x, \mathfrak{a}+\delta[$-ban halad és x-hez konvergál, akkor az átviteli elv szerint

$$\lim_{x+0} f := \lim_{x} \left(f|_{]x,\to[\cap Dom(f)}\right) = \lim \left(\left(f|_{]x,\to[\cap Dom(f)}\right) \circ \boldsymbol{s}_+\right) =$$
$$= \lim(f \circ \boldsymbol{s}_+) \in [f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon],$$

hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\boldsymbol{s}_+(n)) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$ és $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$, tehát $|f(\boldsymbol{s}_+(n)) - f(x)| < \varepsilon$. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $\boldsymbol{s}_-$ olyan számsorozat, amely $]\mathfrak{a}, x[$-ben halad és x-hez konvergál, akkor az átviteli elv szerint

$$\lim_{x-0} f := \lim_{x} \left(f|_{]\leftarrow,x[\cap Dom(f)}\right) = \lim \left(\left(f|_{]\leftarrow,x[\cap Dom(f)}\right) \circ \boldsymbol{s}_-\right) =$$
$$= \lim(f \circ \boldsymbol{s}_-) \in [f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon],$$

hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(\boldsymbol{s}_-(n)) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$ és $|f(x) - \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f| < \varepsilon/2$, tehát $|f(\boldsymbol{s}_-(n)) - f(x)| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+\delta[$ esetén

$$0 \le \omega(x) := max\left(\left|f(x) - \lim_{x-0} f\right|, \left|f(x) - \lim_{x+0} f\right|\right) \le \varepsilon.$$

Teljesen hasonló meggondolások arra vezetnek, hogy $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}[$ esetén is $0 \le \omega(x) \le \varepsilon$, ezért minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ pontra $-\varepsilon < 0 \le \omega(x) \le \varepsilon$, vagyis ω-nak van határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \omega = 0$.

Most megmutatjuk, hogy minden $K \subseteq Dom(f)$ korlátos és zárt halmazra, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra az $\{x \in K | \omega(x) \ge \varepsilon\}$ halmaz *véges*. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $K \subseteq Dom(f)$ korlátos és zárt halmaz, továbbá $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, de az $\{x \in K | \omega(x) \ge \varepsilon\}$ halmaz végtelen. Ekkor van olyan $\boldsymbol{s}$ sorozat, amely $\{x \in K | \omega(x) \ge \varepsilon\}$-ban halad és *injektív*. Az $\boldsymbol{s}$ sorozat a K korlátos és zárt halmazban halad, ezért a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre az $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ részsorozat konvergens és $\mathfrak{a} := \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) \in K \subseteq Dom(f)$. Az $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ függvény injektív, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \ge N$ természetes számra $(\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n) \ne \mathfrak{a}$. Ugyanakkor az ω függvénynek az $\mathfrak{a}$ pontban a határértéke 0, ezért a határértékekre vonatkozó átviteli elv alapján $\lim(\omega \circ (\boldsymbol{s} \circ \sigma)) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} \omega = 0$. Azonban minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(m) \in \{x \in K | \omega(x) \ge \varepsilon\}$, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\omega(\boldsymbol{s}(\sigma(n))) \ge \varepsilon$, ami lehetetlen, mert $\lim(\omega \circ (\boldsymbol{s} \circ \sigma)) = 0$.

A $Dom(f)$ halmaz nyílt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, ezért a II. fejezet, 2. pont, **5**. gyakorlat szerint vehetünk olyan $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén K_m korlátos és zárt, valamint

$$Dom(f) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m.$$

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. Ekkor

$$\{x \in Dom(f)|\omega(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in Dom(f)|\omega(x) \geq \varepsilon_n\} =$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{x \in K_m|\omega(x) \geq \varepsilon_n\}$$

teljesül, ugyanakkor láttuk, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\{x \in K_m|\omega(x) \geq \varepsilon_n\}$ véges halmaz, továbbá tudjuk azt, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. Ezért $\{x \in Dom(f)|\omega(x) > 0\}$, vagyis az f függvény szakadási pontjainak halmaza megszámlálható. ■

Gyakorlatok

1. A függvénykompozíció határértékével kapcsolatban tekintsük a következő példákat!

a) Legyen g az azonosan 0 függvény a $]\leftarrow, 0]$ intervallumon és $f := id_{\mathbb{R}}^2$. Ekkor $\lim\limits_0 g$ létezik és $g(0) = \lim\limits_0 g$ is teljesül, továbbá $\lim\limits_0 f$ létezik és $f(0) = \lim\limits_0 f \in Dom(g)$, azonban 0 *nem torlódási pontja* a $Dom(g \circ f)$ halmaznak.

b) Legyen $f := id_{\mathbb{R}} \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ és $g := \chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Ekkor $\lim\limits_0 f = f(0) \in Dom(g)$ és $\lim\limits_0 g = 1$ és 0 torlódási pontja a $Dom(g \circ f)$ halmaznak, de $\lim\limits_0 (g \circ f)$ *nem létezik* (mert $\lim\limits_0 g \neq g(0)$).

c) Legyen $f := \chi_{\{1\}}$ és $g := \chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Ekkor $\lim\limits_0 f \in Dom(g)$ és $\lim\limits_0 g = 1$ és 0 torlódási pontja a $Dom(g \circ f)$ halmaznak és $\lim\limits_0 (g \circ f)$ létezik, de *nem egyenlő* $\lim\limits_0 g$-vel (mert $\lim\limits_0 g \neq g(0)$).

2. Legyen E halmaz, $f : E \to \mathbb{R}$ függvény, és $A \subseteq E$ olyan nem üres halmaz, hogy $f\langle A\rangle \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz. Ha $g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan monoton növő folytonos függvény, hogy $\overline{f\langle A\rangle} \subseteq Dom(g)$, akkor

$$\sup((g \circ f)\langle A\rangle) = g(\sup(f\langle A\rangle)).$$

(*Útmutatás.* Tudjuk, hogy $\sup(f\langle A\rangle) \in \overline{f\langle A\rangle}$, ezért van olyan A-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, hogy $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens valós sorozat és $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = \sup(f\langle A\rangle)$. A g függvény folytonos a $\sup(f\langle A\rangle)$ pontban, így az átviteli elv következtében $\lim(g \circ f \circ \boldsymbol{s}) = g(\sup(f\langle A\rangle))$ és természetesen $\lim(g \circ f \circ \boldsymbol{s}) \leq \sup((g \circ f)\langle A\rangle)$ teljesül. Tehát a $g(\sup(f\langle A\rangle)) \leq \sup((g \circ f)\langle A\rangle)$ egyenlőtlenséghez nem szükséges a g monoton növése, csak a folytonosságát használtuk ki. A fordított egyenlőtlenség viszont nyilvánvalóan következik a g monoton növéséből, még akkor is, ha g nem folytonos.)

3. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény és $I \subseteq Dom(f)$ intervallum. Az f függvény pontosan akkor injektív az I halmazon, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó az I-n. Ha f injektív az I intervallumon, akkor az $(f|_I)^{-1}$ inverzfüggvény folytonos.

4. Legyen $E \subseteq \mathbb{K}$ tetszőleges halmaz. Egy $\Omega \subseteq E$ halmazt *E-ben nyíltnak* nevezünk, ha létezik olyan $\Omega' \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, hogy $\Omega = \Omega' \cap E$. Egy $F \subseteq E$ halmazt *E-ben zártnak* nevezünk, ha létezik olyan $F' \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, hogy $F = F' \cap E$. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek:

a) Minden $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazra az $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle$ halmaz nyílt $Dom(f)$-ben.

b) Minden $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmazra az $\overset{-1}{f}\langle F\rangle$ halmaz zárt $Dom(f)$-ben.

c) f folytonos.

(Ez a folytonosság *topologikus jellemzése.*)

5. A $+\infty$ pont torlódási pontja a *log* függvény definíciós tartományának és

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{log(x)}{x} = 0$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Könnyen látható, hogy minden $x \geq 1$ számra fennállnak a

$$0 \leq \frac{log(x)}{x} \leq \sqrt{\frac{2}{x}}$$

egyenlőtlenségek.)

6. Legyen $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, $c \in \mathbb{K}$, és tegyük fel, hogy $R_{\boldsymbol{a}} > 0$. Ha $m \in \mathbb{N}$ és minden $k < m$ természetes számra $\boldsymbol{a}(k) = 0$, akkor

$$\lim_c \frac{P_{\boldsymbol{a},c}}{(id_{\mathbb{K}} - c)^m} = \boldsymbol{a}(m).$$

Ennek alkalmazásával igazoljuk az exponenciális, trigonometrikus és hiperbolikus függvényekre vonatkozó nevezetes egyenlőségeket!

(*Útmutatás.* Könnyen belátható, hogy minden $r \in]0, R_{\boldsymbol{a}}[$ esetén a

$$K_r := \frac{\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)| r^k}{r^{m+1}}$$

szám olyan, hogy minden $z \in B_r(c; \mathbb{K}) \setminus \{c\}$ pontra fennáll a

$$\left| \frac{P_{\boldsymbol{a},c}(z)}{(z-c)^m} - \boldsymbol{a}(m) \right| \leq K_r |z - c|$$

egyenlőtlenség.)

7. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{x \to 0} log(1+x) = 0$, és ennek alkalmazásával igazoljuk a *log* függvény folytonosságát! Bizonyítsuk be a *log* függvény folytonosságát a Bolzano-tételt és az inverzfüggvény folytonosságának tételét alkalmazva az *exp* függvényre!

8. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1,$$

és ebből igazoljuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

(*Útmutatás.* Legyen $f := \dfrac{log \circ (1 + id_{\mathbb{R}})}{id_{\mathbb{R}}}$. Nyilvánvalóan fennáll az

$$f = \frac{1}{\left(\dfrac{exp - 1}{id_{\mathbb{R}}}\right) \circ (f \cdot id_{\mathbb{R}})}$$

egyenőség, ezért ha f korlátos volna a 0 valamely gömbi környezetén, akkor $\lim\limits_{0}(f \cdot id_{\mathbb{R}}) = 0$ teljesülne, és $0 \notin Dom\left(\dfrac{exp-1}{id_{\mathbb{R}}}\right)$, továbbá $\lim\limits_{0}\left(\dfrac{exp-1}{id_{\mathbb{R}}}\right) = 1$, így a függvénykompozíció határértéktétele szerint

$$\lim_{0}\left(\left(\frac{exp-1}{id_{\mathbb{R}}}\right) \circ (f \cdot id_{\mathbb{R}})\right) = 1,$$

amiből következne, hogy $\lim\limits_{0} f = 1$.

Ha $x \in \mathbb{R}^+$, akkor $exp(x) > 1 + x$, így $x > log(1+x)$, vagyis $f(x) < 1$. Továbbá, ha $x \in]-1/2, 0[$, akkor

$$exp(2x) = 1 + x + x(1+2x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(1 + \frac{2x}{2k+2}\right) < 1 + x,$$

tehát $2x \leq log(1+x)$, vagyis $f(x) \leq 2$. Ugyanakkor minden $x \in Dom(f)$ pontra nyilvánvalóan $f(x) > 0$, ezért $f\langle]-1/2, 1/2[\rangle \subseteq [0, 2]$.

9. (*Raabe-féle konvergenciakritérium.*) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \neq 0$, akkor

$$\liminf_{n\to\infty}\left(n \cdot \left(\left|\frac{\boldsymbol{s}(n)}{\boldsymbol{s}(n+1)}\right| - 1\right)\right) > 1$$

esetén a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens, és

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n \cdot \left(\left|\frac{\boldsymbol{s}(n)}{\boldsymbol{s}(n+1)}\right| - 1\right)\right) < 1$$

esetén a $\sum \boldsymbol{s}$ sor nem abszolút konvergens (de lehet feltételesen konvergens).

(*Útmutatás.* Legyen q olyan valós szám, hogy

$$1 < q < \liminf_{n\to\infty}\left(n \cdot \left(\left|\frac{\boldsymbol{s}(n)}{\boldsymbol{s}(n+1)}\right| - 1\right)\right).$$

Ekkor a $\liminf$ értelmezése alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left|\frac{\boldsymbol{s}(n+1)}{\boldsymbol{s}(n)}\right| < \frac{1}{1+\frac{q}{n}}.$$

Legyen $\alpha \in]1, q[$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$\frac{(n+1)^{\alpha}|\boldsymbol{s}(n+1)|}{n^{\alpha}|\boldsymbol{s}(n)|} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}{1+\frac{q}{n}} = \frac{n + n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right)}{n+q},$$

ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right) = \alpha,$$

tehát $\alpha < q$ miatt létezik olyan $N' \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N'$ természetes számra

$$n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right) < q,$$

következésképpen minden $n > \max(N, N')$ természetes számra

$$\frac{(n+1)^{\alpha}|\boldsymbol{s}(n+1)|}{n^{\alpha}|\boldsymbol{s}(n)|} < \frac{n+n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)}{n+q} < 1.$$

Ez azt jelenti, hogy az $(n^{\alpha}|\boldsymbol{s}(n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $max(N, N')$ indextől kezdve *monoton fogyó*, tehát ez a sorozat *korlátos* is, vagyis vehetünk olyan $C \geq 0$ valós számot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$|\boldsymbol{s}(n)| \leq \frac{C}{n^{\alpha}}.$$

Az $\alpha > 1$ feltétel alapján a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

hiperharmonikus sor konvergens, így a majoráns kritérium szerint a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\left|\frac{\boldsymbol{s}(n)}{\boldsymbol{s}(n+1)}\right|-1\right)\right) < 1$$

esetén létezik olyan $\alpha\in]0,1[$ valós szám és $M \in \mathbb{N}^+$, hogy az $(n^{\alpha}|\boldsymbol{s}(n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az M indextől kezdve *monoton növő*, tehát minden $n \geq M$ esetén a $C := M^{\alpha}|\boldsymbol{s}(M)|$ számra

$$|\boldsymbol{s}(n)| \geq \frac{C}{n^{\alpha}}$$

teljesül. Ekkor az $\alpha < 1$ feltétel alapján a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

hiperharmonikus sor divergens, így a majoráns kritérium szerint a $\sum \boldsymbol{s}$ sor nem abszolút konvergens.

Azonban a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

sor példája mutatja, hogy lehet a $\sum \boldsymbol{s}$ sor feltételesen konvergens úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\left|\frac{\boldsymbol{s}(n)}{\boldsymbol{s}(n+1)}\right|-1\right)\right) < 1$$

teljesül.)

10. A $]0,2]$ intervallumon a *sin* függvény szigorúan pozitív, és a $[0,2]$ intervallumon a *cos* függvény szigorúan monoton fogyó, továbbá $cos(0) = 1$ és $cos(2) < -1/3$. Létezik egyetlen olyan $\pi \in]0,4[$ valós szám, amelyre $cos(\pi/2) = 0$ teljesül (ezt nevezzük *Ludolf-számnak*). A *cos* és *sin* függvények 2π szerint *periodikusak*, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $cos(x+2\pi) = cos(x)$ és $sin(x+2\pi) = sin(x)$. Az *Exp* függvény $2\pi i$ szerint periodikus, vagyis minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $Exp(z + 2\pi i) = Exp(z)$.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)}\right),$$

és nyilvánvaló, hogy minden $x \in]0,\sqrt{6}[$ valós számra és $k \leq n$ természetes számra

$$\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)}\right) > 0.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in]0,\sqrt{6}[$ esetén

$$sin(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)}\right) =$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)}\right) \geq x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > 0,$$

ezért a *sin* függvény szigorúan pozitív a $]0,\sqrt{6}[$ intervallumon, így a $]0,2]$ intervallumon is szigorúan pozitív.

Ha $x, y \in]0,2[$ és $x < y$, akkor $(y+x)/2, (y-x)/2 \in]0,2[$, tehát

$$cos(y) - cos(x) = -2sin\left(\frac{y+x}{2}\right) sin\left(\frac{y-x}{2}\right) < 0,$$

ami azt jelenti, hogy a *cos* függvény szigorúan monoton fogyó a $]0,2[$ intervallumon.

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right),$$

és nyilvánvaló, hogy minden $x \in]0,2\sqrt{3}[$ valós számra és $k \leq n$ természetes számra

$$\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) > 0.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in]0, 2\sqrt{3}[$ esetén

$$cos(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)}\right) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Ebből látható, hogy $cos(2) \leq -1/3$, továbbá világos, hogy $cos(0) = 1$, így a cos függvény folytonossága és a Bolzano-tétel alapján van olyan $p \in]0, 2[$, amelyre $cos(p) = 0$. A cos függvény injektív a $]0, 2[$ intervallumon, ezért ez a $p \in]0, 2[$ szám egyértelműen van meghatározva. Tehát $\pi := 2p$ az egyetlen valós szám, amely a $]0, 4[$ intervallumba esik és $cos(\pi/2) = 0$ teljesül.

Tudjuk, hogy $cos^2(\pi/2) + sin^2(\pi/2) = 1$, ezért $sin(\pi/2) \in \{-1, +1\}$. Azonban a sin függvény pozitív a $]0, 2[$ intervallumon, így $sin(\pi/2) = 1$. Ebből, valamint a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulákból a periodikussági tulajdonságok könnyen levezethetők.)

11. Minden $u \in \mathbb{U}$ (vagyis egységnyi abszolút értékű) komplex számhoz létezik olyan $\theta \in [-\pi, \pi]$ valós szám, hogy $u = Exp(i\theta)$ teljesül. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén van olyan $r \in \mathbb{R}_+$ és $\theta \in [-\pi, \pi]$, hogy $z = r(cos(\theta) + i \cdot sin(\theta))$ (ez a komplex számok *trigonometrikus alakja*).

(*Útmutatás.* Elég az első állítást igazolni, ahhoz pedig elegendő megvizsgálni a sin és cos függvények menetét a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.)

12. Minden *páratlan fokszámú* valós polinomiális függvénynek létezik gyöke.

13. Legyen $\omega : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges abszolútérték-függvény a $\mathbb{Q}$ test felett, és jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát.

a) Ha létezik olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) < 1$, akkor pontosan egy olyan $p \in \mathbb{P}$ létezik, amelyre $\omega(p) < 1$, továbbá ekkor minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számra $\omega(x) = \omega(p)^{\nu_p(x)}$ teljesül (II. fejezet, 2. pont, **1**. gyakorlat).

b) Ha minden $p \in \mathbb{P}$ számra $\omega(p) \geq 1$ és ω nem az improprius abszolútérték--függvény, akkor minden $p \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(p) > 1$ teljesül, továbbá bármely két $p, q \in \mathbb{P}$ prímszámra

$$\frac{log(\omega(p))}{log(p)} = \frac{log(\omega(q))}{log(q)};$$

és ha ρ jelöli ezt a hányadost, akkor $\rho \in]0, 1]$ és minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számra $\omega(x) = |x|^\rho$ teljesül.

c) Ha $p \in \mathbb{P}$, $a \in]0, 1[$ és $\rho \in]0, 1]$, akkor a

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \begin{cases} a^{\nu_p(x)} & \text{, ha } x \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{, ha } x = 0; \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \begin{cases} |x|^\rho & \text{, ha } x \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{, ha } x = 0; \end{cases}$$

függvények nem improprius abszolútérték-függvények $\mathbb{Q}$ felett. Ezek közül az első *ultrametrikus*, és minden $\mathbb{Q}$ feletti nem improprius ultrametrikus abszolútérték--függvény ilyen alakú. (Ezzel meghatároztuk az összes $\mathbb{Q}$ feletti abszolútérték-függvényt.)

(*Útmutatás.* (I) Legyen $p \in \mathbb{P}$ olyan, hogy $\omega(p) \leq 1$; megmutatjuk, hogy ekkor minden $q \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(q) \leq 1$. Legyen $q \in \mathbb{P}$ rögzített. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\sigma(n)$ az a természetes szám, amelyre $p^{\sigma(n)} \leq q^n < p^{\sigma(n)+1}$, továbbá legyen $(a_n(k))_{0 \leq k \leq \sigma(n)}$ az az $\mathbb{N}$-ben haladó rendszer, amelyre $0 \leq k \leq \sigma(n)$ esetén $0 \leq a_n(k) < p$ és

$$q^n = \sum_{k=0}^{\sigma(n)} a_n(k) p^k$$

teljesül (ez a q^n szám előállítása a p alapú számrendszerben). Legyen $C := \max\limits_{0 \leq m < p} \omega(m)$; ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\omega(q))^n = \omega(q^n) \leq \sum_{k=0}^{\sigma(n)} \omega(a_n(k))(\omega(p))^k \leq C \cdot (\sigma(n) + 1),$$

továbbá a $\sigma(n)$ definíciója szerint

$$\sigma(n) \leq n \frac{log(q)}{log(p)} \leq \sigma(n) + 1,$$

amiből következik, hogy

$$\omega(q) \leq \lim_{n \to \infty} C^{1/n} (\sigma(n) + 1)^{1/n} = 1.$$

Ha $n \in \mathbb{Z}$ és $n \neq 0$, akkor van olyan $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, hogy

$$n = \varepsilon \cdot \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)}$$

(II. fejezet, 2. pont, **1**. gyakorlat), továbbá ekkor minden $q \in \mathbb{P}$ esetén $\nu_q(n) \geq 0$, ezért

$$\omega(n) = \prod_{q \in \mathbb{P}} (\omega(q))^{\nu_q(n)} \leq 1.$$

Tehát beláttuk, hogy ha van olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) < 1$, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ számra $\omega(n) \leq 1$ teljesül.

(II) Tegyük fel, hogy $p, q \in \mathbb{P}$ olyanok, amelyekre $q \neq q$ és $\omega(p) < 1$, valamint $\omega(q) < 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén p^n és q^n relatív prímek, így léteznek olyan $a, b \in \mathbb{Z}$, hogy $ap^n + bq^n = 1$, tehát az (I) alapján

$$1 = \omega(1) \leq \omega(a)\omega(p)^n + \omega(b)\omega(q)^n \leq \omega(p)^n + \omega(q)^n.$$

Ugyanakkor $\omega(p) < 1$ és $\omega(q) < 1$, így $(\omega(p)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\omega(q)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatok, ami az előző egyenlőtlenség miatt lehetetlen. Ezért *legfeljebb egy* olyan $p \in \mathbb{P}$ létezhet, amelyre $\omega(p) < 1$.

(III) Ha létezik olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) < 1$, akkor az (I) és (II) alapján egyetlen ilyen $p \in \mathbb{P}$ létezik, és minden $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$ számra $\omega(q) = 1$, ezért ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, és $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ olyan, hogy

$$x = \varepsilon \cdot \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)},$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\omega(x) = \prod_{q \in \mathbb{P}} \omega(q)^{\nu_q(n)} = \omega(p)^{\nu_p(n)},$$

amivel a)-t igazoltuk.

(IV) Most tegyük fel, hogy minden $p \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(p) \geq 1$. Ha van olyan $p \in \mathbb{P}$, hogy $\omega(p) = 1$, akkor az (I) alapján minden $q \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(q) = 1$ teljesül, amiből következik, hogy ω az improprius abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett. Ha tehát feltesszük, hogy ω nem az improprius abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett, akkor minden $p \in \mathbb{P}$ esetén $\omega(p) > 1$. Legyen $p, q \in \mathbb{P}$ rögzítettek. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ismét vegyük a q^n szám előállítását a p alapú számrendszerben, tehát legyen $\sigma(n)$ az a természetes szám, amelyre $p^{\sigma(n)} \leq q^n < p^{\sigma(n)+1}$, továbbá legyen $(a_n(k))_{0 \leq k \leq \sigma(n)}$ az az $\mathbb{N}$-ben haladó rendszer, amelyre $0 \leq k \leq \sigma(n)$ esetén $0 \leq a_n(k) < p$ és

$$q^n = \sum_{k=0}^{\sigma(n)} a_n(k) p^k$$

teljesül. Legyen ismét $C := \max\limits_{0 \leq m < p} \omega(m)$; ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\omega(q)^n = \omega(q^n) \leq \sum_{k=0}^{\sigma(n)} \omega(a_n(k)) \omega(p)^k \leq C \cdot \frac{\omega(p)^{\sigma(n)+1} - 1}{\omega(p) - 1} \leq \frac{C \cdot \omega(p)}{\omega(p) - 1} \cdot \omega(p)^{\sigma(n)},$$

tehát

$$\omega(q) \leq \left(\frac{C \cdot \omega(p)}{\omega(p) - 1} \right)^{1/n} \cdot \omega(p)^{\sigma(n)/n}.$$

Továbbá, a $\sigma(n)$ definíciója szerint $\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{log(q)}{log(p)}$, amiből $\omega(p) > 1$ miatt következik, hogy

$$\omega(q) \leq \left(\frac{C \cdot \omega(p)}{\omega(p) - 1} \right)^{1/n} \cdot \omega(p)^{log(q)/log(p)}.$$

Ebből határátmenettel kapjuk, hogy

$$\omega(q) \leq \omega(p)^{log(q)/log(p)}.$$

Ez *bármely két* p és q prímszámra igaz, ezért a p és q felcserélésével kapjuk, hogy

$$\omega(p) \leq \omega(q)^{log(p)/log(q)}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $p, q \in \mathbb{P}$ esetén

$$\frac{log(\omega(p))}{log(p)} = \frac{log(\omega(q))}{log(q)},$$

tehát ha ρ jelöli ezt a hányadost, akkor minden p prímszámra $\omega(p) = p^\rho$. Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, és $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ olyan, hogy

$$x = \varepsilon \cdot \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)},$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\omega(x) = \prod_{q \in \mathbb{P}} \omega(q)^{\nu_q(n)} = \prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\rho \nu_q(n)} = \left(\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{\nu_q(n)} \right)^\rho = |x|^\rho,$$

ahol $|\cdot|$ az euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett. Ugyanakkor

$$2 = \omega(1) + \omega(1) \geq \omega(1+1) = \omega(2) = 2^\rho,$$

ezért $\rho \in]0, 1]$. Ezzel b)-t igazoltuk.

(V) Legyen most $p \in \mathbb{P}$, $a \in]0, 1[$, $\rho \in]0, 1]$, és

- $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amely 0-hoz 0-t rendel, és minden $x \in \mathbb{Q}^+$ számra $\omega_{a,p}(x) := a^{\nu_p(x)}$;

- $\omega_\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amely 0-hoz 0-t rendel, és minden $x \in \mathbb{Q}^+$ számra $\omega_\rho(x) := |x|^\rho$, ahol $|\cdot|$ az euklidészi abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett.

Megmutatjuk, hogy az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ és $\omega_\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvények olyan abszolútérték-függvények $\mathbb{Q}$ felett, hogy $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ ultrametikus és $\omega_\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ nem ultrametrikus.

Valóban, az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ és $\omega_\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvények $\mathbb{Q}^+$-ra vett leszűkítései $exp \circ h$ alakúak, ahol a $h : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy minden $x, y \in \mathbb{Q}^+$ esetén $h(xy) = h(x) + h(y)$. Ezért az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ és $\omega_\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvényekre (VA_{II}) teljesül.

Az $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvényre (VA_{III}) teljesül, mert $x, y \in \mathbb{Q}^+$ és $x + y \in \mathbb{Q}^+$ esetén $\nu_p(x+y) \geq \min(\nu_p(x), \nu_p(y))$, ezért $a \in]0, 1[$ miatt $\nu_p(x+y) \cdot log(a) \leq \max(\nu_p(x) \cdot log(a), \nu_p(y) \cdot log(a))$, tehát

$$\omega_{a,p}(x+y) := exp(\nu_p(x+y) \cdot log(a)) \leq \max(\omega_{a,p}(x), \omega_{a,p}(y)) \leq \omega_{a,p}(x) + \omega_{a,p}(y).$$

Ez azt jelenti, hogy $\omega_{a,p} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ ultrametrikus abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett.

Az $\omega_\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ függvényre (VA_{III}) teljesül, mert $\rho \in]0, 1]$ miatt $x, y \in \mathbb{Q}^+$ és $x + y \in \mathbb{Q}^+$ esetén

$$\omega_\rho(x+y) = |x+y|^\rho \leq (|x| + |y|)^\rho \leq |x|^\rho + |y|^\rho = \omega_\rho(x) + \omega_\rho(y),$$

hiszen ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, akkor $\alpha/(\alpha+\beta) \in [0, 1]$ és $\beta/(\alpha+\beta) \in [0, 1]$, így

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^\rho, \quad \frac{\beta}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^\rho,$$

és ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva

$$1 \leq \frac{\alpha^\rho + \beta^\rho}{(\alpha+\beta)^\rho}$$

adódik. Ezért az $\omega_\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ is abszolútérték-függvény $\mathbb{Q}$ felett, és ez nem ultrametrikus, mert $\omega_\rho(1+1) = \omega_\rho(2) = 2^\rho > 1 = max(\omega_\rho(1), \omega_\rho(1))$, hiszen $\rho > 0$.)

14. Ha $a \in \mathbb{R}$ és $f : [a, \to [\to \mathbb{R}$ folytonos függvény, továbbá $\lim\limits_{+\infty} f$ létezik, akkor f egyenletesen folytonos.

15. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos, monoton és folytonos függvény, akkor f egyenletesen folytonos.

16. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ folytonos függvény, Az f pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha $\lim\limits_a f$ és $\lim\limits_b f$ létezik.

17. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény olyan, hogy $Dom(f)$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, és minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban létezik f-nek határértéke és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = 0$. Ekkor az $\{x \in Dom(f) | f(x) \neq 0\}$ halmaz *megszámlálható.*

(*Útmutatás.* Könnyen belátható, hogy minden $K \subseteq Dom(f)$ korlátos és zárt halmazra és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra az $\{x \in K | |f(x)| \geq \varepsilon\}$ halmaz véges.)

18. Minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számhoz egyértelműen léteznek olyan $p(x) \in \mathbb{Z}$ és $q(x) \in \mathbb{N}^+$ számok, hogy $x = p(x)/q(x)$, továbbá $p(x)$ és $q(x)$ relatív prímek. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1/q(x) & \text{, ha } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{, ha } x = 0 \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(Ezt nevezzük *Riemann-függvénynek.*) Az f függvény reguláris és minden irracionális pontban folytonos, és minden $\mathfrak{a}$ racionális pontban szakadása van úgy, hogy létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = 0$ teljesül.

(*Útmutatás.* Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, továbbá $C > 0$ tetszőleges valós szám. Megmutatjuk, hogy az $\{x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} | (a \leq x \leq b) \wedge (q(x) \leq C)\}$ halmaz *véges.* Valóban, ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a \leq x = p(x)/q(x) \leq b$ és $q(x) \leq C$, akkor

$$-|a| \cdot C \leq -|a| \cdot q(x) \leq a \cdot q(x) \leq p(x) \leq b \cdot q(x) \leq |b| \cdot q(x) \leq |b| \cdot C,$$

ami azt jelenti, hogy $\{x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} | (a \leq x \leq b) \wedge (q(x) \leq C)\} \subseteq \{m/n | (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{N}^+) \wedge (m \in [-|a|C, |b|C]) \wedge (n \leq C)\}$, és a jobb oldalon álló halmaz nyilvánvalóan véges.

Legyen most $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az előzőek szerint az

$$E := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} | (|x - \mathfrak{a}| \leq 1) \wedge (q(x) \leq 1/\varepsilon)\}$$

halmaz véges, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\delta < 1$ és $E \cap (]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}) = \emptyset$. Ha $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor $x \neq 0$, és ha x racionális, akkor $x \notin E$ miatt $q(x) > 1/\varepsilon$, azaz $f(x) \in] - \varepsilon, \varepsilon[$. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = 0$.)

19. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmaza kontinuum-számosságú, míg az összes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{R})$-rel.

(*Útmutatás.* A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű $\mathbb{R}$-ben, ezért ha $\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ jelöli az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát, akkor az átviteli elv alapján a $\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{Q};\mathbb{R})$; $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ leképezés *injektív*, ezért $\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ kisebb-egyenlő számosságú $\mathscr{F}(\mathbb{Q};\mathbb{R})$-nél. Ugyanakkor $\mathbb{Q}$ ekvipotens $\mathbb{N}$-nel és $\mathbb{R}$ ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-rel, ezért $\mathscr{F}(\mathbb{Q};\mathbb{R})$ ekvipotens $\mathscr{F}(\mathbb{N};\mathscr{P}(\mathbb{N}))$-nel, és a I. fejezet, 3. pont, **24**. gyakorlat szerint $\mathscr{F}(\mathbb{N};\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ ekvipotens $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-nel, vagyis ekvipotens $\mathbb{R}$-rel.)

20. Minden $z \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$\binom{z}{k} := \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(z-j),$$

továbbá legyen:

$$\binom{z}{0} := 1.$$

Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{z}{k}$$

sor $\mathfrak{Re}(z) > 0$ esetén abszolút konvergens, és $\mathfrak{Re}(z) < 0$ esetén nem abszolút konvergens.

(*Útmutatás.* Mutassuk meg, hogy ha $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{\left|\binom{z}{k}\right|}{\left|\binom{z}{k+1}\right|} - 1\right) = 1 + \mathfrak{Re}(z),$$

és alkalmazzuk a Raabe-kritériumot!)

21. Tekintsük azt az $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $x \in Dom(f)$ esetén

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{, ha } -1 \le x < 0, \\ 1-x & \text{, ha } \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Ekkor f folytonos injekció, és $Im(f) = [-1,1[$, továbbá $f^{-1} : [-1,1[\to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $y \in Dom(f^{-1})$ esetén:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{, ha } -1 \le y < 0, \\ 1-y & \text{, ha } \quad 0 \le y < 1, \end{cases}$$

tehát f^{-1} nem folytonos a 0 pontban. (Természetesen $Dom(f)$ korlátos, de *nem zárt* halmaz.)

22. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

a) Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor létezik az f-nek jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ *vagy* létezik az f-nek baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$.

b) Ha létezik az f-nek jobboldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban, *és* létezik az f-nek baloldali határértéke $\mathfrak{a}$-ban, *és* $\lim\limits_{\mathfrak{a}-0} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}+0} f$, akkor f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban.

2. Differenciálható függvények

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f{:}\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvény *differenciálható* az $\mathfrak{a}\in\mathbb{K}$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, és létezik olyan $c\in\mathbb{K}$, amelyre

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-c\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}=0.$$

Az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli *deriváltjának* nevezünk minden olyan $c\in\mathbb{K}$ számot, amelyre a fenti határérték-tulajdonság teljesül.

Állítás. Ha $\mathfrak{a}\in\mathbb{K}$ belső pontja az $f{:}\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvény definíciós tartományának, akkor *legfeljebb egy* olyan $c\in\mathbb{K}$ szám létezik, amelyre

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-c\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}=0$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyenek $c,c'\in\mathbb{K}$ olyan elemek, hogy

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-c\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}=0=\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-c'\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}.$$

Ebből kivonással kapjuk, hogy

$$0=\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-c\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}-\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-c'\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\mathfrak{a}}(c'-c)\cdot\left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}\right)$$

Ha $c\neq c'$ teljesülne, akkor ebből az $1/(c'-c)$ számmal való szorzással következne, hogy

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}\right)=0,$$

ami lehetetlen, különben

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left|\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}\right|=0$$

is igaz volna, pedig ez a határérték nyilvánvalóan 1. ■

Definíció. Ha az $f:\mathbb{K}\rightarrowtail\mathbb{K}$ függvény differenciálható a $\mathfrak{a}\in\mathbb{K}$ pontban, akkor az f *deriváltjának* nevezzük és a $(Df)(\mathfrak{a})$ szimbólummal jelöljük azt az elemet $\mathbb{K}$-ban, amelyre

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})-(Df)(\mathfrak{a})\cdot(x-\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|}=0$$

teljesül.

Állítás. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek. Az f pontosan akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha létezik a

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}}$$

határérték. Ha f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor

$$(Df)(\mathfrak{a}) = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha $c \in \mathbb{K}$, akkor $x \in Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\left| \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} \right| = \left| \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}} - c \right|.$$

Ebből azonnal következik az állítás, ha figyelembe vesszük azt, hogy ha $g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(g)$-nek, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathfrak{a}} |g| = 0$$

teljesül. ■

Definíció. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, akkor az

$$Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}}$$

függvényt az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli *különbségihányados-függvényének* vagy *differenciahányados-függvényének* nevezzük.

Definíció. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor az f *deriváltfüggvényének* nevezzük és Df-fel jelöljük azt a $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt, amelyre $Dom(Df)$ azon pontok halmaza, ahol f differenciálható, és minden $\mathfrak{a} \in Dom(Df)$ esetén $(Df)(\mathfrak{a})$ az f deriváltja az $\mathfrak{a}$ pontban. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény *differenciálható*, ha $Dom(Df) = Dom(f)$, vagyis f a definíciós tartományának minden pontjában differenciálható.

Állítás. Ha az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatósága miatt létezik olyan $\eta > 0$ valós szám, amelyre minden $x \in B_\eta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \cap (Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\})$ esetén

$$\left| \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} \right| < \varepsilon.$$

Ekkor minden $x \in B_\eta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \cap Dom(f)$ pontra

$$|f(x) - f(\mathfrak{a})| \leq (\varepsilon + |(Df)(\mathfrak{a})|) \cdot |x - \mathfrak{a}|,$$

tehát ha $\delta > 0$ olyan valós szám, hogy $\delta \leq \min\left(\eta, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+|(Df)(\mathfrak{a})|}\right)$, akkor minden $x \in B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \cap Dom(f)$ pontra $|f(x) - f(\mathfrak{a})| < \varepsilon$, vagyis $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};\mathbb{K})\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});\mathbb{K})$. Ez azt jelenti, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Természetesen folytonos függvény nem szükségképpen differenciálható. Létezik olyan függvény, amely nyílt halmazon értelmezett, folytonos és sehol sem differenciálható (V. fejezet, 11. pont, **14**. gyakorlat).

Állítás. (*A differenciálhatóság lokalitása.*) Ha $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ és létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$ és $f = g$ a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{K})$ halmazon, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$-beli differenciálhatósága ekvivalens a g függvény $\mathfrak{a}$-beli differenciálhatóságával, és ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(Df)(\mathfrak{a}) = (Dg)(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor az r szám tulajdonságai miatt minden $x \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{K}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra

$$\frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = \frac{g(x) - g(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|},$$

és a baloldali függvénynek 0 a határértéke, így a határérték lokalitása miatt

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{g(x) - g(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = 0,$$

vagyis g differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és $(Dg)(\mathfrak{a}) = (Df)(\mathfrak{a})$. Ebből az f és g felcserélésével nyerjük, hogy ha g differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor f is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban. ■

Állítás. Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda \cdot f$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(\lambda \cdot f))(\mathfrak{a}) = \lambda \cdot (Df)(\mathfrak{a}).$$

Ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f + g$ és $f \cdot g$ is differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(f + g))(\mathfrak{a}) = (Df)(\mathfrak{a}) + (Dg)(\mathfrak{a}),$$
$$(D(f \cdot g))(\mathfrak{a}) = (Df)(\mathfrak{a}) \cdot g(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{a}) \cdot (Dg)(\mathfrak{a}).$$

Ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, és $g(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és

$$\left(D\left(\frac{f}{g}\right)\right)(\mathfrak{a}) = \frac{(Df)(\mathfrak{a}) \cdot g(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{a}) \cdot (Dg)(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})^2}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$ és $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}} = \frac{f(x) - f(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}} + \frac{g(x) - g(\mathfrak{a})}{x - \mathfrak{a}},$$

ezért ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f+g$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(f+g))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} =$$
$$= \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} + \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = (Df)(\mathfrak{a}) + (Dg)(\mathfrak{a}).$$

Ha $x \in Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor

$$\frac{(\lambda\cdot f)(x)-(\lambda\cdot f)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \lambda\cdot\left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right),$$

ezért ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda\cdot f$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(\lambda\cdot f))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \lambda\cdot\left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right) = \lambda\cdot\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \lambda\cdot(Df)(\mathfrak{a})$$

Ha $x \in Dom(f)\cap Dom(g)$ és $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right)\cdot g(x) + f(\mathfrak{a})\cdot\left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right),$$

ezért ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f\cdot g$ is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(f\cdot g))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} =$$
$$= \lim_{x\to\mathfrak{a}} \left(\left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right)\cdot g(x)\right) + f(\mathfrak{a})\cdot\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right) =$$
$$= (Df)(\mathfrak{a})\cdot g(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{a})\cdot(Dg)(\mathfrak{a}),$$

ahol kihasználtuk azt, hogy g folytonos is az $\mathfrak{a}$ pontban.
Ha $x \in Dom(f/g)$ és $x \neq \mathfrak{a}$, akkor

$$\frac{(f/g)(x)-(f/g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} = \left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right)\cdot\frac{1}{g(x)} - \frac{f(\mathfrak{a})}{g(x)g(\mathfrak{a})}\cdot\left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right),$$

ezért ha f és g differenciálhatók $\mathfrak{a}$-ban, akkor f/g is differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(f/g))(\mathfrak{a}) = \lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{(f/g)(x)-(f/g)(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}} =$$
$$\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left(\frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right)\cdot\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{g(x)}\right) - \left(\frac{f(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})}\right)\cdot\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{g(x)}\right)\cdot\lim_{x\to\mathfrak{a}}\left(\frac{g(x)-g(\mathfrak{a})}{x-\mathfrak{a}}\right) =$$
$$(Df)(\mathfrak{a})\cdot\left(\frac{1}{g(\mathfrak{a})}\right) - \left(\frac{f(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})}\right)\cdot\left(\frac{1}{g(\mathfrak{a})}\right)\cdot(Dg)(\mathfrak{a}) = \frac{(Df)(\mathfrak{a})\cdot g(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{a})\cdot(Dg)(\mathfrak{a})}{g(\mathfrak{a})^2},$$

ahol felhasználtuk azt, hogy g folytonos is az $\mathfrak{a}$ pontban és $g(\mathfrak{a}) \neq 0$. ■

Állítás. (*A függvénykompozíció differenciálása.*) Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(g \circ f))(\mathfrak{a}) = (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (Df)(\mathfrak{a}).$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(g \circ f)$-nek. A g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $Dom(g)$-nek, így vehetünk olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $B_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) \subseteq Dom(g)$. Az f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, tehát folytonos is ebben a pontban, így van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre $f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq B_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$. Világos, hogy ekkor $B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \subseteq Dom(g \circ f)$ teljesül, vagyis $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(g \circ f)$-nek.

Most vezessük be azt a

$$h : Dom(g \circ f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{K}$$

függvényt, amelyre minden $x \in Dom(h)$ esetén

$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(\mathfrak{a}))}{f(x) - f(\mathfrak{a})} & \text{, ha } f(x) \neq f(\mathfrak{a}) \\ (Dg)(f(\mathfrak{a})) & \text{, ha } f(x) = f(\mathfrak{a}). \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll a

$$\frac{g \circ f - (g \circ f)(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}} = h \cdot \left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}} \right)$$

függvény-egyenlőség, ezért a $g \circ f$ függvény pontosan akkor differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, ha a jobb oldalon álló függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. A hipotézis szerint f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, így az

$$\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban és az egyenlő $(Df)(\mathfrak{a})$-val. Ezért a $g \circ f$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatóságához *elégséges* az, ha létezik h-nak határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Továbbá, ha létezik h-nak határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor a függvényszorzat határérték-tétele alapján

$$(D(g \circ f))(\mathfrak{a}) = \lim_{\mathfrak{a}} \left(\frac{g \circ f - (g \circ f)(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a}} \right) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} h \right) \cdot (Df)(\mathfrak{a})$$

is teljesül.

Tehát elég azt igazolni, hogy létezik h-nak határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és az egyenlő $(Dg)(f(\mathfrak{a}))$-val. Ehhez a határértékekre vonatkozó átviteli elvet fogjuk alkalmazni. Legyen tehát $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(h)$-ban haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál. (Mivel $\mathfrak{a} \notin Dom(h)$, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \neq \mathfrak{a}$.) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges; olyan $N \in \mathbb{N}$ számot keresünk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $|h(\boldsymbol{s}(n)) - (Dg)(f(\mathfrak{a}))| < \varepsilon$. A hipotézis szerint a g függvény differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre minden $y \in B_\delta(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) \setminus \{f(\mathfrak{a})\}$ esetén

$$\left| \frac{g(y) - g(f(\mathfrak{a}))}{y - f(\mathfrak{a})} - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \right| < \varepsilon$$

teljesül. Az $\boldsymbol{s}$ sorozat $Dom(f)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, továbbá f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergál $f(\mathfrak{a})$-hoz. Ezért vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$, akkor $|f(\boldsymbol{s}(n)) - f(\mathfrak{a})| < \delta$, vagyis $f(\boldsymbol{s}(n)) \in B_\delta(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor

– $f(\boldsymbol{s}(n)) \neq f(\mathfrak{a})$ esetén $f(\boldsymbol{s}(n)) \in B_\delta(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) \setminus \{f(\mathfrak{a})\}$, tehát a δ szám és a h definíciója szerint

$$|h(\boldsymbol{s}(n)) - (Dg)(f(\mathfrak{a}))| := \left| \frac{g(f(\boldsymbol{s}(n))) - g(f(\mathfrak{a}))}{f(\boldsymbol{s}(n)) - f(\mathfrak{a})} - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \right| < \varepsilon;$$

– $f(\boldsymbol{s}(n)) = f(\mathfrak{a})$ esetén szintén a h definíciója szerint

$$|h(\boldsymbol{s}(n)) - (Dg)(f(\mathfrak{a}))| := 0 < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $h \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergál $(Dg)(f(\mathfrak{a}))$-hoz. ■

Állítás. (*Az inverzfüggvény differenciálhatósága és deriváltja.*) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Ha f az $\mathfrak{a} \in I$ pontban differenciálható és $(Df)(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor az $f^{-1} : Im(f) \to \mathbb{R}$ inverzfüggvény differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, és fennáll a

$$(Df^{-1})(f(\mathfrak{a})) = \frac{1}{(Df)(\mathfrak{a})}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy a feltételek mellett $Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és az f^{-1} függvény folytonos. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{a} \in I$ esetén

$$\frac{f^{-1} - f^{-1}(f(\mathfrak{a}))}{id_{\mathbb{R}} - f(\mathfrak{a})} = \frac{f^{-1} - \mathfrak{a}}{id_{\mathbb{R}} - f(\mathfrak{a})} = \frac{1}{\left(\dfrac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}}$$

teljesül, ezért f^{-1} pontosan akkor differenciálható az $f(\mathfrak{a})$ pontban, ha az

$$\frac{1}{\left(\dfrac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}} \ : \ Im(f) \setminus \{f(\mathfrak{a})\} \to \mathbb{R}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban, továbbá, ha ez a határérték létezik, akkor az egyenlő $(Df^{-1})(f(\mathfrak{a}))$-val.

Az f^{-1} függvény folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért f^{-1}-nek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban, és az egyenlő az $f^{-1}(f(\mathfrak{a}))$, vagyis az $\mathfrak{a}$ értékkel. Ez a határérték nem eleme az

$$\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}}$$

differenciahányados-függvény értelmezési tartományának (vagyis $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-nak), és ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban akkor (és csak akkor) ennek a differenciahányados-függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és az egyenlő $(Df)(\mathfrak{a})$-val. A függvénykompozíció határérték-tétele alapján ez azt jelenti, hogy ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban akkor az

$$\left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban és az egyenlő $(Df)(\mathfrak{a})$-val. Ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és még $(Df)(\mathfrak{a}) \neq 0$ is teljesül, akkor a hányadosfüggvények határérték-tétele szerint az

$$\frac{1}{\left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}}\right) \circ f^{-1}}$$

függvénynek létezik határértéke $f(\mathfrak{a})$-ban és az egyenlő $1/(Df)(\mathfrak{a})$-val, és ezt kellet bizonyítani. ■

Az előző állítás ekvivalens megfogalmazása az, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény, továbbá $y \in Im(f)$ olyan pont, hogy f differenciálható az $f^{-1}(y)$ pontban és $(Df)(f^{-1}(y)) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható y-ban, és

$$(Df^{-1})(y) = \frac{1}{(Df)(f^{-1}(y))}$$

teljesül.

Később (a VII. fejezet 11. pontjában) sokkal általánosabb típusú függvényekre is igazoljuk az inverzfüggvény differenciálhatóságát.

Definíció. Ha $\boldsymbol{a}$ számsorozat, akkor $d\boldsymbol{a}$ jelöli azt a számsorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(d\boldsymbol{a})(k) := (k+1)\boldsymbol{a}(k+1)$.

Állítás. Legyen $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat és $c \in \mathbb{K}$. Ekkor $R_{\boldsymbol{a}} = R_{d\boldsymbol{a}}$ és a $P_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvény a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmaz minden pontjában differenciálható, és minden $z_0 \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ pontra

$$(DP_{\boldsymbol{a},c})(z_0) = P_{d\boldsymbol{a},c}(z_0).$$

Bizonyítás. Ha $k \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$|(d\boldsymbol{a})(k)|^{1/k} = (k+1)^{1/k}|\boldsymbol{a}(k+1)|^{1/k},$$

és a II. fejezet, 3. pont, **12**. gyakorlat alapján tudjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}(k+1)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} k^{1/k} = 1,$$
$$\limsup_{k\to\infty}|\boldsymbol{a}(k+1)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty}|\boldsymbol{a}(k)|^{1/k},$$

amiből következik, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} |(d\boldsymbol{a})(k)|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k},$$

vagyis $R_{\boldsymbol{a}} = R_{d\boldsymbol{a}}$.

Legyen $z_0 \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ és rögzítsünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $r+|z_0-c| < R_{\boldsymbol{a}}$; ekkor $B_r(z_0;\mathbb{K}) \subseteq B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ és minden $z \in B_r(z_0;\mathbb{K})$ pontra

$$P_{\boldsymbol{a},c}(z) - P_{\boldsymbol{a},c}(z_0) - P_{d\boldsymbol{a},c}(z_0)\cdot(z-z_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z-c)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z_0-c)^k - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\boldsymbol{a}(k+1)(z_0-c)^k\right)\cdot(z-z_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\left((z-c)^k - (z_0-c)^k - k(z_0-c)^{k-1}\cdot(z-z_0)\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z-z_0)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1}\right) = (z-z_0)\cdot\phi_{z_0}(z),$$

ahol bevezettük a

$$\phi_{z_0} : B_r(z_0;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}; \quad z \mapsto \sum_{k=2}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1}\right)$$

függvényjelölést. Az állítás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $\lim\limits_{z\to z_0}\phi_{z_0}(z) = 0$ teljesül. Azt fogjuk megmutatni, hogy létezik olyan $K_r > 0$ valós szám, hogy minden $z \in B_r(z_0;\mathbb{K})$ esetén $|\phi_{z_0}(z)| \le K_r|z-z_0|$. (Megjegyezzük, hogy $\lim\limits_{z\to z_0}\phi_{z_0}(z) = 0$ akkor is teljesülhetne, ha ilyen K_r szám nem létezne, azonban itt ϕ_{z_0} olyan speciális alakú függvény, hogy van ilyen állandó.)

Ha $z \in B_r(z_0;\mathbb{K})$ tetszőleges pont, akkor minden $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$ számra a binomiális tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{k-1}(z-c)^j(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{j-m}\right)(z_0-c)^{k-1-j} - k(z_0-c)^{k-1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1}\left(\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m}(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-1-m}\right) - k(z_0-c)^{k-1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1}\left(\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m}\right)(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-1-m} - k(z_0-c)^{k-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1}\left(\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m}\right)(z-z_0)^m(z_0-c)^{k-1-m}.$$

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $k, m \in \mathbb{N}$ számra, ha $k \geq m+1$, akkor

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \leq (k-m)\binom{k-1}{m} \leq k\binom{k-1}{m},$$

továbbá $k, m \in \mathbb{N}$ és $k \geq m+2$ esetén

$$\binom{k-1}{m+1} = \left(\frac{k-1}{m+1}\right)\binom{k-2}{m} \leq k\binom{k-2}{m}.$$

Ezért minden $z \in B_r(z_0; \mathbb{K})$ pontra és $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ számra

$$\sum_{m=1}^{k-1}\left(\sum_{j=m}^{k-1}\binom{j}{m}\right)|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-1-m} \leq k\sum_{m=1}^{k-1}\binom{k-1}{m}|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-1-m} =$$

$$= |z-z_0|k\sum_{m=0}^{k-2}\binom{k-1}{m+1}|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-2-m} \leq$$

$$\leq |z-z_0|k^2\sum_{m=0}^{k-2}\binom{k-2}{m}|z-z_0|^m|z_0-c|^{k-2-m} =$$

$$= |z-z_0|k^2\left(|z-z_0|+|z_0-c|\right)^{k-2} \leq |z-z_0|k^2\left(r+|z_0-c|\right)^{k-2}.$$

Ebből a következő egyenlőtlenségre jutunk: minden $z \in B_r(z_0; \mathbb{K})$ pontra:

$$|\phi_{z_0}(z)| \leq |z-z_0|\sum_{k=2}^{\infty}|\boldsymbol{a}(k)|k^2\left(r+|z_0-c|\right)^{k-2} = K_r|z-z_0|,$$

ahol nyilvánvalóan

$$K_r := \sum_{k=2}^{\infty}|\boldsymbol{a}(k)|k^2\left(r+|z_0-c|\right)^{k-2},$$

és természetesen ez jól értelmezett valós szám, hiszen $r+|z_0-c| < R_{\boldsymbol{a}}$. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Következmény. A valós és komplex exponenciális, trigonometrikus, valamint hiperbolikus függvények differenciálhatók, továbbá

$$D(Exp) = Exp, \quad D(Sin) = Cos, \quad D(Cos) = -Sin, \quad D(Sh) = Ch, \quad D(Ch) = Sh$$

$$D(exp) = exp, \quad D(sin) = cos, \quad D(cos) = -sin, \quad D(sh) = ch, \quad D(ch) = sh$$

$$D(log) = \frac{1}{id_{\mathbb{R}^+}}$$

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{a}$ jelöli azt a számsorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{a}(k) = \frac{1}{k!}$, akkor könnyen látható, hogy $d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, tehát az előző állítás szerint $D(Exp) = Exp$ és $D(exp) = exp$ teljesül. A többi egyenlőség a definíciók szerint ebből nyilvánvalóan

következik. Az utolsó egyenlőségnél felhasználjuk a *log* definícióját és az inverzfüggvény differenciálhatóságának tételét. ■

Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f-nek *lokális maximuma* (illetve *lokális minimuma*) van az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban, ha létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy minden $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\cap Dom(f)$ pontra $f(x) \leq f(\mathfrak{a})$ (illetve $f(x) \geq f(\mathfrak{a})$). Azt mondjuk, hogy f-nek *szigorú lokális maximuma* (illetve *szigorú lokális minimuma*) van az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban, ha létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy minden $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\cap Dom(f)$ pontra, ha $x \neq \mathfrak{a}$, akkor $f(x) < f(\mathfrak{a})$ (illetve $f(x) > f(\mathfrak{a})$). Azt mondjuk, hogy f-nek *lokális szélsőértéke* (illetve *szigorú lokális szélsőértéke*) van az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban, ha f-nek lokális maximuma vagy lokális minimuma (illetve szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma) van $\mathfrak{a}$-ban.

Állítás. (*A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.*) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$. Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\mathfrak{a}$-ban, és f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(Df)(\mathfrak{a}) = 0$.

Bizonyítás. A feltevés szerint van olyan $r > 0$ valós szám, hogy minden $x \in]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\cap Dom(f)$ pontra $f(x) - f(\mathfrak{a})$ *állandó előjelű.* Ugyanakkor $\mathfrak{a}$ belső pontja is $Dom(f)$-nek, tehát r megválasztható úgy, hogy $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\subseteq Dom(f)$ teljesüljön. Ekkor az $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a}[$ és a $]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + r[$ nyílt intervallumokon az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciahányados-függvénye állandó előjelű, és egymással ellentétes előjelűek. Ezért a differenciahányados-függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli baloldali és jobboldali határértékei ellentétes előjelűek, így $(Df)(\mathfrak{a}) = 0$. ■

A lokális szélsőérték imént megfogalmazott szükséges feltétele *nem elégséges*; ezt jól mutatja az $id^3_{\mathbb{R}}$ függvény, amelynek sehol sincs lokális szélsőértéke, mert szigorúan monoton növő, ugyanakkor $(D(id^3_{\mathbb{R}}))(0) = 0$. Később, a magasabb rendű deriváltak segítségével bebizonyítunk egy feltételt, amely elégséges lesz a *szigorú* lokális szélsőérték létezéséhez.

Állítás. (*Rolle-tétel.*) Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely az $]a, b[$ nyílt intervallum minden pontjában differenciálható, és amelyre $f(a) = f(b)$ teljesül, akkor létezik olyan $c \in]a, b[$ pont, hogy $(Df)(c) = 0$.

Bizonyítás. Ha az f függvény állandó, akkor az $]a, b[$ intervallum *minden* c pontjára $(Df)(c) = 0$ teljesül, ezért feltehető, hogy f nem konstansfüggvény. A Weierstrass-féle maximum-minimum elv alapján léteznek olyan $c_-, c_+ \in [a, b]$ pontok, hogy $f(c_-) = \inf(f\langle[a, b]\rangle)$ és $f(c_+) = \sup(f\langle[a, b]\rangle)$. Ha $c_- = c_+$, akkor $f(c_-) = f(c_+)$, tehát f állandó. Ha $c_- = a$ és $c_+ = b$, vagy $c_- = b$ és $c_+ = a$, akkor $f(a) = f(b)$ miatt ismét $f(c_-) = f(c_+)$ adódik, tehát f állandó. Ezért $c_- \in]a, b[$ vagy $c_+ \in]a, b[$ teljesül, és f-nek lokális szélsőértéke van c_--ban és c_+-ban is, így a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele alapján: ha $c_- \in]a, b[$, akkor $(Df)(c_-) = 0$, és ha $c_+ \in]a, b[$, akkor $(Df)(c_+) = 0$ teljesül. ■

Állítás. (*Cauchy-féle középértéktétel.*) Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre $[a, b] \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$, és f és g az

$[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonos, továbbá az $]a,b[$ intervallum minden pontjában differenciálható. Ekkor létezik olyan $c \in]a,b[$, amelyre

$$(f(b)-f(a))(Dg)(c) = (g(b)-g(a))(Df)(c)$$

teljesül. Ha minden $x \in]a,b[$ pontban $(Dg)(x) \neq 0$, akkor $g(b) \neq g(a)$, és létezik olyan $c \in]a,b[$, amelyre

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{(Df)(c)}{(Dg)(c)}$$

teljesül.

Bizonyítás. Jelölje h az $(f(b)-f(a))\cdot g-(g(b)-g(a))\cdot f$ függvény leszűkítését az $[a,b]$ intervallumra. Ekkor a $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a,b]$ minden pontjában és differenciálható az $]a,b[$ minden pontjában. Továbbá könnyen ellenőrizhető, hogy $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$, ezért a Rolle-tétel alkalmazható h-ra. Tehát létezik olyan $c \in]a,b[$ pont, amelyre $(Dh)(c) = 0$. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy minden $x \in]a,b[$ pontra $(Dh)(x) = (f(b)-f(a))(Dg)(x) - (g(b)-g(a))(Df)(x)$, így a c pontra teljesül az $(f(b)-f(a))(Dg)(c) = (g(b)-g(a))(Df)(c)$ egyenlőség.

Ha minden $x \in]a,b[$ esetén $(Dg)(x) \neq 0$, akkor a Rolle-tétel alapján kapjuk, hogy $g(a) \neq g(b)$, így ha $c \in]a,b[$ olyan pont, hogy $(f(b)-f(a))(Dg)(c) = (g(b)-g(a))(Df)(c)$, akkor ebből egyszerű átrendezéssel nyerjük a

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{(Df)(c)}{(Dg)(c)}$$

egyenlőséget. ■

Állítás. (*Lagrange-féle középértéktétel.*) Legyen $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény és $a,b\in\mathbb{R}$ olyan számok, hogy $a<b$, $[a,b]\subseteq Dom(f)$, és f az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonos és az $]a,b[$ intervallum minden pontjában differenciálható. Ekkor van olyan $c \in]a,b[$, hogy

$$f(b)-f(a) = (Df)(c)(b-a)$$

teljesül.

Bizonyítás. Elég a Cauchy-féle középértéktételt alkalmazni f-re és a $g := id_{\mathbb{R}}$ függvényre, hiszen minden $x \in]a,b[$ pontra $(Dg)(x) = 1$. ■

Állítás. Ha $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény és $I\subseteq Dom(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában f folytonos, és minden x belső pontjában az f differenciálható és $(Df)(x)=0$, akkor f az I intervallumon állandó.

Bizonyítás. Ha I-nek nincs belső pontja, akkor I üres vagy egy elemű halmaz, ezért az állítás triviálisan igaz. Legyen c rögzített belső pontja I-nek. Ha $x\in I$ és $x>c$, akkor $[c,x]\subseteq I$, tehát f a $[c,x]$ intervallum minden pontjában differenciálható, így a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $x_+ \in]c,x[$ pont, hogy $f(x)-f(c) = (Df)(x_+)(x-c) = 0$, azaz $f(x)=f(c)$. Ha $x\in I$ és $x<c$, akkor $[x,c]\subseteq I$, tehát f az $[x,c]$ intervallum minden pontjában differenciálható, így a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $x_- \in]x,c[$

pont, hogy $f(c) - f(x) = (Df)(x_-)(c - x) = 0$, azaz $f(x) = f(c)$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in I$ pontra $f(x) = f(c)$. ■

Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq Dom(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában f folytonos, és minden belső pontjában differenciálható. Ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy az I minden x belső pontjában $|(Df)(x)| \leq C$, akkor minden $a, b \in I$ esetén $|f(b) - f(a)| \leq C \cdot |b - a|$ teljesül.

Bizonyítás. Ha $a, b \in I$ és $a < b$, akkor az f függvény az $[a, b]$ minden pontjában folytonos és az $]a, b[$ minden pontjában differenciálható, így a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $c \in]a, b[$, hogy $f(b) - f(a) = (Df)(c) \cdot (b - a)$; ekkor a hipotézis szerint

$$|f(b) - f(a)| = |(Df)(c)| \cdot |b - a| \leq C \cdot |b - a|$$

is teljesül, hiszen c belső pontja I-nek. ■

Tétel. (*A monotonitás differenciális jellemzése.*) Legyen $f{:}\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény és $I{\subseteq}Dom(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában az f függvény folytonos, és minden belső pontjában differenciálható.

a) Az f pontosan akkor monoton növő (illetve monoton fogyó) az I intervallumon, ha az I minden x belső pontjára $(Df)(x) \geq 0$ (illetve $(Df)(x) \leq 0$).

b) Ha az I minden x belső pontjára $(Df)(x) > 0$ (illetve $(Df)(x) < 0$), akkor f az I intervallumon szigorúan monoton növő (illetve szigorúan monoton fogyó).

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in I$ olyan pontok, hogy $a < b$. Az I halmaz intervallum, így $[a, b] \subseteq I$, tehát f az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonos, és az $]a, b[$ nyílt intervallum részhalmaza az I belsejének, így f az $]a, b[$ minden pontjában differenciálható. Ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $c \in]a, b[$, amelyre $f(b) - f(a) = (Df)(c)(b - a)$. Ez azt mutatja, hogy ha az I minden x belső pontjára $Df(x) \geq 0$ (illetve $(Df)(x) \leq 0$), akkor $f(b) - f(a) \geq 0$ (illetve $f(b) - f(a) \leq 0$), vagyis f az I intervallumon monoton növő (illetve monoton fogyó). Sőt az is látszik, hogy ha az I minden x belső pontjára $Df(x) > 0$ (illetve $(Df)(x) < 0$), akkor $f(b) - f(a) > 0$ (illetve $f(b) - f(a) < 0$), vagyis f az I intervallumon szigorúan monoton növő (illetve szigorúan monoton fogyó). Ezzel igazoltuk b)-t és az a) egyik felét.

Tegyük fel, hogy f az I intervallumon monoton növő (illetve monoton fogyó), és legyen x tetszőleges belső pontja I-nek. Ekkor $x' \in I$ és $x' < x$ esetén $f(x') - f(x) \leq 0$ (illetve $f(x') - f(x) \geq 0$), és $x' - x < 0$, így $(f(x') - f(x))/(x' - x) \geq 0$ (illetve $(f(x') - f(x))/(x' - x) \leq 0$). Ugyanakkor

$$(Df)(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim_{x' \to x - 0} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

ezért $(Df)(x) \geq 0$ (illetve $(Df)(x) \leq 0$) teljesül. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és $I \subseteq Dom(f)$ olyan nyílt intervallum, amelynek minden pontjában az f differenciálható, és f az I intervallumon szigorúan monoton, akkor létezhetnek olyan pontjai I-nek,

amelyekben Df a 0 értéket veszi fel. Erre egyszerű példa az $id_{\mathbb{R}}^3$ függvény, amely differenciálható és szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, de $(D(id_{\mathbb{R}}^3))(0) = 0$.

Következmény. (*A differenciálszámítás első középértéktétele.*) Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények, és $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olyan pontok, amelyekre $[a, b] \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$, és az f és g függvények az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonosak, továbbá az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálhatók. Tegyük fel, hogy m és M olyan valós számok, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén

$$m \cdot (Dg)(x) \leq (Df)(x) \leq M \cdot (Dg)(x)$$

teljesül. Ekkor fennálnak az

$$m \cdot (g(b) - g(a)) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (g(b) - g(a))$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. A hipotézisek alapján az $M \cdot g - f$ és $f - m \cdot g$ függvények $[a, b]$ intervallumra való leszűkítései folytonosak és minden $x \in]a, b[$ esetén differenciálhatók és $(D(M \cdot g - f))(x) \geq 0$, valamint $(D(f - m \cdot g))(x) \geq 0$ teljesül. Ezért a monotonitás differenciális jellemzése alapján az $M \cdot g - f$ és $f - m \cdot g$ függvények mindketten monoton növők az $[a, b]$ intervallumon. Ezért $(M \cdot g - f)(a) \leq (M \cdot g - f)(b)$ és $(f - m \cdot g)(a) \leq (f - m \cdot g)(b)$ teljesül. Ezeket az egyenlőtlenségeket átrendezve kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenségeket. ■

Következmény. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények, és $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olyan pontok, amelyekre $[a, b] \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$, és az f és g függvények az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonosak, továbbá az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálhatók. Ha minden $x \in]a, b[$ esetén

$$|(Df)(x)| \leq (Dg)(x)$$

teljesül, akkor fennáll az

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A differenciálszámítás első középértéktételéből azonnal következik az $m := -1$ és $M := 1$ választással. ■

Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq Dom(f)$ intervallum. Azt mondjuk, hogy f az I intervallumon *konvex*, ha minden $x, x' \in I$ pontra és $\alpha \in [0, 1]$ valós számra

$$f((1 - \alpha)x + \alpha x') \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(x')$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy f az I intervallumon *konkáv*, ha minden $x, x' \in I$ pontra és $\alpha \in [0, 1]$ valós számra

$$f((1 - \alpha)x + \alpha x') \geq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(x')$$

teljesül.

Nyilvánvaló, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq Dom(f)$ intervallum, akkor f pontosan akkor konvex az I halmazon, ha a $-f$ függvény konkáv I-n.

Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq Dom(f)$ intervallum. Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra és minden $(x_k)_{k\in n}$ I-ben haladó rendszerre és minden $(\alpha_k)_{k\in n}$ $[0,1]$-ben haladó rendszerre, ha $\sum\limits_{k\in n} \alpha_k = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k).$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{A}(n)$ azt a kijelentést, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $(x_k)_{k\in n}$ I-ben haladó rendszerre és minden $(\alpha_k)_{k\in n}$ $[0,1]$-ben haladó rendszerre, ha $\sum\limits_{k\in n} \alpha_k = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k).$$

Világos, hogy az $\mathcal{A}(1)$ kijelenetés triviálisan igaz, és $\mathcal{A}(2)$ *ekvivalens* az f függvény I halmazon való konvexitásával. Ezért elég azt igazolni, hogy ha f konvex az I halmazon, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $\mathcal{A}(n)$ teljesül. Ezt n szerinti teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és $\mathcal{A}(n)$ igaz. Legyen $(x_k)_{k\in n+1}$ I-ben haladó rendszer és $(\alpha_k)_{k\in n+1}$ valós számoknak olyan $[0,1]$-ben haladó rendszere, hogy $\sum\limits_{k\in n+1} \alpha_k = 1$. Ha minden $k \in n+1$ esetén $\alpha_k = 0$ vagy $\alpha_k = 1$, akkor triviális, hogy

$$f\left(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k),$$

ezért feltehető, hogy van olyan $k \in n+1$, amelyre $\alpha_k \in]0,1[$. Továbbá az is feltehető, hogy $\alpha_n \in]0,1[$; ez mindig elérhető, ha az $(x_k)_{k\in n+1}$ rendszert alkalmasan választott $n+1 \to n+1$ bijekcióval komponáljuk. Ekkor

$$\left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}\right)_{k\in n}$$

valós számoknak olyan $[0,1]$-ben haladó rendszere, amelyre

$$\sum_{k\in n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} = 1,$$

továbbá $(x_k)_{k\in n}$ I-ben haladó rendszer, így $\mathcal{A}(n)$ (vagyis az indukciós hipotézis) miatt

$$f\left(\sum_{k\in n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} x_k\right) \leq \sum_{k\in n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_n} f(x_k).$$

Ebből az f konvexitása miatt kapjuk, hogy

$$f\left(\sum_{k\in n+1}\alpha_k x_k\right) = f\left((1-\alpha_n)\sum_{k\in n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}x_k + \alpha_n x_n\right) \leq$$
$$\leq (1-\alpha_n)\sum_{k\in n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_n}f(x_k) + \alpha_n f(x_n) = \sum_{k\in n+1}\alpha_k f(x_k),$$

tehát $\mathcal{A}(n+1)$ is igaz. ■

Tétel. (*A konvexitás differenciális jellemzése.*) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq Dom(f)$ olyan intervallum, amelynek minden pontjában az f folytonos és minden belső pontjában differenciálható. Az f pontosan akkor konvex (illetve konkáv) az I intervallumon, ha a Df deriváltfüggvény az I halmaz belsején monoton növő (illetve monoton fogyó).

Bizonyítás. Először feltesszük, hogy f konvex az I intervallumon. Legyenek a és b olyan belső pontjai I-nek, hogy és $a < b$; megmutatjuk, hogy $(Df)(a) \leq (Df)(b)$. Ehhez elegendő volna azt igazolni, hogy minden $x \in]a, b[$ pontra

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b},$$

hiszen ha ez igaz volna, akkor ebből

$$(Df)(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq$$
$$\leq \lim_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = (Df)(b)$$

következne. Ha $x \in]a, b[$, akkor $(x-a)/(b-a) \in [0, 1]$, tehát az f konvexitása miatt

$$f(x) = f\left(\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)a + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)b\right) \leq \left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b),$$

amiből átrendezéssel nyerjük, hogy

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Továbbá, ha $x \in]a, b[$, akkor $(b-x)/(b-a) \in [0, 1]$, tehát az f konvexitása miatt

$$f(x) = f\left(\left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)b + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)a\right) \leq \left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)f(b) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)f(a),$$

amiből átrendezéssel nyerjük, hogy

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy Df az I intervallum belsején monoton növő; megmutatjuk, hogy f konvex az I halmazon. Ehhez azt kell igazolni, hogy ha $a, b \in I$ és $a < b$, akkor minden $x \in [a, b]$ pontra

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b),$$

vagyis a

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

függvényre minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) \leq 0$ teljesül. Ennek bizonyításához először megjegyezzük, hogy g az $[a, b]$ minden pontjában folytonos, és az $]a, b[$ minden pontjában differenciálható, továbbá minden $x \in]a, b[$ pontra

$$(Dg)(x) = (Df)(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

így Dg az $]a, b[$ intervallumon szintén monoton növő. A Weierstrass-féle maximumelv alapján van olyan $c \in [a, b]$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) \leq g(c)$, így elég volna azt igazolni, hogy $g(c) \leq 0$. Ha $c = a$ vagy $c = b$, akkor $g(a) = 0 = g(b)$ miatt ez teljesül, ezért feltehető, hogy $c \in]a, b[$. Ekkor g a c-ben differenciálható, és itt maximuma van, tehát $(Dg)(c) = 0$. A Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $x \in]c, b[$, amelyre $g(b) - g(c) = (Dg)(x)(b - c)$. De Dg monoton növő $]a, b[$-n, ezért $0 = (Dg)(c) \leq (Dg)(x)$, ugyanakkor $g(b) = 0$, ezért $-g(c) \geq 0$.

Az konkáv függvényekre vonatkozó állítás visszavezethető az előzőre, ha f helyére $-f$-t helyettesítünk. ■

Következmény. Az *exp* függvény konvex $\mathbb{R}$-en és a *log* függvény konkáv $\mathbb{R}^+$-on. Minden $p \in \mathbb{R}^+$ számra, az $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^p$ leképezés konvex $\mathbb{R}_+$-n, ha $p \geq 1$, és konkáv $\mathbb{R}_+$-n, ha $p < 1$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $D(exp) = exp$, és az *exp* függvény monoton növő $\mathbb{R}$-en, ezért *exp* az $\mathbb{R}$ intervallumon konvex.

Tudjuk, hogy $D(log) = 1/id_{\mathbb{R}^+}$, és ez a függvény monoton fogyó $\mathbb{R}^+$-on, ezért *log* konkáv az $\mathbb{R}^+$ intevallumon.

Ha $p \in \mathbb{R}^+$, akkor $D(id^p_{\mathbb{R}_+}) = p \cdot id^{p-1}_{\mathbb{R}^+}$, és ez a függvény $p \geq 1$ (illetve $p \leq 1$) esetén monoton növő (illetve fogyó) az $\mathbb{R}^+$ intervallumon, ezért az $id^p_{\mathbb{R}_+}$ függvény konvex (illetve konkáv) az $\mathbb{R}_+$ intervallumon. ■

Állítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{k \in n}$ $\mathbb{R}^+$-ban haladó rendszer, és $(\alpha_k)_{k \in n}$ valós számok olyan rendszere, hogy minden $k \in n$ esetén $\alpha_k \in [0, 1]$ és $\sum_{k \in n} \alpha_k = 1$. Ekkor

$$\prod_{k \in n} x_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k \in n} \alpha_k x_k$$

teljesül. (*A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség általánosítása.*)

Bizonyítás. A hatványozás definíciója, az *exp* függvényre vonatkozó nevezetes függvényegyenlőség, valamint az *exp* függvény konvexitása miatt

$$\prod_{k\in n} x_k^{\alpha_k} := \prod_{k\in n} exp(\alpha_k log(x_k)) = exp\left(\sum_{k\in n} \alpha_k log(x_k)\right) \leq$$
$$\leq \sum_{k\in n} \alpha_k exp(log(x_k)) = \sum_{k\in n} \alpha_k x_k$$

teljesül. ■

Most bemutatjuk az általánosított számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség két nevezetes alkalmazását.

Állítás. (*Elemi Hölder-egyenlőtlenség.*) Legyenek $\alpha, \beta \in [0,1]$ olyan valós számok, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor minden $(x_i)_{i\in I}$ és $(y_i)_{i\in I}$ véges $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszerre

$$\sum_{i\in I} x_i^\alpha y_i^\beta \leq \left(\sum_{i\in I} x_i\right)^\alpha \left(\sum_{i\in I} y_i\right)^\beta$$

teljesül.

Bizonyítás. Természetesen elég arra az esetre bizonyítani, amikor az $X := \sum_{i\in I} x_i$ és $Y := \sum_{i\in I} y_i$ számok mindketten nullánál nagyobbak. Minden $i \in I$ esetén az α és β exponensekre, valamint az x_i/X és y_i/Y számokra felírhatjuk a számtani és mértani közép közötti általánosított egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{x_i}{X}\right)^\alpha \left(\frac{y_i}{Y}\right)^\beta \leq \alpha\left(\frac{x_i}{X}\right) + \beta\left(\frac{y_i}{Y}\right),$$

amiből összegzéssel kapjuk, hogy

$$\frac{\sum_{i\in I} x_i^\alpha y_i^\beta}{X^\alpha Y^\beta} = \sum_{i\in I}\left(\frac{x_i}{X}\right)^\alpha \left(\frac{y_i}{Y}\right)^\beta \leq \frac{\alpha}{X}\sum_{i\in I} x_i + \frac{\beta}{Y}\sum_{i\in I} y_i = \alpha + \beta = 1,$$

amiből átrendezéssel nyerhető a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

Látható, hogy a korábban bizonyított elemi Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség az elemi Hölder-egyenlőtlenségnek az a speciális esete, amikor $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Következmény. (*Elemi Minkowski-egyenlőtlenség*) Legyen $p \geq 1$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden $(x_i)_{i\in I}$ és $(y_i)_{i\in I}$ véges $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszerre

$$\left(\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i\in I} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz akkor, ha $p = 1$ vagy $\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p = 0$, ezért feltesszük, hogy $p > 1$ és $\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p > 0$. Egyszerű átalakítások és az elemi Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk a következő egyenlőtlenséglláncot:

$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p = \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^{p-1}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^{p-1}x_i + \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^{p-1}y_i =$$
$$= \sum_{i\in I}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}(x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i\in I}\left((x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}(y_i^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in I}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in I}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\left(\sum_{i\in I}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

amiből átrendezéssel nyerhető a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

Tétel. (*A megszüntethető szingularitások tétele valós változós függvényekre.*) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ olyan pont, amelyhez létezik $r \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy f differenciálható az $]\mathfrak{a} - r, \mathfrak{a} + r[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ halmaz minden pontjában, és a Df deriváltfüggvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor f differenciálható is $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(Df)(\mathfrak{a}) = \lim_{\mathfrak{a}}(Df)$$

teljesül.

Bizonyítás. Vezessük be a $c := \lim_{\mathfrak{a}}(Df)$ jelölést, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A definíció alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\delta \leq r$ és minden $z \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ esetén $|(Df)(z) - c| \leq \varepsilon$ teljesül.

Legyen $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+\delta[$ tetszőleges. Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért az $f - c(id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a})$ függvény folytonos az $[\mathfrak{a}, x]$ intervallumon, és differenciálható az $]\mathfrak{a}, x[$ intervallumon, így a Lagrange-középértéktétel alapján vehetünk olyan $z \in]\mathfrak{a}, x[$ pontot, amelyre

$$(f(x) - c(x - \mathfrak{a})) - f(\mathfrak{a}) = ((Df)(z) - c)(x - \mathfrak{a})$$

teljesül, tehát $|(Df)(z) - c| \leq \varepsilon$ miatt fennáll az

$$|f(x) - f(\mathfrak{a}) - c(x - \mathfrak{a})| \leq \varepsilon|x - \mathfrak{a}|$$

egyenlőtlenség.

Legyen $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}[$ tetszőleges. Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért az $f - c(id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a})$ függvény folytonos az $[x, \mathfrak{a}]$ intervallumon, és differenciálható az $]x, \mathfrak{a}[$ intervallumon, így a Lagrange-középértéktétel alapján vehetünk olyan $z \in]x, \mathfrak{a}[$ pontot, amelyre

$$f(\mathfrak{a}) - (f(x) - c(x - \mathfrak{a})) = ((Df)(z) - c)(\mathfrak{a} - x)$$

teljesül, tehát $|(Df)(z) - c| \leq \varepsilon$ miatt fennáll az

$$|f(x) - f(\mathfrak{a}) - c(x - \mathfrak{a})| \leq \varepsilon |x - \mathfrak{a}|$$

egyenlőtlenség.

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén $\left| \dfrac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - c(x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} \right| \leq \varepsilon$ teljesül. Tehát f differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban és $(Df)(\mathfrak{a}) = c$. ■

Állítás. Minden $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényhez létezik egyetlen olyan $(D^n f)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, amelyre teljesül az, hogy $D^0 f = f$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$D^{n+1} f = D(D^n f).$$

Bizonyítás. Jelölje E az összes $\mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények halmazát, és jelölje D azt az $E \to E$ függvényt, amely minden $f \in E$ függvényhez a Df deriváltfüggvényt rendeli. Ekkor $f \in E$ esetén az f kezdőpont és D függvény által meghatározott iterációs sorozat éppen az a függvénysorozat, amelynek egyértelmű létezését állítottuk. ■

Definíció. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra az előző állításban értelmezett $D^n f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt az f *n-edik deriváltfüggvényének* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban *n-szer differenciálható* (ahol $n \in \mathbb{N}$), ha $\mathfrak{a} \in Dom(D^n f)$. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban *végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f az $\mathfrak{a}$ pontban n-szer differenciálható.

Nyilvánvaló, hogy egy $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor 1-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban; továbbá világos, hogy $D^1 f = Df$ teljesül. Az is könnyen látható, hogy ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény és $n \in \mathbb{N}$, akkor $Dom(D^{n+1} f) \subseteq Dom(D^n f)$ és lehetséges olyan $n \in \mathbb{N}$ létezése, amelyre $Dom(D^n f) = \emptyset$.

Állítás. Ha $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ és $m, n \in \mathbb{N}$, akkor $D^{m+n} f = D^m(D^n f)$.

Bizonyítás. (I) Először m-szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényre $D^m(Df) = D(D^m f)$ teljesül. Valóban, ha $m = 0$ és $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor a definíció szerint $D^0(Df) := Df =: D(D^0 f)$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $m \in \mathbb{N}$ számra, és legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény. Ekkor a definíció szerint, alkalmazva az indukciós hipotézist a $Df : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényre kapjuk, hogy

$$D^{m+1}(Df) := D(D^m(Df)) = D(D(D^m f)) =: D(D^{m+1} f),$$

vagyis az állítás $m + 1$-re is igaz.

(II) Legyen most $m \in \mathbb{N}$ rögzítve; n-szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényre $D^{m+n} f = D^m(D^n f)$ teljesül. Ha $n = 0$, akkor azt kell igazolni, hogy minden $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényre $D^{m+0} f = D^m(D^0 f)$, ami $D^0 f := f$ miatt nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, és

legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény. Ekkor a definícó, az indukciós hipotézis és az (I) m-re és $D^n f$-re való alkalmazásával

$$D^{m+(n+1)} f := D(D^{m+n} f) = D(D^m(D^n f)) =: D^m(D(D^n f)) =: D^m(D^{n+1} f)$$

adódik, vagyis az állítás $n+1$-re is igaz. ■

Következmény. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$. A következő állítások ekvivalensek.

(i) Az f függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban.

(ii) *Minden* $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ számra a $D^k f$ függvény $n-k$-szor differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban; ekkor $(D^{n-k}(D^k f))(\mathfrak{a}) = (D^n f)(\mathfrak{a})$.

(iii) *Létezik* olyan $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ szám, hogy a $D^k f$ függvény $n-k$-szor differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban; ekkor $(D^{n-k}(D^k f))(\mathfrak{a}) = (D^n f)(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Ha $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, akkor az előző állítás szerint $D^n f = D^{n-k}(D^k f)$, ezért a pontbeli magasabb rendű differenciálhatóság definíciója alapján az állítás nyilvánvaló. ■

Állítás. Ha $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat és $c \in \mathbb{K}$, akkor a $P_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvény *végtelenszer differenciálható* az abszolútkonvergencia-tartományán, és minden $z \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c; \mathbb{K})$ pontra és $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$(D^n P_{\boldsymbol{a},c})(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} (k+j) \right) \boldsymbol{a}(k+n)(z-c)^k.$$

Bizonyítás. A hatványfüggvények differenciálhatóságának tételéből n szerinti teljes indukcióval kapható. ■

Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $I \subseteq Dom(f)$ nyílt intervallum. Ha f az I minden pontjában kétszer differenciálható, akkor f pontosan akkor konvex (illetve konkáv) az I halmazon, ha minden $x \in I$ pontra $(D^2 f)(x) \geq 0$ (illetve $(D^2 f)(x) \leq 0$).

Bizonyítás. A konvexitás és a monotonitás differenciális jellemzéséből nyilvánvalóan következik. ■

Definíció. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható. Ekkor a

$$\mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} (x - \mathfrak{a})^k$$

leképezést az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli n-ed rendű *Taylor-polinomjának* nevezzük.

Állítás. Legyen $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyben az f függvény $n+1$-szer differenciálható. Ekkor

$$D(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)) = \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(Df)$$

teljesül.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy

$$D(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)) := D\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} D((id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} k(id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{(k-1)!}(id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^{k+1} f)(\mathfrak{a})}{k!}(id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k(Df))(\mathfrak{a})}{k!}(id_{\mathbb{K}} - \mathfrak{a})^k =: \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(Df)$$

teljesül. ■

Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}^+$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható. Ekkor

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{|x - \mathfrak{a}|^n} = 0$$

teljesül, vagyis

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x - \mathfrak{a})^k}{|x - \mathfrak{a}|^n} = 0.$$

(*Infinitezimális Taylor-formula.*)

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, akkor a differenciálhatóság és a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a})(x - \mathfrak{a})}{|x - \mathfrak{a}|} = 0$$

teljesül, és nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{T}_{1,\mathfrak{a}}(f) := f(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a})(id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}),$$

így az állítás igaz, ha $n = 1$.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ olyan szám, amelyre teljesül az állítás, és legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény $n+1$-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban. Ekkor a Df függvény n-szer differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$ pontban, így az indukciós hipotézis és az előző állítás alapján

$$0 = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{(Df)(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(Df)(x)}{|x - \mathfrak{a}|^n} = \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{(Df)(x) - D(\mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{|x - \mathfrak{a}|^n} =$$

$$= \lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{|x - \mathfrak{a}|^n}$$

teljesül.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az iménti határérték-egyenlőség alapján vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\subseteq Dom(Df)$, és minden $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\left| \frac{D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)}{|x - \mathfrak{a}|^n} \right| \leq \varepsilon,$$

tehát minden $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[$ esetén

$$|D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)| \leq \varepsilon |x - \mathfrak{a}|^n.$$

Legyen $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + \delta[$. Ekkor az $f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)$ függvény folytonos az $[\mathfrak{a}, x]$ zárt intervallum minden pontjában és differenciálható az $]\mathfrak{a}, x[$ nyílt intervallum minden pontjában, ezért a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]\mathfrak{a}, x[$, amelyre

$$(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x) - (f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) = D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)(x - \mathfrak{a})$$

teljesül. De $(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) = 0$ és

$$|D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)| \leq \varepsilon |z - \mathfrak{a}|^n \leq \varepsilon |x - \mathfrak{a}|^n,$$

amiből következik, hogy

$$|(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)| = |D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)||x - \mathfrak{a}| \leq \varepsilon |x - \mathfrak{a}|^{n+1}.$$

Legyen most $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a}[$. Ekkor az $f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)$ függvény folytonos az $[x, \mathfrak{a}]$ zárt intervallum minden pontjában és differenciálható az $]x, \mathfrak{a}[$ nyílt intervallum minden pontjában, ezért a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]x, \mathfrak{a}[$, amelyre

$$(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) - (f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x) = D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)(\mathfrak{a} - x)$$

teljesül. De $(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(\mathfrak{a}) = 0$ és

$$|D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)| \leq \varepsilon |z - \mathfrak{a}|^n \leq \varepsilon |x - \mathfrak{a}|^n,$$

amiből következik, hogy

$$|(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(x)| = |D(f - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f))(z)||x - \mathfrak{a}| \leq \varepsilon |x - \mathfrak{a}|^{n+1}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]\mathfrak{a} - \delta, \mathfrak{a} + \delta[\setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$\left| \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)(x)}{|x - \mathfrak{a}|^{n+1}} \right| \leq \varepsilon$$

teljesül. Tehát fennáll a

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n+1,\mathfrak{a}}(f)(x)}{|x - \mathfrak{a}|^{n+1}} = 0$$

egyenlőség, vagyis az állítás $n+1$-re is igaz. ■

Tétel. (*A szélsőértékek differenciális jellemzése.*) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}^+$, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ olyan pont, amelyben az f függvény n-szer differenciálható, és minden $0 < k < n$ esetén $(D^k f)(\mathfrak{a}) = 0$, valamint $(D^n f)(\mathfrak{a}) \neq 0$.

a) Ha n páratlan, akkor f-nek *nincs* lokális szélsőértéke $\mathfrak{a}$-ban.

b) Ha n páros, akkor f-nek pontosan akkor van *szigorú lokális maximuma* (illetve *szigorú lokális minimuma*) az $\mathfrak{a}$ pontban pontban, ha $(D^n f)(\mathfrak{a}) < 0$ (illetve $(D^n f)(\mathfrak{a}) > 0$).

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\varphi : Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{f(x) - \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x)}{|x-\mathfrak{a}|^n}.$$

függvényt. A definíció és az $\mathfrak{a}$ pontbeli deriváltakra vonatkozó feltételek alapján minden $x \in Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra

$$f(x) = \mathbf{T}_{n,\mathfrak{a}}(f)(x) + \varphi(x)|x-\mathfrak{a}|^n = f(\mathfrak{a}) + \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!}(x-\mathfrak{a})^n + \varphi(x)|x-\mathfrak{a}|^n$$

teljesül. Az $\mathfrak{a}$ pont belső pontja $Dom(f)$-nek, így vehetünk olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\subseteq Dom(f)$. Ekkor minden $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$f(x) - f(\mathfrak{a}) = \left(\frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!} \left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|} \right)^n + \varphi(x) \right) |x-\mathfrak{a}|^n$$

teljesül. Ebből látszik, hogy az $f - f(\mathfrak{a})$ függvény előjelét az $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ intevallumon (vagyis az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli lokális szélsőértékének létezését is) kizárólag az

$$]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!} \left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|} \right)^n + \varphi(x)$$

függvény előjele szabályozza. Ugyanakkor, az infinitezimális Taylor-formula szerint

$$\lim_{\mathfrak{a}} \varphi = 0,$$

ezért vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $\delta \leq r$ és minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ esetén

$$|\varphi(x)| < \left| \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!} \right|$$

teljesül.

Az a) bizonyításához tegyük fel, hogy n páratlan. Ekkor az

$$]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!} \left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|} \right)^n$$

függvény az $]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+r[$ intervallumon a $(D^n f)(\mathfrak{a})/n!$, és az $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}[$ intervallumon a $-(D^n f)(\mathfrak{a})/n!$ értéket felvevő konstansfüggvény. Ebből következik, hogy az

$$]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!} \left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|} \right)^n + \varphi(x)$$

függvény a $]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+\delta[$ intervallumon és a $]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}[$ intervallumon állandó, és ellentétes előjelű, következésképpen f-nek nincs lokális szélsőértéke $\mathfrak{a}$-ban.

A b) bizonyításához tegyük fel, hogy n páros. Ekkor az

$$]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!}\left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}\right)^n$$

függvény a $(D^n f)(\mathfrak{a})/n!$ értékű konstansfüggvény az $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ halmazon. Ebből következik, hogy az

$$]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!}\left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}\right)^n + \varphi(x)$$

függvény az $]\mathfrak{a}-\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ halmazon állandó előjelű, tehát f-nek szigorú lokális szélsőértéke van $\mathfrak{a}$-ban.

Pontosabban; ha $(D^n f)(\mathfrak{a}) < 0$ (illetve $(D^n f)(\mathfrak{a}) > 0$), akkor az

$$]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[\setminus\{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!}\left(\frac{x-\mathfrak{a}}{|x-\mathfrak{a}|}\right)^n + \varphi(x)$$

függvény az $]\mathfrak{a}, -\delta, \mathfrak{a}+\delta[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ halmazon szigorúan negatív (illetve szigorúan pozitív), így f-nek szigorú lokális maximuma (illetve szigorú lokális minimuma) van az $\mathfrak{a}$ pontban.

Megfordítva; ha f-nek szigorú lokális maximuma (illetve szigorú lokális minimuma) van az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor vehetünk olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $\delta' \leq \delta$ és minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta', \mathfrak{a}+\delta'[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ esetén $f(x)-f(\mathfrak{a}) < 0$ (illetve $f(x)-f(\mathfrak{a}) < 0$). Ekkor minden $x \in]\mathfrak{a}-\delta', \mathfrak{a}+\delta'[\setminus\{\mathfrak{a}\}$ pontban

$$\frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!}+\varphi(x) = \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|^n} < 0 \quad \left(\text{illetve } \frac{(D^n f)(\mathfrak{a})}{n!}+\varphi(x) = \frac{f(x)-f(\mathfrak{a})}{|x-\mathfrak{a}|^n} > 0\right),$$

amiből $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \varphi = 0$ és $(D^n f)(\mathfrak{a}) \neq 0$ alapján $(D^n f)(\mathfrak{a}) < 0$ (illetve $(D^n f)(\mathfrak{a}) > 0$) következik. ■

Lemma. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$ és $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olyan pontok, hogy $[a, b] \subseteq Dom(f)$. Tegyük fel, hogy

- az f függvény n-szer differenciálható az $[a, b]$ minden pontjában, és $D^n f$ folytonos az $[a, b]$ minden pontjában;
- az f függvény $n+1$-szer differenciálható az $]a, b[$ minden pontjában.

Ekkor léteznek olyan $c_+, c_- \in]a, b[$ pontok, amelyekre teljesülnek az

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(D^{n+1} f)(c_+)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(b)}{k!}(a-b)^k + \frac{(D^{n+1} f)(c_-)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra értelmezzük a g_α függvényt a következő módon:

$$[a,b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(x)}{k!}(b-x)^k - \alpha(b-x)^{n+1}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a g_α függvény az $[a,b]$ minden pontjában folytonos, és az $]a,b[$ intervallum minden pontjában differenciálható. Világos az is, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ számra $g_\alpha(b) = 0$, továbbá létezik egyetlen olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $g_\alpha(a) = 0$ teljesül, ugyanis

$$\alpha := \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(a)}{k!}(b-a)^k \right)$$

ez a szám. Ha α ezt a számot jelöli, akkor a Rolle-tétel alapján létezik olyan $c \in]a,b[$ pont, amelyre $(Dg_\alpha)(c) = 0$. Ugyanakkor minden $x \in]a,b[$ esetén

$$\begin{aligned}
(Dg_\alpha)(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{(D(D^k f))(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(D^k f)(x)}{k!} k(b-x)^{k-1} + \\
+\alpha(n+1)(b-x)^n &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{(D^{k+1} f)(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(D^k f)(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \\
+\alpha(n+1)(b-x)^n &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{(D^{k+1} f)(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(D^{k+1} f)(x)}{k!}(b-x)^k + \\
+\alpha(n+1)(b-x)^n &= -\frac{(D^{n+1} f)(x)}{n!}(b-x)^n + \alpha(n+1)(b-x)^n.
\end{aligned}$$

Tehát ha $c \in]a,b[$ olyan, hogy $(Dg_\alpha)(c) = 0$, akkor

$$\alpha = \frac{(D^{n+1} f)(c)}{(n+1)!},$$

következésképpen

$$\frac{1}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(a)}{k!}(b-a)^k \right) = \frac{(D^{n+1} f)(c)}{(n+1)!}.$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy $c_+ := c \in]a,b[$ éppen olyan pont, amelynek létezését állítottuk.

A c_- pont létezésének bizonyítása a fenti bizonyítás mintájára történik, ha $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a g_α függvényt a:

$$[a,b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(x)}{k!}(a-x)^k - \alpha(a-x)^{n+1}$$

definícióval értelmezzük. ■

Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ olyan pont, amelyhez létezik $r \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy f az $]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ intervallum minden pontjában $n+1$-szer differenciálható. Ekkor minden $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}+r[$ ponthoz létezik olyan $\theta \in]0,1[$ valós szám, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \frac{(D^{n+1} f)(\mathfrak{a}+\theta(x-\mathfrak{a}))}{(n+1)!}(x-\mathfrak{a})^{n+1}$$

teljesül. (*Lagrange-maradéktagos Taylor-formula*)

Bizonyítás. Legyen $x \in]\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+r[$. Ekkor $\mathfrak{a} < x$, $[\mathfrak{a}, x] \subseteq Dom(f)$, és f az $[\mathfrak{a}, x]$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható, így n-szer is differenciálható, és $D^n f$ folytonos az $[\mathfrak{a}, x]$ minden pontjában, továbbá f az $]\mathfrak{a}, x[$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható. Ezért az előző lemma első formuláját alkalmazhatjuk az f függvényre és az $a := \mathfrak{a}$, $b := x$ pontokra. Tehát azt kapjuk, hogy létezik olyan $c \in]\mathfrak{a}, x[$ pont, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \frac{(D^{n+1} f)(c)}{(n+1)!}(x-\mathfrak{a})^{n+1}$$

teljesül. Ekkor a $\theta := (c-\mathfrak{a})/(x-\mathfrak{a}) \in]0,1[$ számra $c = \mathfrak{a} + \theta(x-\mathfrak{a})$ teljesül, így θ olyan szám, amelynek létezését állítottuk.

Legyen $x \in]\mathfrak{a}-r, \mathfrak{a}[$. Ekkor $x < \mathfrak{a}$, $[x, \mathfrak{a}] \subseteq Dom(f)$, és f az $[x, \mathfrak{a}]$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható, így n-szer is differenciálható, és $D^n f$ folytonos az $[x, \mathfrak{a}]$ minden pontjában, továbbá f az $]x, \mathfrak{a}[$ minden pontjában $n+1$-szer differenciálható. Ezért az előző lemma násodik formuláját alkalmazhatjuk az f függvényre és az $a := x$, $b := \mathfrak{a}$ pontokra. Tehát azt kapjuk, hogy létezik olyan $c \in]x, \mathfrak{a}[$ pont, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k + \frac{(D^{n+1} f)(c)}{(n+1)!}(x-\mathfrak{a})^{n+1}$$

teljesül. Ekkor a $\theta := (c-\mathfrak{a})/(x-\mathfrak{a}) \in]0,1[$ számra $c = \mathfrak{a} + \theta(x-\mathfrak{a})$ teljesül, így θ olyan szám, amelynek létezését állítottuk. ■

Gyakorlatok

1. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan függvény és $I \subseteq Dom(f)$ olyan intervallum, amelyekhez léteznek olyan $C \geq 0$ és $\alpha > 1$ valós számok, hogy minden $x, x' \in I$ esetén

$$|f(x') - f(x)| \leq C|x' - x|^{\alpha},$$

akkor f az I intervallumon állandó.

(*Útmutatás.* A feltevésből következik, hogy f az I minden x belső pontjában differenciálható és $(Df)(x) = 0$. Ezért f az I belsején állandó, továbbá I-n folytonos is.)

2. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olyan kétszer differenciálható függvény, hogy az f és $D^2 f$ függvények korlátosak. Ekkor Df is korlátos függvény, és ha $k \in \{0, 1, 2\}$ esetén

$$C_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |(D^k f)(x)|,$$

akkor fennáll a $C_1^2 \leq 4C_0C_2$ egyenlőtlenség.

(*Útmutatás.* A Taylor-formula szerint minden $x, z \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $y \in]x, x + 2z[$ pont, hogy

$$(Df)(x) = \frac{f(x + 2z) - f(x)}{2z} - z(D^2 f)(y),$$

amiből következik, hogy $x, z \in \mathbb{R}^+$ esetén $|(Df)(x)| \leq z^{-1}C_0 + zC_2$, így minden $x \in \mathbb{R}^+$ pontra

$$|(Df)(x)| \leq \inf_{z \in \mathbb{R}^+} \left(z^{-1}C_0 + zC_2\right)$$

teljesül. Ugyanakkor a szélsőértékek differenciális jellemzésének tételét alkalmazva könnyen belátható, hogy az

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad z \mapsto z^{-1}C_0 + zC_2$$

függvény minimuma $\mathbb{R}^+$-on egyenlő $2\sqrt{C_0C_2}$-vel; ebből már következik az állítás.)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olyan kétszer differenciálható függvény, amelyre $D^2 f$ korlátos és $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Ekkor Df is korlátos függvény és $\lim\limits_{+\infty} Df = 0$.

(*Útmutatás.* Alkalmazzuk az előző gyakorlatban megfogalmazott állítást minden $r > 0$ valós szám esetén az $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x + r)$ függvényre!)

4. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor minden $I \subseteq Dom(f)$ intervallumra az $(Df)\langle I \rangle$ halmaz intervallum $\mathbb{R}$-ben.

(*Útmutatás.* Elég azt igazolni, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b] \subseteq Dom(f)$ és $(Df)(a) < (Df)(b)$, akkor minden $y \in](Df)(a), (Df)(b)[$ számhoz létezik olyan $x \in [a, b]$, amelyre $(Df)(x) = y$.

Ehhez legyen $c := (a + b)/2$, és legyenek $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ azok a függvények, amelyekre minden $t \in [a, c[$ esetén $\alpha(t) := a$ és $\beta(t) := 2t - a$, továbbá minden

$t \in [c,b]$ esetén $\alpha(t) := 2t - b$ és $\beta(t) := b$. Világos, hogy minden $t \in]a,b[$ esetén $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$. Legyen

$$g :]a,b[\to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}.$$

A g függvény folytonos és

$$\lim_a g = (Df)(a), \quad \lim_b g = (Df)(b),$$

hiszen a definíció szerint

$$g = \left(\frac{f - f(a)}{id_{\mathbb{R}} - a} \right) \circ \beta$$

az $]a,c[$ intervallumon, valamint

$$g = \left(\frac{f - f(b)}{id_{\mathbb{R}} - b} \right) \circ \alpha$$

a $]c,b[$ intervallumon, így elegendő a függvénykompozíció határértékére vonatkozó tételt alkalmazni. Ezért az a $\tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos, amely $]a,b[$ egyenlő g-vel, és $\tilde{g}(a) := (Df)(a)$, $\tilde{g}(b) := (Df)(b)$. Ebből a Bolzano-tétel alapján következik olyan $t \in]a,b[$ pont létezése, amelyre $g(t) = \tilde{g}(t) = y$. A g definícója és a Lagrange-féle középértéktétel alapján létezik olyan $x \in]\alpha(t), \beta(t)[$, hogy $(Df)(x) = g(t) = y$.)

5. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre Df alulról korlátos, akkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ valós számra az $id_{\mathbb{R}} + \varepsilon' f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növő.

6. (*L'Hospital-szabály.*) Legyenek $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ és $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy létezik $b' \in]a,b[$, amelyre f és g differenciálhatók a $]b',b[$ minden pontjában és minden $x \in]b',b[$ pontban $(Dg)(x) \neq 0$. Ha létezik a $\lim_b (Df/Dg)$ határérték és $\lim_b f = 0 = \lim_b g$, akkor létezik a $\lim_b (f/g)$ határérték is, és fennáll az

$$\lim_b \left(\frac{f}{g} \right) = \lim_b \left(\frac{Df}{Dg} \right)$$

egyenlőség.

(*Útmutatás.* Legyen $y := \lim_b (Df/Dg)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $b(\varepsilon) \in]b',b[$ valós számot, amelyre minden $x \in]b(\varepsilon), b[$ esetén

$$y - \varepsilon < \frac{(Df)(x)}{(Dg)(x)} < y + \varepsilon$$

teljesül. A Lagrange-féle középértéktétel szerint g a $]b',b[$ intervallumon injektív, hiszen minden $x \in]b',b[$ pontban $(Dg)(x) \neq 0$. A Cauchy-féle középértéktétel szerint minden $x, x' \in]b(\varepsilon), b[$ esetén, ha $x < x'$, akkor létezik olyan $z \in]x, x'[$, hogy

$$\frac{f(x') - f(x)}{g(x') - g(x)} = \frac{(Df)(z)}{(Dg)(z)} \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon[.$$

Ezért $x \in]b(\varepsilon), b[$ esetén, $\lim\limits_b f = 0 = \lim\limits_b g$ miatt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x' \to b} \frac{f(x') - f(x)}{g(x') - g(x)} \in [y - \varepsilon, y + \varepsilon],$$

amiből következik, hogy

$$\lim_b \left(\frac{f}{g}\right) = y$$

teljesül.)

7. Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ mindketten n-szer differenciálható függvények, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $fg : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ szorzatfüggvény is n-szer differenciálható és

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k f)(D^{n-k} g)$$

teljesül. (*Leibniz-formula.*)

(*Útmutatás.* n szerinti teljes indukcióval bizonyíthatunk.)

8. (*A valós elemi függvények inverzei.*)

a) Az $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növő és $Im(exp) = \mathbb{R}^+$, továbbá a $log := exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény végtelenszer differenciálható és

$$D(log) = \frac{1}{id_{\mathbb{R}^+}}.$$

b) A $sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és $sin\langle\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\rangle = [-1, 1]$, továbbá az $Arcsin := \left(sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, a $]-1, 1[$ intervallumon végtelenszer differenciálható és

$$D(Arcsin) = \frac{1}{\sqrt{1 - id^2_{]-1,1[}}}.$$

c) A $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton fogyó a $[0, \pi]$ intervallumon és $cos\langle[0, \pi]\rangle = [-1, 1]$, továbbá az $Arccos := \left(cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, a $]-1, 1[$ intervallumon végtelenszer differenciálható és

$$D(Arccos) = -\frac{1}{\sqrt{1 - id^2_{]-1,1[}}}.$$

d) A $tg := sin/cos : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény definíciós tartománya az $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ halmaz, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén a tg függvény szigorúan monoton növő a $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ intervallumon és fennáll a $tg\left\langle\left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\right\rangle = \mathbb{R}$ egyenlőség. Az $Arctg := \left(tg|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény végtelenszer differenciálható és minden $n \in \mathbb{N}^+$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$(D^n(Arctg))(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1 + x^2)^{n/2}} sin\left(n \cdot Arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

e) A $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növő és $Im(sh) = \mathbb{R}$, továbbá az $Arsh := (sh)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény végtelenszer differenciálható és

$$D(Arsh) = \frac{1}{\sqrt{id_{\mathbb{R}}^2 + 1}}.$$

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Arsh(x) = log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

teljesül.

f) A $ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növő a $[0, \to [$ intervallumon és $ch\langle[0, \to [\rangle = [1, \to [$, továbbá az $Arch := \left(ch|_{[0,\to[}\right)^{-1} : [1, \to [\to \mathbb{R}$ függvény folytonos, a $]1, \to [$ intervallumon végtelenszer differenciálható és

$$D(Arch) = -\frac{1}{\sqrt{id_{]1,\to[}^2 - 1}}.$$

Minden $x \in [1, \to [$ esetén

$$Arch(x) = log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

teljesül.

g) A $th := sh/ch : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény definíciós tartománya $\mathbb{R}$ és $Im(th) =]-1, 1[$, továbbá az $Arth := (th)^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ függvény végtelenszer differenciálható és

$$D(Arth) = \frac{1}{1 - id_{]-1,1[}^2}.$$

Minden $x \in [-1, 1[$ esetén

$$Arth(x) = \frac{1}{2}\, log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Mindegyik esetben az inverzfüggvény differenciálhatóságának tételére hivatkozhatunk. Az $Arctg$ deriváltjaira vonatkozó formulát teljes indukcióval igazolhatjuk.)

9. Minden $x \in]-1, 1[$ valós számra

$$log(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\, x^{k+1}$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{1}{1 + id_{\mathbb{R}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k id_{\mathbb{R}}^k + (-1)^n \frac{id_{\mathbb{R}}^n}{1 + id_{\mathbb{R}}}$$

teljesül az $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ halmazon, továbbá nyilvánvaló, hogy a $]-1,\rightarrow[$ intervallumon

$$D(log\circ(1+id_{\mathbb{R}}))=\frac{1}{1+id_{\mathbb{R}}},$$
$$D\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\ id_{\mathbb{R}}^{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k id_{\mathbb{R}}^k$$

teljesül. Tehát ha $n\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$R_n:=log\circ(1+id_{\mathbb{R}})-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\ id_{\mathbb{R}}^{k+1},$$

akkor nyilvánvaló, hogy $R_n(0)=0$, továbbá a $]-1,\rightarrow[$ intervallumon fennáll a

$$DR_n=(-1)^n\frac{id_{\mathbb{R}}^n}{1+id_{\mathbb{R}}}$$

egyenlőség.
Ha $x\in]0,1[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z\in]0,x[$, hogy $R_n(x)=(DR_n)(z)x$, tehát

$$\left|log(1+x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\ x^{k+1}\right|=|(DR_n)(z)|x=\frac{z^n}{1+z}\ x\leq x^{n+1}.$$

Ha $x\in]-1,0[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z\in]x,0[$, hogy $R_n(x)=(DR_n)(z)x$, tehát

$$\left|log(1+x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\ x^{k+1}\right|=|(DR_n)(z)||x|=\frac{|z|^n}{1+z}|x|\leq\frac{|x|^{n+1}}{1+x}.$$

Következésképpen $x\in]-1,1[$ esetén

$$log(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\ x^{k+1}$$

teljesül.
Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a fentiek szerint minden $\delta\in]0,1[$ valós számra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}\left|log(1+x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\ x^{k+1}\right|\right)=0$$

is teljesül!)

10. Minden $x\in]-1,1[$ valós számra

$$Arctg(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{1}{1+id_{\mathbb{R}}^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k id_{\mathbb{R}}^{2k} + (-1)^n \frac{id_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+id_{\mathbb{R}}^2}$$

teljesül $\mathbb{R}$-en, továbbá

$$D(Arctg) = \frac{1}{1+id_{\mathbb{R}}^2},$$

$$D\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ id_{\mathbb{R}}^{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k id_{\mathbb{R}}^{2k}$$

teljesül. Tehát ha $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$R_n := Arctg - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ id_{\mathbb{R}}^{2k+1},$$

akkor nyilvánvaló, hogy $R_n(0) = 0$, továbbá fennáll a

$$DR_n = (-1)^n \frac{id_{\mathbb{R}}^{2n}}{1+id_{\mathbb{R}}^2}$$

egyenlőség.

Ha $x \in]0,1[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]0,x[$, hogy $R_n(x) = (DR_n)(z)x$, tehát

$$\left|Arctg(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}\right| = |(DR_n)(z)|x = \frac{z^{2n}}{1+z^2}\ x \le x^{2n+1}.$$

Ha $x \in]-1,0[$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $z \in]x,0[$, hogy $R_n(x) = (DR_n)(z)x$, tehát

$$\left|Arctg(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}\right| = |(DR_n)(z)||x| = \frac{z^{2n}}{1+z^2}|x| \le |x|^{2n+1}.$$

Következésképpen $x \in]-1,1[$ esetén

$$Arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}$$

teljesül.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a fentiek szerint minden $\delta \in]0,1[$ valós számra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}\left|Arctg(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ x^{2k+1}\right|\right) = 0$$

is teljesül!)

11. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, és minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra értelmezzük a

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j),$$

számot, továbbá legyen

$$\binom{\alpha}{0} := 1.$$

(Ezek a számok az *általánosított binomiális együtthatók.*) Minden $x \in]-1/2, 1[$ valós számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

teljesül. (*Általánosított binomiális formula.*)

(Megjegyezzük, hogy ez a formula minden $x \in]-1, 1[$ számra érvényes, de ennek bizonyításához *nem elégségesek* az eddig tanultak.)

(*Útmutatás.* Legyen

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^\alpha.$$

Ez a függvény végtelenszer differenciálható, és minden $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$(D^k f)(x) = k! \binom{\alpha}{k} x^{\alpha - k}.$$

Az f függvényre alkalmazva a Lagrange-maradéktagos Taylor-formulát kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz van olyan $\theta_n :]-1, 1[\to]0, 1[$ függvény, amelyre minden $x \in]-1, 1[$ esetén

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = f(1+x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(1)}{k!} x^k + \frac{(D^{n+1} f)(1 + \theta_n(x)x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_{n+1}(x),\end{aligned}$$

ahol bevezettük az

$$R_{n+1}(x) := \binom{\alpha}{n+1} \left(\frac{x}{1 + \theta_n(x)x} \right)^{n+1} (1 + \theta_n(x)x)^\alpha$$

jelölést. Világos, hogy azt kell megvizsgálni, hogy mely $x \in]-1, 1[$ pontokban igaz a $\lim\limits_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$ egyenlőség.

Ehhez először megjegyezzük, hogy $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\binom{\alpha}{k} = (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{j} \right),$$

amiből következik, hogy

$$\left|\binom{\alpha}{k}\right| \leq \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{|\alpha+1|}{j}\right).$$

Legyen most $P :]-1,1[\to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $x \in]-1,1[$ esetén $P(x) := (1+|x|)^{\alpha}$, ha $\alpha \geq 0$, illetve $P(x) := (1-|x|)^{\alpha}$, ha $\alpha < 0$. Ha $r \in]0,1[$ tetszőleges valós szám és $s \in]r,1[$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$1+\frac{|\alpha+1|}{n} < \frac{1}{s}.$$

Ekkor az előzőek szerint minden $x \in [0,r]$ valós számra és $n > N$ természetes számra:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1}P(x) \leq \left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{|\alpha+1|}{j}\right)\right)\left(\frac{1}{s}\right)^{n-N+1} r^{n+1}P(x) \leq$$
$$\leq \left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{|\alpha+1|}{j}\right)\right)\left(\sup_{t\in[0,x]} P(t)\right) s^{N}\left(\frac{r}{s}\right)^{n+1},$$

ezért még az is igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,r]}|R_{n+1}(x)|\right) = 0.$$

Legyen most $N :]-1,1[\to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $x \in]-1,1[$ esetén $N(x) := (1-|x|)^{\alpha}$, ha $\alpha \geq 0$, illetve $N(x) := (1+|x|)^{\alpha}$, ha $\alpha < 0$. Ha $r \in]0,1/2[$ tetszőleges valós szám és $s \in]0,1[$ olyan valós szám, hogy $r < s/(s+1)$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$1+\frac{|\alpha+1|}{n} < \frac{1}{s}.$$

Ekkor az előzőek szerint minden $x \in [-r,0[$ valós számra és $n > N$ természetes számra

$$|R_{n+1}(x)| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} N(x) \leq$$
$$\leq \left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{|\alpha+1|}{j}\right)\right)\left(\frac{1}{s}\right)^{n-N+1}\left(\frac{r}{1-r}\right)^{n+1} N(x) \leq$$
$$\leq \left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{|\alpha+1|}{j}\right)\right) s^{N}\left(\sup_{t\in[-r,0]} N(t)\right)\left(\frac{r/s}{1-r}\right)^{n+1},$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[-r,0]}|R_{n+1}(x)|\right)=0,$$

hiszen $(r/s)/(1-r)\in]0,1[$.)

12. Legyen $p\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Vizsgáljuk meg a következő függvények monotonitását:

$$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+p};$$

$$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{p}{x}\right);$$

$$]1,\to[\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-p};$$

$$]-p,\to[\cap\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1}.$$

(*Útmutatás.* Mindegyik esetben alkalmazhatjuk a monotonitás differenciális jellemzését.)

13. a) Ha $\alpha\geq 1$ és $x\geq 0$ tetszőleges valós számok, akkor

$$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x.$$

b) Ha $\alpha\in[0,1]$ és $x\geq 0$ tetszőleges valós számok, akkor

$$(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x.$$

c) Ha $\alpha\geq 0$ és $x\in[0,1]$ tetszőleges valós számok, akkor

$$(1-x)^\alpha\leq\frac{1}{1+\alpha x}.$$

(*Útmutatás.* Az a) és b) esetben $\alpha\in\mathbb{R}_+$ esetén tekintsük az

$$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto(1+x)^\alpha-1-\alpha x$$

függvényt, és vizsgáljuk ennek előjelét, miután meghatároztuk az f monotonitási tulajdonságát, valamint igazoltuk, hogy $\lim\limits_0 f=0=f(0)$.

A c) esetben írjuk át a bizonyítandó egyenlőtlenséget ekvivalens logaritmikus alakba, és az $\alpha>0$ valós számra vizsgáljuk meg az

$$f:]0,1[\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\alpha\cdot log(1-x)+log(1+\alpha\cdot x)$$

függvény előjelét, miután meghatároztuk az f monotonitási tulajdonságát, valamint igazoltuk, hogy $\lim\limits_0 f=0=f(0)$.)

14. Minden $x > 0$ és y valós számra fennáll az

$$xy \leq x\ log(x) + exp(y-1)$$

egyenlőtlenség.
(*Útmutatás.* Bevezetve a $z := exp(y-1)$ jelölést, láthatóan azt kell igazolni, hogy $x > z$ esetén

$$\frac{log(x) - log(z)}{x - z} > \frac{1}{x},$$

és $0 < x < z$ esetén

$$\frac{log(z) - log(x)}{z - x} < \frac{1}{x}.$$

Ha $x > z$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $u \in]z, x[$, hogy

$$\frac{log(x) - log(z)}{x - z} = \frac{1}{u} > \frac{1}{x}.$$

Ha $0 < x < z$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel alapján van olyan $v \in]x, z[$, hogy

$$\frac{log(z) - log(x)}{z - x} = \frac{1}{v} < \frac{1}{x}.$$

teljesül.)

15. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(a_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó rendszer. Jelölje A_n, illetve G_n az $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ rendszer számtani, illetve mértani közepét, és legyen A_{n+1}, illetve G_{n+1} az $(a_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ rendszer számtani, illetve mértani közepe. Ekkor fennáll az

$$n(A_n - G_n) \leq (n+1)(A_{n+1} - B_{n+1})$$

egyenlőtlenség.
(*Útmutatás.* Könnyen látható, hogy

$$A_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right) A_n + \left(\frac{1}{n+1}\right) a_{n+1},$$
$$G_{n+1} = G_n^{\frac{n}{n+1}} a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}},$$

ezért a számtani és mértani közép közötti általánosított egyenlőtlenséget alkalmazva

$$A_{n+1} - G_{n+1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right) A_n + \left(\frac{1}{n+1}\right) a_{n+1} - \left(\frac{n}{n+1}\right) G_n - \left(\frac{1}{n+1}\right) a_{n+1}$$

adódik, és ezt kellett igazolni.)

16. Legyen I nem üres véges halmaz, és $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times I}$ olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\sum_{j \in I} a_{i,j} = 1$. Ha $(x_i)_{i \in I}$ tetszőleges $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer, akkor fennáll a

$$\prod_{i \in I} \left(\sum_{j \in I} a_{i,j} x_j \right) \geq \prod_{i \in I} x_i$$

egyenlőtlenség.

(*Útmutatás.* Írjuk át a bizonyítandó egyenlőtlenséget ekvivalens logaritmikus alakba, majd alkalmazzuk a *log* függvény konkavitását.)

17. Ha $a, b, x, y > 0$ tetszőleges valós számok, akkor

$$x\ log\left(\frac{x}{a}\right) + y\ log\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)\ log\left(\frac{x+y}{a+b}\right),$$

és itt pontosan akkor áll egyenlőség, ha $x/a = y/b$.

(*Útmutatás.* Alkalmas helyettesítések után használjuk ki azt, hogy az $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ x \mapsto x\ log(x)$ leképezés konvex!)

18. (*Primitív függvények.*) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *primitív függvényének* nevezünk minden olyan $F : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre $f = DF$ teljesül. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát $\int f$ jelöli. Ha $H, H' \subseteq \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor a

$$H + H' := \{h + h' | (h \in H) \wedge (h' \in H')\},$$
$$\alpha H := \{\alpha h | h \in H\}$$

jelöléseket alkalmazzuk, tehát $H + H', \alpha H \subseteq \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ szintén teljesül. Ha $J \subseteq \mathbb{R}$ is nyílt intervallum, $\sigma : J \to I$ függvény, és $H \subseteq \mathscr{F}(I;\mathbb{R})$, akkor

$$H \circ \sigma := \{h \circ \sigma | h \in H\}.$$

a) Ha $I \neq \emptyset$, akkor van olyan $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\int f = \emptyset$. (Később megmutatjuk, hogy ha $f : I \to \mathbb{R}$ *folytonos* függvény, akkor szükségképpen $\int f \neq \emptyset$.)

b) Ha $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és $F \in \int f$, akkor

$$\int f = \{F + c | c \in \mathbb{R}\}.$$

c) Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvények, akkor

$$\int f + \int g \subseteq \int (f + g),$$

és ha $\int f \neq \emptyset$ és $\int g \neq \emptyset$, akkor itt egyenlőség áll.

d) Ha $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\alpha \int f \subseteq \int (\alpha f),$$

és ha $\int f \neq \emptyset$, akkor itt egyenlőség áll.

e) Ha $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\sigma : J \to I$ differenciálható függvény, akkor minden $f : I \to \mathbb{R}$ függvényre

$$\left(\int f\right) \circ \sigma \subseteq \int ((f \circ \sigma)(D\sigma)),$$

és ha $\int f \neq \emptyset$, akkor itt egyenlőség áll.

f) Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, hogy $\int(f(Dg)) \neq \emptyset$ és $\int(g(Df)) \neq \emptyset$, akkor

$$\int(f(Dg)) = \{fg\} - \int(g(Df))$$

teljesül.

19. Adjunk olyan bizonyítást a függvénykompozíció differenciálási tételére, amely nem használja fel a differenciahányados-függvényeket.

(*Útmutatás.* Legyenek $f, g : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, $\mathfrak{a} \in \mathbb{K}$, és tegyük fel, hogy f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban és g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban.

Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A g differenciálható $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért $f(\mathfrak{a})$ belső pontja $Dom(g)$-nek, és létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K}) \subseteq Dom(g)$ és minden $y \in B_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$ esetén

$$|g(y) - g(f(\mathfrak{a})) - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (y - f(\mathfrak{a}))| \leq \varepsilon' \cdot |y - f(\mathfrak{a})|.$$

Az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, így a δ'-höz létezik olyan $\delta'' \in \mathbb{R}^+$, amelyre $f\langle B_{\delta''}(\mathfrak{a}; \mathbb{K})\rangle \subseteq B_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$. Ugyanakkor f differenciálható is $\mathfrak{a}$-ban, így $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, és létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre $\delta < \delta''$, $B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \subseteq Dom(f)$ és minden $x \in B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$ esetén

$$|f(x) - f(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})| \leq \varepsilon' \cdot |x - \mathfrak{a}|,$$

amiből az is következik, hogy

$$|f(x) - f(\mathfrak{a})| \leq (\varepsilon' + |(Df)(\mathfrak{a})|) \cdot |x - \mathfrak{a}|.$$

Ekkor $B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \subseteq Dom(g \circ f)$, tehát $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(g \circ f)$-nek, és minden $x \in B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$ esetén $f(x) \in B_{\delta'}(f(\mathfrak{a}); \mathbb{K})$, így

$$|g(f(x)) - g(f(\mathfrak{a})) - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (f(x) - f(\mathfrak{a}))| \leq \varepsilon' \cdot |f(x) - f(\mathfrak{a})|.$$

Ugyanakkor minden $x \in B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K})$ pontra

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\mathfrak{a}) - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a}) = \\ = g(f(x)) - g(f(\mathfrak{a})) - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (f(x) - f(\mathfrak{a})) + \\ + (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (f(x) - f(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})),\end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\mathfrak{a}) - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})| \leq \\ \leq |g(f(x)) - g(f(\mathfrak{a})) - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (f(x) - f(\mathfrak{a}))| + \\ + |(Dg)(f(\mathfrak{a}))| \cdot |f(x) - f(\mathfrak{a}) - (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})| \leq \\ \leq \varepsilon' \cdot |f(x) - f(\mathfrak{a})| + |(Dg)(f(\mathfrak{a}))| \cdot \varepsilon' \cdot |x - \mathfrak{a}| \leq \varepsilon'(\varepsilon' + |(Df)(\mathfrak{a}))| + |(Dg)(f(\mathfrak{a}))|)|x - \mathfrak{a}|.\end{aligned}$$

Ha tehát $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot úgy választjuk meg, hogy $\varepsilon' \cdot (\varepsilon' + |(Df)(\mathfrak{a})| + |(Dg)(f(\mathfrak{a}))|) < \varepsilon$ teljesüljön, akkor az ε'-höz fentiek szerint előállított $\delta \in \mathbb{R}^+$ szám olyan, hogy $B_\delta(\mathfrak{a}; \mathbb{K}) \subseteq Dom(g \circ f)$ és

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\mathfrak{a}) - (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (Df)(\mathfrak{a}) \cdot (x - \mathfrak{a})| \leq \varepsilon \cdot |x - \mathfrak{a}|.$$

Ez azt jelenti, hogy $g \circ f$ differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és

$$(D(g \circ f))(\mathfrak{a}) = (Dg)(f(\mathfrak{a})) \cdot (Df)(\mathfrak{a})$$

teljesül.)

IV. FÜGGVÉNYTEREK ÉS FÜGGVÉNYALGEBRÁK

Ennek a rövid, algebrai jellegű fejezetnek az a célja, hogy a függvényterek és függvényalgebrák példáján keresztül megmutassa, hogyan jelennek meg a matematikában természetes módon végtelen dimenziós *vektorterek* és *algebrák*. Nem célunk a végesdimenziós lineáris algebra részletes elemzése, ami egyáltalán nem azt jelenti, hogy a véges dimenziós vektorterek elmélete triviális, vagy érdektelen volna.

Végtelen dimenziós vektorterek, illetve "végtelen sok független valós paraméterrel jellemezhető elemeket tartalmazó halmazok" (azaz végtelen dimenziós valós sokaságok) a modern analízis sok területén megjelennek. Ilyen objektumok a differenciál- és integráloperátorok, valamint a variációs funkcionálok (hatásfüggvények) definíciós tartományai. Ilyenek a változó részecskeszámú klasszikus statisztikus fizikai rendszerek, valamint a kvantumfizikai rendszerek állapottereinek adekvát matematikai modelljei, és a példák sorát hosszan lehetne folytatni.

Néhány itt bevezetésre kerülő függvénytér (mint például a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ és $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatterek) a későbbiekben különös jelentőséget kap, mert viszonylag egyszerűen kezelhető, ugyanakkor sok olyan (később bevezetendő) jelenség megfigyelhető rajta, amely véges dimenziós esetben láthatatlan maradna.

A fejezet két első pontja csak a feltétlenül szükséges definíciókat és konkrét példákat (illetve példa-típusokat) tartalmaz. A harmadik pontban bevezetjük a vektorterek és algebrák feletti *normák* fogalmát, ami a testek feletti abszolútértékfüggvények fogalmának természetes általánosítása. A következő fejezetben látjuk majd, hogy a normával ellátott vektorterek (vagyis a *normált terek*) adják a legfontosabb példát a *metrikus terekre*, amelyekre általánosíthatók a legsajátosabb analitikus fogalmak, mint például a topologikus tulajdonságok, a határérték és a folytonosság. Sőt a VII. fejezetben látható lesz, hogy normált terek között ható függvények differenciálhatósága is értelmezhető, és sok olyan differenciálelméleti állítás általánosítható, amelyet az előző fejezetben egyváltozós esetre igazoltunk.

Irodalomjegyzék

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algébre*, Hermann, Paris

2. S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Co., 1965.

3. L. Rédei, *Algebra*, I. Akadémiai Kiadó, 1967.

4. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, Наука, Москва, 1970.

5. Г. Е. Шилов, *Математический анализ, Конечномерные линейные пространства*, Наука, Москва, 1969.

6. M. Zamansky, *Introduction a l'algébre et l'analyse modernes*, Dunod, 1963.

7. P. Halmos, *Véges dimenziós vektorterek*, Műszaki Könyvkiadó, 1984

1. Függvényterek

Emlékeztetünk arra, hogy ha H és E halmazok, akkor a $H \to E$ függvények halmazát a $\mathscr{F}(H;E)$ jel mellett az E^H szimbólummal is jelöljük. Ezért semmiféle magyarázatra nem szorul a következő elnevezés.

Definíció. Ha E halmaz és $n \in \mathbb{N}$, akkor az E^n függvényhalmazt az E halmaz n-edik *hatványának*, és az E^n elemeit E-beli *elem n-eseknek* nevezzük. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbb{R}^n$ (illetve $\mathbb{C}^n$) halmaz elemeit valós (illetve komplex) szám n-eseknek nevezzük.

Tehát az E^n halmaz elemei olyan *függvények*, amelyek az $n \in \mathbb{N}$ halmazon értelmezettek és E-be érkeznek.

Példák Legyen E tetszőleges halmaz.

1) A definíció szerint $0 := \emptyset$, ezért $E^0 = \{\emptyset\}$. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\emptyset^n = \{\emptyset\}$ is teljesül.

2) A definíció szerint $1 := \{0\}$, ezért az $E^1 \to E;\ f \mapsto f(0)$ leképezés jól értelmezett, és nyilvánvalóan bijekció az E^1 és E halmazok között. Ezért az E^1 és E halmazokat e bijekció által azonosítani szoktuk.

3) A definíció szerint $2 := \{0,1\}$, ezért az $E^2 \to E \times E;\ f \mapsto (f(0), f(1))$ leképezés jól értelmezett, és nyilvánvalóan bijekció az E^2 és $E \times E$ halmazok között. Ezért az E^2 és $E \times E$ halmazokat e bijekció által azonosítani szoktuk. Ebben az esetben az $E^2 \to E \times E;\ f \mapsto (f(1), f(0))$ leképezés is jól értelmezett, és ez is bijekció az E^2 és $E \times E$ halmazok között, vagyis volna lehetőség másféle azonosításra is. Azonban a 2 halmaz természetes rendezése e két azonosító leképezés közül kitünteti az elsőt.

4) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a definíció szerint $n + 1 = n \cup \{n\}$, ezért az $E^{n+1} \to E^n \times E;\ f \mapsto (f|_n, f(n))$ leképezés jól értelmezett, és nyilvánvalóan bijekció az E^{n+1} és $E^n \times E$ halmazok között. Ennek a bijekciónak a létezése lehetőséget ad arra, hogy az E^n alakú halmazokra vonatkozó kijelentéseket n szerinti teljes indukcióval bizonyítsuk. Ehhez azonban szükség volna az $(E^n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezésére; erről szól a következő állítás.

Állítás. Minden E halmazhoz egyértelműen létezik az az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E_n = E^n$ teljesül.

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{E}$ az $\mathbb{N} \rightarrowtail E$ függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy a

$$(\forall x)(\ (\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, E^n))) \Rightarrow (x \in \mathbb{N} \times \mathscr{P}(\mathscr{E}))\ )$$

kijelentés tétel, ezért a $(\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, E^n)))$ kijelentés a részhalmaz-axióma alapján kollektivizáló az x változóban. Legyen

$$F := \{x | (\exists n)((n \in \mathbb{N}) \wedge (x = (n, E^n)))\}.$$

Könnyen látható, hogy F függvény, és $Dom(F) = \mathbb{N}$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F(n) = E^n$. Ez azt jelenti, hogy F olyan halmazrendszer, amelynek a létezését állítottuk. Ennek halmaznak az egyértelműsége nyilvánvaló. ■

Definíció. Legyen E halmaz és $m, n \in \mathbb{N}$. Az $E^{m\times n}$ halmaz elemeit E-beli együtthatós $m \times n$-es *mátrixoknak* nevezzük, és az $E^{m\times n}$ halmazt gyakran az $M_{m,n}(E)$ szimbólummal is jelöljük. Ha $\mathfrak{a} \in M_{m,n}(E)$, akkor $(i, j) \in m \times n$ esetén az $\mathfrak{a}(i, j) \in E$ elemet az $\mathfrak{a}_{i,j}$ szimbólummal is jelöljük, és azt mondjuk, hogy $\mathfrak{a}_{i,j}$ az $\mathfrak{a}$ mátrix (i, j)-edik *komponense*. Az $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (illetve $M_{m,n}(\mathbb{C})$) halmaz elemeit *valós* (illetve *komplex*) $m \times n$-es mátrixoknak nevezzük.

Megjegyezzük még, hogy ha E halmaz és $n \in \mathbb{N}$, akkor az $M_{n,n}(E)$ mátrixhalmazt az $M_n(E)$ szimbólummal szoktuk rövidíteni, és $M_n(E)$ elemeit E-beli együtthatós n-szeres *kvadratikus* mátrixoknak nevezzük.

Állítás. Legyen T halmaz, K test és $E := \mathscr{F}(T; K)$. Minden $x, y \in E$ és $\alpha \in K$ esetén legyenek $x + y$ és $\alpha.x$ azok a $T \to K$ függvények, amelyekre minden $t \in T$ esetén

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t),$$
$$(\alpha.x)(t) := \alpha \cdot x(t).$$

Ekkor az

$$E \times E \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y,$$
$$K \times E \to E; \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha.x$$

leképezések rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

(EV_I) Az E halmaz feletti $+$ művelet asszociatív, kommutatív, neutráliselemes és inverzelemes, vagyis az $(E, +)$ pár kommutatív csoport.

(EV_{II}) Minden $\alpha, \beta \in K$ és $x, y \in E$ esetén

$$\alpha.(\beta x) = (\alpha \cdot \beta).x;$$
$$(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x;$$
$$\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y;$$
$$1.x = x.$$

Az $(E, +)$ kommutatív csoport neutrális eleme a $T \to K$ azonosan 0 függvény, és $x \in E$ esetén az x inverze a $+$ művelet szerint a $T \to K;\ t \mapsto -x(t)$ függvény.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik a testaxiómákból. ■

Definíció. Az $(E, +, .)$ hármast *vektortérnek* vagy *lineáris térnek* nevezzük a K test felett, ha $+ : E \times E \to E$ és $. : K \times E \to E$ olyan függvények, amelyekre teljesülnek az előző állításban megfogalmazott (EV_I) és (EV_{II}) tulajdonságok. Ha $(E, +, .)$ vektortér a K test felett, akkor a $+$ művelet szerinti neutrális elemet rendszerint a 0 szimbólummal jelöljük, továbbá minden $x \in E$ esetén $-x$ jelöli az x inverzét a $+$ művelet szerint. A valós (illetve komplex) számok teste feletti vektortereket valós (illetve komplex) vektortereknek nevezzük.

Tehát látjuk, hogy ha T halmaz és K test, akkor a $(\mathscr{F}(T; K), +, .)$ hármas vektortér K felett, ahol $+$ és $.$ az előző állításban bevezetett leképezések; az ilyen alakú vektortereket *teljes függvénytereknek* nevezzük.

Definíció. A K test feletti $(E, +, .)$ vektortér *lineáris alterének* nevezünk minden olyan $F \subseteq E$ nem üres halmazt, amelyre minden $x, y \in F$ és $\alpha \in K$ esetén $x + y \in F$ és $\alpha.x \in F$ teljesül.

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy ha F lineáris altere a K test feletti $(E, +, .)$ vektortérnek, akkor az $(F, +|_{F\times F}, .|_{K\times F})$ hármas szintén vektortér a K test felett.

Világos, hogy vektortér lineáris alterei tetszőleges nem üres rendszerének a metszete is lineáris altér, továbbá a vektortér alaphalmaza is lineáris altér. Ebből következik, hogy vektortér alaphalmazának minden részhalmaza benne van egy tartalmazás tekintetében legkisebb lineáris altérben, ti. az adott részhalmazt tartalmazó lineáris alterek metszetében; ezt a lineáris alteret nevezzük a részhalmaz által *generált lineáris altérnek*.

Definíció. A teljes függvényterek lineáris altereit *függvénytereknek* nevezzük. Ha K test, akkor az $(\mathscr{F}(\mathbb{N}; K), +, .)$ teljes függvénytér lineáris altereit *sorozattereknek* nevezzük.

Példák (*vektorterekre*)

1) Ha K test, akkor a $(K, +, \cdot)$ hármas vektortér K felett, tehát a vektortér-fogalom a test-fogalom általánosításának tekinthető.

2) Az $(\mathbb{R}, +, \cdot|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}})$ hármas vektortér a $\mathbb{Q}$ test felett. A $(\mathbb{C}, +, \cdot|_{\mathbb{R}\times\mathbb{C}})$ hármas valós vektortér. Általánosan, ha K test és L részteste K-nak (II. fejezet, 1. pont, **2**. gyakorlat), akkor $(K, +, \cdot|_{L\times K})$ vektortér az L test felett.

3) Legyen K test és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $K^n := \mathscr{F}(n; K)$, tehát $(K^n, +, .)$ egy teljes függvénytér. Ha x és y K-beli elem n-esek és $\alpha \in K$, akkor $x + y$ és $\alpha.x$ azok a K-beli elem n-esek, amelyekre minden $k \in n$ esetén $(x + y)(k) := x(k) + y(k)$ és $(\alpha.x)(k) := \alpha \cdot x(k)$.

4) Legyen K test és $m, n \in \mathbb{N}$. Ekkor $M_{m,n}(K) := \mathscr{F}(m \times n; K)$, tehát $(M_{m,n}(K), +, .)$ egy teljes függvénytér. Ha $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in M_{m,n}(K)$ és $\alpha \in K$, akkor $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ és $\alpha.\mathfrak{a}$ azok a K-beli együtthatós $m \times n$-es mátrixok, amelyekre minden $(i, j) \in m \times n$ esetén $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{i,j} = \mathfrak{a}_{i,j} + \mathfrak{b}_{i,j}$ és $(\alpha.\mathfrak{a})_{i,j} = \alpha \cdot \mathfrak{a}_{i,j}$.

5) Ha K test, akkor a

$$K^{(\mathbb{N})} := \{\boldsymbol{s} \in K^{\mathbb{N}} |\ \text{az } \{n \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(n) \neq 0\} \text{ halmaz véges}\}$$

halmaz lineáris altere a $(K^{\mathbb{N}}, +, .)$ sorozattérnek.

6) Ha T halmaz, akkor a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T; \mathbb{K})$ halmaza lineáris altere az $(\mathscr{F}(T; \mathbb{K}), +, .)$ függvénytérnek. Speciálisan, $\mathscr{F}^b(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ azonos a $\mathbb{K}$-ban haladó korlátos sorozatok halmazával; ezt $l^\infty_{\mathbb{K}}$ jelöli, és ez lineáris altere a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok terének.

7) A $\mathbb{K}$-ban haladó konvergens sorozatok halmaza lineáris altere $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok terének.

8) Ha $T \subseteq \mathbb{K}$ tetszőleges halmaz, akkor a $T \to \mathbb{K}$ folytonos függvények $\mathscr{C}(T; \mathbb{K})$ halmaza, valamint a $T \to \mathbb{K}$ korlátos és folytonos függvények $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K})$ halmaza lineáris altere a $(\mathscr{F}(T; \mathbb{K}), +, .)$ függvénytérnek.

9) Ha $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílthalmaz, akkor az $\Omega \to \mathbb{K}$ differenciálható függvények halmaza lineáris altere a $(\mathscr{F}(\Omega;\mathbb{K}),+,.)$ függvénytérnek.

10) Legyen $p \geq 1$ valós szám és

$$l^p_{\mathbb{K}} := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} |\ \text{a} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{s}(k)|^p \text{ sor konvergens}\}.$$

Az $l^p_{\mathbb{K}}$ halmaz elemeit *p-edik hatványon abszolút szummálható* sorozatoknak nevezzük. Meg fogjuk mutatni, hogy $l^p_{\mathbb{K}}$ lineáris altere a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok terének.

Állítás. Ha $p \geq 1$ valós szám, akkor $l^p_{\mathbb{K}}$ lineáris altere a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok vektorterének, és $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in l^p_{\mathbb{K}}$, valamint $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\lambda.\boldsymbol{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in l^p_{\mathbb{K}}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra a háromszög-egyenlőtlenség és az elemi Minkowski-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} (|\boldsymbol{a}(k)| + |\boldsymbol{b}(k)|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

amiből következik, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(k)|^p$ sor konvergens, azaz $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in l^p_{\mathbb{K}}$, és határérték-képzéssel kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ha $\boldsymbol{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |(\lambda.\boldsymbol{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

amiből következik, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |(\lambda.\boldsymbol{a})(k)|^p$ sor konvergens, azaz $\lambda.\boldsymbol{a}\in l^p_{\mathbb{K}}$, és határérték-képzéssel kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\lambda.\boldsymbol{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} |(\lambda.\boldsymbol{a})(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

teljesül. ■

Ettől kezdve a vektortereket rendszerint egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével jelöljük, és a bennük értelmezett összeadást a $+$, és a hozzájuk tartózó test elemeivel való szorzást a . szimbólummal jelöljük, ha ez nem okoz félreértést.

Állítás. Legyen T halmaz, F vektortér a K test felett, és $E := \mathscr{F}(T;F)$. Minden $x, y \in E$ és $\alpha \in K$ esetén legyenek $x+y$ és $\alpha.x$ azok a $T \to F$ függvények, amelyekre minden $t \in T$ esetén

$$(x+y)(t) := x(t) + y(t),$$
$$(\alpha.x)(t) := \alpha.x(t).$$

Ekkor az $(E, +, .)$ hármas vektortér a K test felett.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik a vektorterek definíciójából. ■

A továbbiakban egy halmazon értelmezett, vektortérbe ható összes függvények halmazát vektortérnek tekintjük az előző állításban bevezetett vektortér-struktúrával ellátva.

Állítás. Legyen E vektortér és $\boldsymbol{s}$ E-ben haladó sorozat. Ekkor létezik egyetlen olyan E-ben haladó $\sum \boldsymbol{s}$ sorozat, amelyre $\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(0) = \boldsymbol{s}(0)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n+1) = \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) + \boldsymbol{s}(n+1)$ teljesül.

Bizonyítás. A rekurziós tételt kell alkalmazni az E halmazra, az $\boldsymbol{s}(0) \in E$ kezdőpontra és a $g : \mathbb{N} \times E \to E;\ (n, x) \mapsto x + \boldsymbol{s}(n+1)$ függvényre. ■

Definíció. Ha E vektortér és $\boldsymbol{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor az $\boldsymbol{s}$-hez asszociált (vagy $\boldsymbol{s}$ által meghatározott) *(vektor)sornak* nevezzük és $\sum \boldsymbol{s}$-sel jelöljük azt az E-ben haladó sorozatot, amelyre teljesül az, hogy $(\sum \boldsymbol{s})(0) = \boldsymbol{s}(0)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\sum \boldsymbol{s})(n+1) = (\sum \boldsymbol{s})(n) + \boldsymbol{s}(n+1)$.

Vektorsorok *maradéktagjai* és *átrendezései* pontosan úgy értelmezhetők, mint a numerikus sorok esetében.

Definíció. Legyenek E és F vektorterek a K test felett. Egy $u : E \to F$ függvény *lineárisnak*, vagy *lineáris operátornak* nevezünk, ha minden $x, y \in E$ és $\alpha \in K$ esetén

$$u(x+y) = u(x) + u(y);$$
$$u(\alpha.x) = \alpha.u(x)$$

teljesül. Az $E \to F$ lineáris operátorok halmazát $\boldsymbol{L}(E;F)$ jelöli. Az $\boldsymbol{L}(E;K)$ halmazt az E^* szimbólummal rövidítjük, és ezt az E vektortér *algebrai duálisának* nevezzük. Az E^* elemeit, vagyis az $E \to K$ lineáris operátorokat E feletti *lineáris funkcionáloknak*, vagy *lineáris formáknak* nevezzük.

A lineáris operétorok definíciójában szereplő első tulajdonságot *additivitásnak*, és a második tulajdonságot K*-homogenitásnak* nevezzük.

Állítás. Ha E és F vektorterek a K test felett, akkor $\boldsymbol{L}(E;F)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(E;F)$ függvénytérnek.

Bizonyítás. A lineáris operátorok definíciója alapján nyilvánvaló. ■

Definíció. A K test feletti E és F vektortereket *lineárisan izomorfaknak* (vagy csak egyszerűen *izomorfaknak*) nevezzük, ha létezik $E \to F$ lineáris bijekció. Azt mondjuk, hogy a K test feletti E vektortér *véges dimenziós*, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy a K^n és E vektorterek izomorfak.

Példák (*lineáris operátorokra*)

1) Legyen K test és $n \in \mathbb{N}$. Minden $u \in (K^n)^*$ lineáris funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan $p \in K^n$, hogy minden $x \in K^n$ esetén fennáll az

$$u(x) = \sum_{k \in n} p(k)x(k)$$

egyenlőség. Megfordítva, minden $p \in K^n$ esetén a

$$K^n \to K; \quad x \mapsto \sum_{k \in n} p(k)x(k)$$

leképezés lineáris funkcionál a K^n vektortér felett. Ebből következik, hogy a $(K^n)^*$ és K^n vektorterek között létezik egy kitüntetett bijekció, amelyről könnyen belátható, hogy lineáris. Tehát a $(K^n)^*$ és K^n vektorterek kitüntetett módon (vagy a matematikában szokásos terminológia szerint: *kanonikusan*) izomorfak.

2) Legyen K test és $m, n \in \mathbb{N}$. Minden $\mathfrak{a} \in M_{m,n}(K)$ mátrixra jelölje $u_{\mathfrak{a}}$ azt a $K^n \to K^m$ függvényt, amely minden $x \in K^n$ elem n-eshez a

$$\left(\sum_{j \in n} \mathfrak{a}(i,j)x(j) \right)_{i \in m} \in K^m$$

elemet rendeli. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in M_{m,n}(K)$ mátrixra $u_{\mathfrak{a}} \in \boldsymbol{L}(K^n;K^m)$, és az

$$M_{m,n}(K) \to \boldsymbol{L}(K^n;K^m); \quad \mathfrak{a} \mapsto u_{\mathfrak{a}}$$

leképezés kitüntetett lineáris bijekció a $M_{m,n}(K)$ és $\boldsymbol{L}(K^n;K^m)$ vektorterek között. Ez azt jelenti, hogy az $m \times n$-es K-beli együtthatós mátrixok vektortere kanonikusan azonosítható a $K^n \to K^m$ lineáris operátorok vektorterével.

3) Legyen minden $\boldsymbol{a} \in l^1_{\mathbb{K}}$ abszolút szummálható sorozatra

$$u_{\boldsymbol{a}} : l^\infty_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{s}(k).$$

Ekkor minden $\boldsymbol{a} \in l^1_{\mathbb{K}}$ elemre $u_{\boldsymbol{a}} \in (l^\infty_{\mathbb{K}})^*$, és az

$$l^1_{\mathbb{K}} \to (l^\infty_{\mathbb{K}})^*; \quad \boldsymbol{a} \mapsto u_{\boldsymbol{a}}$$

leképezés *lineáris injekció*. Ez azt jelenti, hogy az $l^1_{\mathbb{K}}$ sorozattér az imént felírt lineáris injekció által kanonikusan azonosítható az $(l^\infty_{\mathbb{K}})^*$ algebrai duális egyik lineáris alterével (ti. az $\{u_{\boldsymbol{a}} | \boldsymbol{a} \in l^1_{\mathbb{K}}\}$ halmazzal).

4) Legyen minden $\boldsymbol{a} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ (korlátos) számsorozatra

$$u_{\boldsymbol{a}} : l^1_{\mathbb{K}} \to K; \quad \boldsymbol{s} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{s}(k).$$

Ekkor minden $\boldsymbol{a} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ elemre $u_{\boldsymbol{a}} \in (l^1_{\mathbb{K}})^*$, és az

$$l^\infty_{\mathbb{K}} \to (l^1_{\mathbb{K}})^*; \quad \boldsymbol{a} \mapsto u_{\boldsymbol{a}}$$

leképezés *lineáris injekció*. Ez azt jelenti, hogy az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozattér az imént felírt lineáris injekció által kanonikusan azonosítható az $(l^1_{\mathbb{K}})^*$ algebrai duális egyik lineáris alterével (ti. az $\{u_{\boldsymbol{a}} | \boldsymbol{a} \in l^\infty_{\mathbb{K}}\}$ halmazzal).

5) Legyen $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, és minden $\boldsymbol{a} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ (korlátos) számsorozatra

$$u_{\boldsymbol{a}} : l^p_{\mathbb{K}} \to l^p_{\mathbb{K}}; \quad \boldsymbol{s} \mapsto \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s}.$$

Ekkor minden $\boldsymbol{a} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ elemre $u_{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}})$, és az

$$l^\infty_{\mathbb{K}} \to \boldsymbol{L}(l^p_{\mathbb{K}}; l^p_{\mathbb{K}}); \quad \boldsymbol{a} \mapsto u_{\boldsymbol{a}}$$

leképezés *lineáris injekció*. Ez azt jelenti, hogy az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozattér az imént felírt lineáris injekció által azonosítható az $l^p_{\mathbb{K}} \to l^p_{\mathbb{K}}$ lineáris operátorok vektorterének egyik lineáris alterével (ti. az $\{u_{\boldsymbol{a}} | \boldsymbol{a} \in l^\infty_{\mathbb{K}}\}$ halmazzal).

6) Legyen T halmaz és K test. Minden $t \in T$ pontra legyen

$$\varepsilon_t : \mathscr{F}(T; K) \to K; \quad f \mapsto f(t).$$

Ekkor minden $t \in T$ esetén $\varepsilon_t \in (\mathscr{F}(T; K))^*$, és a

$$T \to (\mathscr{F}(T; K))^*; \quad t \mapsto \varepsilon_t$$

leképezés *injekció*. Ez azt jelenti, hogy a T halmaz az imént felírt injekció által kanonikusan azonosul az $(\mathscr{F}(T; K))^*$ duális tér egyik részhalmazával, ti. az $\{\varepsilon_t | t \in T\}$ halmazzal. Ha T véges, akkor az $\{\varepsilon_t | t \in T\}$ halmaz által generált lineáris altér $(\mathscr{F}(T; K))^*$-ban *egyenlő* $(\mathscr{F}(T; K))^*$-gal. Az ε_t alakú lineáris funcionálokat az $\mathscr{F}(T; K)$ függvénytér felett *helyettesítő funcionáloknak* nevezzük.

Állítás. Legyenek $p, q, r > 1$ olyan valós számok, amelyekre

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

teljesül. Ekkor minden $\boldsymbol{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\boldsymbol{b} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in l^r_{\mathbb{K}}$, és fennáll a

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\boldsymbol{b} \in l^q_{\mathbb{K}}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az elemi Hölder-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{k=0}^{n} (|\boldsymbol{a}(k)|^p)^{\frac{r}{p}} (|\boldsymbol{b}(k)|^q)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ebből következik, hogy $\boldsymbol{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\boldsymbol{b} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in l^r_{\mathbb{K}}$, és határérték-képzéssel kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{b}(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

teljesül. ■

Ebből az állításból következik, hogy ha $p, q > 1$ olyan valós számok, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

amit úgy fejezünk ki, hogy p és q *duális exponensek*, akkor minden $\boldsymbol{a} \in l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatra az

$$u_{\boldsymbol{a}} : l^q_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{b} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(k)$$

leképezés jól értelmezett és eleme $(l^q_{\mathbb{K}})^*$-nak, továbbá könnyen látható, hogy az

$$l^p_{\mathbb{K}} \to (l^q_{\mathbb{K}})^*; \quad \boldsymbol{a} \mapsto u_{\boldsymbol{a}}$$

leképezés *lineáris injekció*. Ez azt jelenti, hogy az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattér az imént felírt lineáris injekció által azonosítható az $(l^q_{\mathbb{K}})^*$ duális tér egyik lineáris alterével, ti. az $\{u_{\boldsymbol{a}} | \boldsymbol{a} \in l^p_{\mathbb{K}}\}$ halmazzal.

Gyakorlatok

1. Legyen T halmaz és K test.

a) A $K^{(T)} := \{f \in \mathscr{F}(T;K)|$ a $\{t \in T|f(t) \neq 0\}$ halmaz véges$\}$ halmaz lineáris altere az $\mathscr{F}(T;K)$ függvénytérnek.

b) Minden $t \in T$ esetén jelölje δ_t azt az elemet $K^{(T)}$-ben, amelyre teljesül az, hogy minden $t' \in T$ elemre

$$\delta_t(t') := \begin{cases} 1 & \text{, ha } t' = t \\ 0 & \text{, ha } t' \neq t. \end{cases}$$

Ekkor a $(\delta_t)_{t\in T}$ rendszer *algebrai bázis* a $K^{(T)}$ vektortérben (**2**. gyakorlat), és a

$$T \to K^{(T)}; \quad t \mapsto \delta_t$$

leképezés *injekció*, tehát a T halmaz kanonikusan azonosul a $K^{(T)}$ vektortér egyik algebrai bázishalmazával. Ezért a $K^{(T)}$ vektortér felfogható a T halmaz olyan "bővítésének", amely vektortér K felett, és amelynek minden eleme "T-beli elemek formális lineáris kombinációja". Ez utóbbi állítás azt a triviális tényt fejezi ki, hogy minden $x \in K^{(T)}$ elemre fennáll az

$$x = \sum_{t\in[x\neq 0]} x(t).\delta_t$$

egyenlőség, ahol $[x \neq 0] := \{t' \in T|x(t') \neq 0\}$ (és az üres halmazra vett összeg definíció szerint egyenlő 0-val), és ha itt $t \in T$ esetén a δ_t szimbólum helyett az őt egyértelműen meghatározó t szimbólumot írjuk, akkor ez a kifejezés átmegy az

$$x = \sum_{t\in[x\neq 0]} x(t).t$$

formális egyenlőségbe. Ezért a $K^{(T)}$ elemeit szokás a T-beli pontok K-beli együtthatókkal vett *formális lineáris kombinációinak* nevezni.

c) A $K^{(T)}$ vektortér rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha F tetszőleges vektortér a K test felett, és $f : T \to F$ tetszőleges függvény, akkor létezik egyetlen olyan $\tilde{f} : K^{(T)} \to F$ lineáris operátor, hogy minden $t \in T$ esetén $\tilde{f}(\delta_t) = f(t)$ teljesül.

d) A c)-ben megfogalmazott tulajdonság lineáris izomorfia erejéig egyértelműen meghatározza a $K^{(T)}$ vektorteret. Pontosabban; ha (E, j) olyan pár, hogy E vektortér K felett, és $j : T \to E$ olyan függvény, hogy minden K feletti F vektortérhez és minden $f : T \to F$ függvényhez létezik egyetlen olyan $\tilde{f} : K^{(T)} \to F$ lineáris operátor, hogy $\tilde{f} \circ j = f$; akkor létezik egyetlen olyan $u : K^{(T)} \to E$ lineáris bijekció, amelyre minden $t \in T$ esetén $u(\delta_t) = j(t)$ teljesül.

(A $K^{(T)}$ vektorteret a T halmaz által generált *szabad vektortérnek* nevezzük.)

2. Legyen E vektortér a K test felett. *Algebrai bázishalmaznak* nevezünk E-ben minden olyan $B \subseteq E$ halmazt, amelyre teljesülnek a következők:

- Minden $H \subseteq B$ véges halmazra, és minden $\lambda \in \mathscr{F}(H;K)$ függvényre, ha $\sum_{b\in H} \lambda(b).b = 0$, akkor minden $b \in H$ esetén $\lambda(b) = 0$. (Ezt a tulajdonságot a B halmaz *lineáris függetlenségének* nevezzük.)

- Minden $x \in E$ elemhez van olyan $H \subseteq B$ véges halmaz, és van olyan $\lambda \in \mathscr{F}(H;K)$ függvény, hogy $x = \sum_{b\in H} \lambda(b).b$. (Ezt a tulajdonságot úgy fejezzük ki, hogy B *algebrai generátorhalmaz.*)

Egy E-ben haladó $(e_i)_{i\in I}$ rendszert lineárisan függetlennek (illetve algebrai generátorrendszernek, illetve algebrai bázisnak) nevezzük, ha az $\{e_i | i \in I\}$ halmaz E-ben lineárisan független (illetve algebrai generátorhalmaz, illetve algebrai bázishalmaz).

a) Minden $H \subseteq E$ lineárisan független halmazhoz, és minden $G \subseteq E$ algebrai generátorhalmazhoz, $H \subseteq G$ esetén létezik olyan $B \subseteq E$ algebrai bázishalmaz E-ben, amelyre $H \subseteq B \subseteq G$ teljesül. Létezik E-ben algebrai bázishalmaz.

b) Minden $H \subseteq E$ lineárisan független halmazhoz, és minden $G \subseteq E$ algebrai generátorhalmazhoz létezik olyan $G' \subseteq G$ halmaz, hogy $H \cap G' = \emptyset$ és $H \cup G'$ algebrai bázishalmaz E-ben. Ez azt jelenti, hogy minden lineárisan független halmaz kiegészíthető egy előre adott algebrai generátorhalmaz elemeivel algebrai bázishalmazzá. (Ezt az állítást *felcserélési tételnek* nevezzük.)

c) Ha B algebrai bázishalmaz E-ben, akkor a

$$K^{(B)} \to E; \quad x \mapsto \sum_{b\in[x\neq 0]} x(b).b$$

leképezés *lineáris bijekció* a $K^{(B)}$ és E vektorterek között. Ez a tény úgy is megfogalmazható, hogy minden vektortér izomorf egy szabad vektortérrel. Pontosabban; ha E vektortér a K test felett, akkor E lineáirsan izomorf bármelyik bázishalmaza által generált K feletti szabad vektortérrel.

d) Ha B és B' algebrai bázishalmazok E-ben, akkor B és B' *ekvipotensek.* Ha már rendelkezésre áll a halmazelméletben a *Card számosságoperáció* (I. fejezet, 3. pont, **40**. gyakorlat), akkor ebből következik, hogy egyértelműen létezik az a számosság, amely $Card(B)$-vel egyenlő, ahol B az E-nek tetszőleges algebrai bázishalmaza; ezt a számosságot nevezzük az E vektortér *algebrai dimenziójának.*

(*Útmutatás.* a) Legyen $\boldsymbol{S}$ a H-t tartalmazó és G által tartalmazott E-beli lineárisan független halmazok halmaza, és $\leq$ a tartalmazás-reláció az $\boldsymbol{S}$ halmaz felett. Ekkor $(\boldsymbol{S}, \leq)$ *induktívan* rendezett halmaz, ezért a Kuratowski-Zorn lemma alapján létezik $\boldsymbol{S}$-nek maximális eleme a $\leq$ rendezés szerint. Ha B maximális elem ebben a rendezett halmazban, akkor B szükségképpen algebrai generátorhalmaz E-ben (ezért szükségképpen algebrai bázishalmaz E-ben), különben létezne olyan $x \in G\backslash B$ vektor, hogy a $B \cup \{x\}$ halmaz lineárisan független és valódi részként tartalmazza B-t, ami ellentmond a B maximalitásának a $\leq$ rendezés szerint. Ebből a $H := \emptyset$ és $G := E$ választással kapjuk, hogy létezik E-ben algebrai bázishalmaz.

b) A $H \cup G$ halmaz olyan algebrai generátorhalmaz E-ben, amely tartalmazza H-t, tehát az a) alapján van olyan B algebrai bázishalmaz E-ben, hogy $H \subseteq B \subseteq H \cup G$. Ekkor a $G' := B \setminus H$ halmaz olyan, amelynek a létezését állítottuk.

c) Az adott leképezés nyilvánvalóan lineáris, és injektív, mert B lineárisan független, továbbá szürjektív is, mert B algebrai generátorhalmaz.

d) A c) szerint a $K^{(B)}$ és $K^{(B')}$ vektorterek lineárisan izomorfak, ezért azt kell megmutatni, hogy ha T és T' olyan halmazok, amelyekre a $K^{(T)}$ és $K^{(T')}$ vektorterek lineárisan izomorfak, akkor T és T' ekvipotensek. Ennek bizonyításához legyen $u : K^{(T)} \to K^{(T')}$ lineáris bijekció, és tekintsük a

$$f : T \to \mathscr{P}(T'); \quad t \mapsto \{t' \in T' | u(\delta_t)(t') \neq 0\}$$

leképezést, ahol minden $t \in T$ esetén δ_t az az elem $K^{(T)}$, amelyre minden $s \in T \setminus \{t\}$ esetén $\delta_t(s) = 0$, és $\delta_t(t) = 1$. Fennáll a

$$T' = \bigcup_{t \in T} f(t)$$

egyenlőség. Valóban, legyen $t' \in T'$, és $y \in K^{(T')}$ olyan elem, amelyre $y(t') \neq 0$. Az u szürjektivitása folytán létezik olyan $x \in K^{(T)}$, hogy $u(x) = y$; ekkor az u linearitása és $x = \sum_{t \in [x \neq 0]} x(t).\delta_t$ miatt

$$y = u(x) = \sum_{t \in [x \neq 0]} x(t) u(\delta_t),$$

így $y(t') \neq 0$ következtében van olyan $t \in T$, amelyre $u(\delta_t)(t') \neq 0$, így $t' \in f(t)$. Világos, hogy minden $t \in T$ esetén $f(t) \subseteq T'$ *véges* halmaz. Ebből azonnal következik, hogy ha T véges, akkor T' is véges. A T és T' szerepét felcserélve ebből kapjuk, hogy két alternatíva van: vagy T és T' mindketten végesek, vagy mindketten végtelenek.

Itt csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor T és T' végtelenek. Az u injektivitása miatt minden $t \in T$ esetén $u(\delta_t) \neq 0$, tehát $f(t) \neq \emptyset$. Ezért a $(\{t\} \times f(t))_{t \in T}$ halmazrendszer nem üres véges halmazok diszjunkt rendszere, így az I. fejezet, 3. pont, **25**. gyakorlat szerint

$$\bigcup_{t \in T} (\{t\} \times f(t))$$

ekvipotens T-vel. Azonban ez a halmaz nagyobb-egyenlő számosságú az $\bigcup_{t \in T} f(t)$ halmaznál, vagyis T'-nél, tehát T nagyobb-egyenlő számosságú T'-nél. Az T és T' szerepét felcserélve, hasonló érveléssel kapjuk, hogy T' is nagyobb-egyenlő számosságú T-nél, így a Schröder-Bernstein-tételt alkalmazva kapjuk, hogy T és T' ekvipotensek.)

3. Legyen E vektortér a K test felett és $F \subseteq E$ lineáris altér. Ekkor az

$$R_F := \{(x, y) \in E \times E | y - x \in F\}$$

halmaz *ekvivalencia-reláció* E felett; az E/R_F faktorhalmazt E/F-fel, és az $E \to E/F$ kanonikus szürjekciót a $\pi_{E/F}$ szimbólummal jelöljük. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $(E/F) \times (E/F) \to E/F$ és $K \times (E/F) \to E/F$ leképezések, amelyekkel ellátva E/F vektortér a K test felett és a $\pi_{E/F} : E \to E/F$ függvény lineáris operátor. Az így meghatározott E/F vektorteret az E vektortér F altér szerinti *lineáris faktorterének*, vagy egyszerűen *faktorterének* nevezzük.

4. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, amelynek minden tagja vektortér a K test felett. Legyen $E := \prod_{i\in I} E_i$ és értelmezzük a következő leképezéseket:

$$E \times E \to E; \quad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto (x_i + y_i)_{i\in I}$$
$$K \times E \to E; \quad (\lambda, (x_i)_{i\in I}) \mapsto (\lambda.x_i)_{i\in I}.$$

Ekkor az E halmaz ezekkel a leképezésekkel ellátva vektortér a K test felett. Ezt a vektorteret nevezzük az $(E_i)_{i\in I}$ vektortér-rendszer *lineáris szorzatterének*, vagy egyszerűen *szorzatterének*. Vegyük észre, hogy ha T halmaz és F vektortér, akkor az $\mathscr{F}(T;F)$ függvénytér *egyenlő* annak az $(F_t)_{t\in T}$ vektortér-rendszernek a lineáris szorzatával, amelyre minden $t \in T$ esetén $F_t := F$.

5. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, amelynek minden tagja vektortér a K test felett. Ekkor a

$$\bigoplus_{i\in I} E_i := \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i | \text{ az } \{i \in I | x_i \neq 0\} \text{ halmaz véges}\}$$

halmaz *lineáris altere* az $(E_i)_{i\in I}$ vektortér-rendszer szorzatterének. Az így meghatározott $\bigoplus_{i\in I} E_i$ vektorteret az $(E_i)_{i\in I}$ vektortér-rendszer *direkt összegének* nevezzük. Tehát a direkt összeg a szorzattér lineáris altere. Ha az $\{i \in I | E_i \neq \{0\}\}$ halmaz véges, akkor az $(E_i)_{i\in I}$ vektortér-rendszer direkt összege *egyenlő* az $(E_i)_{i\in I}$ vektortér-rendszer szorzatterével.

6. Legyen E vektortér a K test felett és L részteste K-nak. Ekkor az E halmaz az E-beli összeadással és a $K \times E \to E$ leképezés $L \times E$-re vett leszűkítésével ellátva vektortér az L test felett; ezt a vektorteret $E_{(L)}$ jelöli. Ha E és F vektorterek a K test felett és L részteste K-nak, akkor egy $u : E \to F$ leképezést *L-lineárisnak* nevezünk, ha u lineáris operátor az $E_{(L)}$ és $F_{(L)}$ vektorterek között, vagyis ha u additív és minden $x \in E$ és $\lambda \in L$ esetén $u(\lambda.x) = \lambda.u(x)$. Mutassuk meg, hogy ha E és F vektorterek a nulla karakterisztikájú K test felett, akkor minden $u : E \to F$ *additív* függvényre teljesül az, hogy minden $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{Q}$ esetén $u(\lambda.x) = \lambda.u(x)$, vagyis az u additív függvény *$\mathbb{Q}$-lineáris*.

7. Legyen E valós vektortér, $E_{\mathbb{C}} := E \times E$ és értelmezzük a következő leképezéseket

$$E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}; \quad ((x,y),(x',y')) \mapsto (x+x', y+y'),$$
$$\mathbb{C} \times E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}; \quad (\alpha,(x,y)) \mapsto (\mathfrak{Re}(\alpha).x - \mathfrak{Im}(\alpha).y, \mathfrak{Im}(\alpha).x + \mathfrak{Re}(\alpha).y).$$

a) Az $E_{\mathbb{C}}$ halmaz ezekkel a leképezésekkel ellátva olyan *komplex vektortér*, hogy a

$$j_E : E \to E_{\mathbb{C}}; \quad x \mapsto (x, 0)$$

leképezés $\mathbb{R}$-lineáris *injekció*. Ezáltal az E valós vektortér azonosul az $E_{\mathbb{C}}$ komplex vektortér egyik $\mathbb{R}$-lineáris alterével. Az $E_{\mathbb{C}}$ komplex vektorteret az E valós vektortér *komplexifikációjának* nevezzük.

b) Ha F komplex vektortér és $u : E \to F$ tetszőleges $\mathbb{R}$-lineáris operátor, akkor létezik egyetlen olyan $u_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to F$ $\mathbb{C}$-lineáris operátor, amelyre $u_{\mathbb{C}} \circ j_E = u$.

c) Legyen (H, j) olyan pár, amelyre teljesülnek a következők

- H komplex vektortér és $j : E \to H$ $\mathbb{R}$-lineáris operátor;

- ha F komplex vektortér és $u : E \to F$ tetszőleges $\mathbb{R}$-lineáris operátor, akkor létezik egyetlen olyan $v : H \to F$ $\mathbb{C}$-lineáris operátor, amelyre $v \circ j = u$.

Ekkor létezik egyetlen olyan $w : E_{\mathbb{C}} \to H$ lineáris izomorfizmus az E és H komplex vektorterek között, amelyre $w \circ j_E = j$ (tehát az $E_{\mathbb{C}}$ és H komplex vektorterek kanonikusan azonosulnak w által).

d) Az $E_{\mathbb{C}}$ komplex vektortér alatt fekvő $(E_{\mathbb{C}})_{(\mathbb{R})}$ valós vektortér kanonikusan azonosítható az E valós vektortér önmagával vett lineáris szorzatterével.

e) A $C : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$; $(x, y) \mapsto (x, -y)$ leképezés additív és olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{C}$ és $z \in E_{\mathbb{C}}$ esetén $C(\lambda.z) = \overline{\lambda}.C(z)$; az ilyen tulajdonságú függvényeket *konjugált lineárisaknak* nevezzük. Továbbá, C bijekció és $C \circ C = id_E$ teljesül. A C leképezést az E_C *kanonikus konjugációjának* nevezzük.

8. Legyen E véges dimenziós valós vektortér és $n := dim(E) > 0$. Jelölje $\boldsymbol{B}$ azon $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ E-beli rendszerek halmazát, amelyek algebrai bázisok E-ben.

a) Ha $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ és $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ algebrai bázisok E-ben, akkor létezik egyetlen olyan $u : E \to E$ lineáris operátor, amelyre teljesül az, hogy minden $1 \leq k \leq n$ számra $u(e_k) = f_k$; ezt az operátort nevezzük az adott algebrai bázisokat *összekötő* operátornak. Bármely két E-beli algebrai bázisra igaz, hogy az összekötő operátor bijekció, így annak determinánsa nem nulla valós szám.

b) Jelölje R azt a relációt a $\boldsymbol{B}$ halmaz felett, amelynek egy E-beli algebrai bázispár pontosan akkor eleme, ha az összekötő operátoruk determinánsa *pozitív*. Ekkor R *ekvivalencia* a $\boldsymbol{B}$ halmaz felett; a $\boldsymbol{B}/R$ faktorhalmazt az $Or(E)$ szimbólummal jelöljük, és az $Or(E)$ elemeit az E véges dimenziós valós vektortér *orientációinak* (vagy *irányításainak*) nevezzük. Az $\mathbb{R}^n$ aritmetikai tér *kanonikus orientációjának* nevezzük az $Or(\mathbb{R}^n)$-nek azt az elemét, amelynek eleme az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa.

c) Jelölje $\boldsymbol{B}'$ az $\mathbb{R}^n \to E$ lineáris bijekciók halmazát és legyen

$$R' := \{(u, v) \in \boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{B}' | det(v^{-1} \circ u) > 0\}.$$

Ekkor R' ekvivalencia a $\boldsymbol{B}'$ halmaz felett és a $\boldsymbol{B}/R := Or(E)$ és $\boldsymbol{B}'/R'$ faktorhalmazok között létezik egy kitüntetett bijekció, ami által $\boldsymbol{B}'/R'$ azonosul az E orientációinak halmazával.

d) Az $Or(E)$ halmaznak pontosan két eleme van. Az $(E, \mathcal{O})$ párt *orientált* (vagy *irányított*) *vektortérnek* nevezzük, ha E nem nulladimenziós, véges dimenziós valós vektortér és $\mathcal{O} \in Or(E)$.

e) Legyen F olyan m-dimenziós *komplex* vektortér, hogy $E = F_{(\mathbb{R})}$ (ekkor $n := dim(E) = 2m$, tehát n szükségképpen páros szám). Ha $(e_k)_{1 \leq k \leq m}$ és $(f_k)_{1 \leq k \leq m}$ algebrai bázisai az F komplex vektortérnek, akkor az $(e_1, ..., e_m, i.e_1, ..., i.e_m)$ és $(f_1, ..., f_m, i.f_1, ..., i.f_m)$ rendszerek olyan algebrai bázisok az E valós vektortérben, amelyek R szerint ekvivalensek, vagyis az ezeket összekötő lineáris operátor determinánsa pozitív. Ezért az E valós vektortérnek létezik *kitüntetett* orientációja, ti. az, amelynek az $(e_1, ..., e_m, i.e_1, ..., i.e_m)$ rendszer eleme, ahol $(e_k)_{1 \leq k \leq m}$ *tetszőleges* algebrai bázisa az F komplex vektortérnek.

2. Függvényalgebrák

Bizonyos függvényterek esetében a lineáris műveletek mellett még egy szorzásművelet is bevezethető, amint az a következő állításból látható.

Állítás. Legyen T halmaz, K test és $A := \mathscr{F}(T;K)$. Minden $x, y \in A$ esetén legyen $x \cdot y$ az a $T \to K$ függvény, amelyre minden $t \in T$ esetén

$$(x \cdot y)(t) := x(t) \cdot y(t).$$

Jelölje $+$ és $.$ az A függvénytér lineáris műveleteit. Ekkor az

$$A \times A \to E; \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

művelet rendelkezik a következő tulajdonsággal:
(ALG) Minden $x, y, z \in A$ és $\alpha \in K$ elemre

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z);\\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z;\\ (y + z) \cdot x &= y \cdot x + z \cdot x;\\ \alpha.(x \cdot y) &= (\alpha.x) \cdot y = x \cdot (\alpha.y).\end{aligned}$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik a testaxiómákból. ■

Definíció. Az $(A, +, ., \cdot)$ négyest *algebrának* nevezzük K test felett, ha az $(A, +, .)$ hármas vektortér a K test felett, és $\cdot : A \times A \to A$ olyan művelet, amelyre az előző állítás (ALG) feltétele teljesül.

Tehát ha T halmaz és K test, akkor az $\mathscr{F}(T;K)$ függvényhalmaz a korábban bevezetett $+$ és $.$ vektortér-műveletekkel, valamint az előző állításban értelmezett $\cdot$ művelettel ellátva algebra a K test felett; a továbbiakban $\mathscr{F}(T;K)$-t ezekkel a műveletekkel ellátva algebrának fogjuk tekinteni. Az ilyen alakú algebrákat *teljes függvényalgebráknak* nevezzük. A teljes függvényalgebrák műveleteit *pontonként értelmezett* műveleteknek szoktuk nevezni.

Megjegyezzük, hogy a K test feletti $(A, +, ., \cdot)$ algebrát akkor nevezzük *kommutatívnak* (illetve *egységelemesnek*), ha a $\cdot$ művelet kommutatív (illetve A-nak létezik neutrális eleme a $\cdot$ művelet szerint). Világos, hogy a teljes függvényalgebrák kommutatívak és egységelemesek.

Definíció. A K test feletti $(A, +, .\cdot)$ algebra *részalgebrájának* nevezünk minden olyan $B \subseteq A$ nem üres halmazt, amelyre minden $x, y \in B$ és $\alpha \in K$ esetén $x+y \in B$, $\alpha.x \in B$ és $x \cdot y \in B$ teljesül.

Ha B részalgebrája a K test feletti $(A, +, ., \cdot)$ algebrának, akkor B nyilvánvalóan lineáris altere a K test feletti $(A, +, .)$ vektortérnek, és a

$$(B, +|_{B\times B}, .|_{K\times B}, \cdot|_{B\times B})$$

négyes szintén algebra a K test felett. A teljes függvényalgebrák részalgebráit *függvényalgebráknak* nevezzük.

Az algebrákra is rendszerint egyetlen betűvel, az alaphalmaz jelével hivatkozunk, és a műveleteiket a $+$, $.$ és $\cdot$ szimbólumokkal jelöljük, ha ez nem vezet félreértésre.

Példák (*algebrákra*)

1) Ha K test, akkor a K vekortér a K-ban értelmezett szorzással ellátva algebra a K test felett, tehát az algebra-fogalom szintén a test-fogalom általánosítása,

2) Tekintsük az $l^1_{\mathbb{K}}$ sorozatteret, és minden $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén legyen

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} : \mathbb{N} \to \mathbb{K}; \quad n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}(k)\boldsymbol{b}(n-k),$$

amit az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ sorozatok *konvolúciós szorzatának* nevezünk. A Mertens-tétel szerint $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} \in l^1_{\mathbb{K}}$, és könnyen ellenőrizhető, hogy az $l^1_{\mathbb{K}}$ sorozattér a $*$ konvolúciós szorzással ellátva egységelemes kommutatív algebra $\mathbb{K}$ felett; ezt az algebrát az abszolút szummálható sorozatok *konvolúciós algebrájának* nevezzük. Ez *nem függvényalgebra*, mert két abszolút szummálható sorozat konvolúciós szorzata általában nem egyenlő azok pontonkénti szorzatával.

3) A $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ halmaz részalgebrája az $l^1_{\mathbb{K}}$ konvolúciós algebrának; az általa meghatározott algebrát az *egyváltozós polinomok algebrájának* nevezzük és $K[X]$-szel jelöljük.

4) Ha K tetszőleges test, akkor a K feletti egyváltozós polinomok $K^{(\mathbb{N})}$ halmaza a pontonként értelmezett összeadással és K-beli elemekkel vett szorzással, valamint a II. fejezet, 1. pont, **12**. gyakorlatban bevezetett szorzással ellátva algebra a K test felett; ezt az algebrát is $K[X]$ jelöli és a K feletti *egyváltozós polinomok algebrájának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a

$$K[X] \to \mathscr{F}(K;K); \quad P \mapsto \left(x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} P(k)x^k \right)$$

leképezés olyan lineáris injekció, amely a $K[X]$ polinomalgebra szorzását az $\mathscr{F}(K;K)$ függvényalgebra szorzásába viszi át.

5) Legyen E vektortér a K test felett, és tekintsük az $E \to E$ lineáris operátorok $\boldsymbol{L}(E;E)$ vektorterét. Ekkor $u, v \in \boldsymbol{L}(E;E)$ esetén $u \circ v \in \boldsymbol{L}(E;E)$, tehát értelmezhetjük az $\boldsymbol{L}(E;E)$ halmaz felett a következő kétváltozós műveletet:

$$\boldsymbol{L}(E;E) \times \boldsymbol{L}(E;E) \to \boldsymbol{L}(E;E); \quad (u,v) \mapsto u \circ v.$$

Könnyen belátható, hogy az $\boldsymbol{L}(E;E)$ vektortér ezzel a művelettel ellátva algebra a K test felett. Ez sem függvényalgebra. Az ilyen alakú algebrákat *teljes operátoralgebráknak* nevezzük, és a teljes operátoralgebrák részalgebrái az *operátoralgebrák.*

6) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és K test. Minden $\mathfrak{a} \in M_n(K)$ kvadratikus mátrixra jelölje $u_{\mathfrak{a}}$ azt a $K^n \to K^n$ függvényt, amely minden $\boldsymbol{x} \in K^n$ elemhez a $\left(\sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{a}(i,j)\boldsymbol{x}(j) \right)_{i \in n} \in K^n$ elemet rendeli. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in M_n(K)$ esetén $u_{\mathfrak{a}} \in \boldsymbol{L}(K^n;K^n)$, és az

$$M_n(K) \to \boldsymbol{L}(K^n;K^n); \quad \mathfrak{a} \mapsto u_{\mathfrak{a}}$$

leképezés (kitüntetett) lineáris bijekció az $M_n(K)$ és $\boldsymbol{L}(K^n; K^n)$ vektorterek között. Az $\boldsymbol{L}(K^n; K^n)$ vektortéren az 5) példában bevezettünk szorzást (a függvénykompozíciót), amivel algebrát kaptunk. Az $\boldsymbol{L}(K^n; K^n)$ operátoralgebra szorzását az előző bijekcióval "áthozva" $M_n(K)$-ra éppen a jól ismert mátrixszorzást kapjuk $M_n(K)$ felett. Tehát $M_n(K)$ a természetesen értelmezett lineáris műveleteivel és a mátrixszorzással ellátva olyan algebraa K test felett, amely kanonikusan azonosítható az $\boldsymbol{L}(K^n; K^n)$ teljes operátoralgebrával. Az ilyen alakú algebrákat K feletti *teljes mátrixalgebráknak* nevezzük, és ezek részalgebrái a K feletti *mátrixalgebrák*. Tehát a definícó szerint a mátrixalgebrák speciális operátoralgebrák. Ha $n > 1$ és K nem a triviális test, akkor a teljes mátrixalgebrák sem függvényalgebrák.

7) Ha $T \subseteq \mathbb{K}$ tetszőleges halmaz, akkor a $T \to \mathbb{K}$ folytonos függvények $\mathscr{C}(T; \mathbb{K})$ vektortere a függvények pontonként értelmezett szorzásával ellátva (általában nem teljes) függvényalgebra. Ennek részalgebrája a $T \to \mathbb{K}$ korlátos és folytonos függvények $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K})$ halmaza.

8) Ha $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz, akkor az $\Omega \to \mathbb{K}$ differenciálható függvények vektortere a függvények pontonként értelmezett szorzásával ellátva (általában nem teljes) függvényalgebra.

Gyakorlatok

1. A K test feletti A és B algebrák közötti *algebra-morfizmusnak* nevezünk minden olyan $u : A \to B$ leképezést, amely lineáris operátor az A és B vektorterek között (tehát *additív* és *K-homogén*), továbbá *multiplikatív* is, vagyis minden $a, a' \in A$ esetén $u(a \cdot a') = u(a) \cdot u(a')$ teljesül. Azt mondjuk, hogy u *algebra-izomorfizmus* az A és B algebrák között, ha $u : A \to B$ olyan bijekció, amely algebra-morfizmus A és B között, és u^{-1} algebra-morfizmus B és A között. Két algebrát *izomorfnak* nevezünk, ha létezik közöttük algebra-izomorfizmus.

a) Ha A és B algebrák a K test felett, akkor minden $A \to B$ bijektív algebra-morfizmus szükségképpen algebra-izomorfizmus.

b) Legyen A algebra a K test felett, és jelölje $X(A)$ az $A \to K$ nem nulla algebra-morfizmusok halmazát. $X(A)$-t az A *karakter-terének* nevezzük, és ennek elemei az A algebra *karakterei*. Ekkor a

$$\mathscr{G}_A : A \to \mathscr{F}(X(A); K); \qquad a \mapsto (\chi \mapsto \chi(a))$$

leképezés algebra-morfizmus az A algebra és a $\mathscr{F}(X(A); K)$ függvényalgebra között; ezt a leképezést nevezzük az A algebra *Gelfand-reprezentációjának*.

c) Ha T halmaz és K test, akkor T kanonikusan azonosítható a $\mathscr{F}(T; K)$ függvényalgebra karakterterének egy részhalmazával, vagyis létezik egy kitüntetett $T \to X(\mathscr{F}(T; K))$ injekció (amely által T azonosítható az $X(\mathscr{F}(T; K))$ karakter-tér egy részhalmazával).

2. Legyen A algebra a K test felett, és $\tilde{A} := K \times A$. Értelmezzük azokat a $+ : A \times A \to A$, $\cdot : A \times A \to A$ és $. : K \times A \to A$ függvényeket, amelyekre minden $a, a' \in A$ és $\alpha, \lambda, \lambda' \in K$ esetén:

$$\begin{gathered}(\lambda, a) + (\lambda', a') := (\lambda + \lambda', a + a');\\ (\lambda, a) \cdot (\lambda', a') := (\lambda \cdot \lambda', \lambda.a' + \lambda'.a + a \cdot a');\\ \lambda'.(\lambda, a) := (\lambda' \cdot \lambda, \lambda'.a).\end{gathered}$$

a) Az $(\tilde{A}, +, ., \cdot)$ négyes olyan *egységelemes* algebra a K test felett, amelynek $\mathbf{1}_{\tilde{A}} := (1, 0)$ a multiplikatív neutrális eleme. Továbbá, a

$$j_A : A \to \tilde{A}; \qquad a \mapsto (0, a)$$

leképezés injektív algebra-morfizmus az A és $\tilde{A}$ algebrák között. Ezáltal az A algebra azonosul $\{(0, a) \in \tilde{A} | a \in A\}$-val, ami részalgebrája $\tilde{A}$-nak.

b) Ha C egységelemes algebra (amelynek egységelemét $\mathbf{1}_C$ jelöli), és $u : A \to C$ algebra-morfizmus, akkor létezik egyetlen olyan $\tilde{u} : \tilde{A} \to C$ algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{u}(\mathbf{1}_{\tilde{A}}) = \mathbf{1}_C$ (vagyis $\tilde{u}$ *egységelem-tartó*), és $\tilde{u} \circ j_A = u$ teljesül.

c) Az előző pontban megfogalmazott tulajdonság izomorfia erejéig egyértelműen meghatározza az $\tilde{A}$ algebrát és a $j_A : A \to \tilde{A}$ leképezést. Ez azt jelenti, hogy ha (B, j) olyan pár, hogy B egységelemes algebra K felett, és $j : A \to B$ algebra-morfizmus, továbbá minden C egységelemes algebrához és $u : A \to C$

algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\tilde{u} : B \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{u} \circ j = u$, akkor egyértelműen létezik olyan $v : \tilde{A} \to B$ algebra-izomorfizmus, amelyre $j \circ v = j_A$.

(Az $\tilde{A}$ egységelemes algebrát az A algebra *standard egységelemesítésének* nevezzük.)

3. Legyen A algebra a K test felett. Egy $\mathfrak{m} \subseteq A$ halmazt *ideálnak* nevezünk A-ban, ha $\mathfrak{m}$ lineáris altere az A vektortérnek, és minden $a \in A$ és $a' \in \mathfrak{m}$ elemre $a \cdot a' \in \mathfrak{m}$ és $a' \cdot a \in \mathfrak{m}$ teljesül. Az A algebra A-tól különböző ideáljait *valódi* ideáloknak nevezzük.

a) Ha $\mathfrak{m}$ ideál A-ban, akkor az $A/\mathfrak{m}$ lineáris faktortér felett egyértelműen létezik olyan $\cdot$ művelet, hogy minden $a, a' \in A$ esetén $\pi_{A/\mathfrak{m}}(a \cdot a') = \pi_{A/\mathfrak{m}}(a) \cdot \pi_{A/\mathfrak{m}}(a')$ teljesül, ahol $\pi_{A/\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$ a kanonikus szürjekció. Az $A/\mathfrak{m}$ vektorteret ezzel a művelettel ellátva az A algebra $\mathfrak{m}$ ideál szerinti *faktoralgebrájának* nevezzük.

b) Ha A kommutatív és egységelemes, továbbá $\mathfrak{m}$ ideál A-ban, akkor az $(A/\mathfrak{m}, +, \cdot)$ hármas pontosan akkor test, ha $\mathfrak{m}$ tartalmazás tekintetében maximális valódi ideál A-ban.

c) Ha K test és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > 1$, akkor az $M_n(K)$ mátrixalgebrának $\{0\}$ az egyetlen valódi ideálja.

(*Útmutatás.* c) Legyen K test és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > 1$. Minden $i, j \in n$ számra jelölje $\mathbf{e}_{i,j}$ azt az elemet $M_n(K)$-ban, amelyre minden $k, l \in n$ esetén $\mathbf{e}_{i,j}(k, l) = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$, ahol $\delta_{i,k}$ (a *Kronecker-delta*) az az elem K-ban, amely 1, ha $i = k$, és 0, ha $i \neq k$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $i, j, k, l \in n$ esetén minden $M_n(K) \ni a$-ra $\mathbf{e}_{i,k} \cdot a \cdot \mathbf{e}_{l,j} = a(k, l).\mathbf{e}_{i,j}$. Nyilvánvaló az is, hogy minden $M_n(K) \ni a$-ra

$$a = \sum_{i,j \in n} a(i, j).\mathbf{e}_{i,j}$$

teljesül. Legyen most $\mathfrak{m} \subseteq M_n(K)$ olyan ideál, hogy $\mathfrak{m} \neq \{0\}$. Legyen $a \in \mathfrak{m}$ tetszőlegesen rögzített nem nulla elem. Legyenek $k, l \in n$ olyan indexek, hogy $a(k, l) \neq 0$. Ekkor minden $i, j \in n$ esetén

$$\mathbf{e}_{i,j} = a(k, l)^{-1}.(\mathbf{e}_{i,k} \cdot a \cdot \mathbf{e}_{l,j}) \in \mathfrak{m},$$

amiből következik, hogy $\mathfrak{m} = M_n(K)$.)

4. Tekintsük a következő 2×2-es komplex mátrixokból álló halmazt:

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

a) Ha $q, q' \in \mathbb{H}$, akkor $q + q' \in \mathbb{H}$ és $q \cdot q' \in \mathbb{H}$, ahol $+$ és $\cdot$ a mátrixösszeadást és a mátrixszorzást jelöli.

b) Ha $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, akkor a q mátrix *invertálható* és $q^{-1} \in \mathbb{H}$.

c) A $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ hármasra a szorzás kommutativitásának kivételével az összes test-axióma teljesül; az ilyen tulajdonságú objektumokat *ferdetesteknek* nevezzük. Az imént értelmezett ferdetest a *kvaternió-ferdetest*, és a $\mathbb{H}$ elemei a *kvaterniók*.

d) A $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$; $z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^* \end{pmatrix}$ leképezés injektív és művelettartó; ezáltal a komplex számok teste kanonikusan azonosul a kvaternió-ferdetest egyik résztestével.

e) Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $q \in \mathbb{H}$ esetén $\lambda.q \in \mathbb{H}$, továbbá, ha . jelöli az

$$\mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}; \quad (\lambda, q) \mapsto \lambda.q$$

leképezést, akkor a $(\mathbb{H}, +, ., \cdot)$ négyes algebra $\mathbb{R}$ felett. Ebben a valós algebrában az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

elemek algebrai bázist alkotnak, tehát ez valós négydimenziós algebra.

3. Normált terek

Nyilvánvaló, hogy a $\mathbb{K}$ testtel kapcsolatos egyváltozós elemi analízis létezése a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény létezésén és annak tulajdonságain múlik. Ezért várható, hogy a többdimenziós analízis felépítéséhez szükség lesz az abszolútérték-függvény fogalmának többdimenziós általánosítására.

Definíció. Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Egy $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ leképezést *norma-függvénynek* vagy egyszerűen *normának* nevezünk E felett, ha teljesülnek rá a következők.

(NO_I) Minden $x \in E$ esetén $\|x\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$.

(NO_{II}) Minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in E$ esetén $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$.

(NO_{III}) Minden $x, y \in E$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Az $(E, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük $\mathbb{K}$ felett, ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $\|\cdot\|$ norma-függvény E felett.

Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $x, y \in E$ esetén

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül, mert az (NO_{II}) miatt minden $z \in E$ vektorra $\|-z\| = \|z\|$, és a háromszög-egyenlőtlenség alapján $\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\|$, továbbá $\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\| = \|x\| + \|x - y\|$.

Állítás. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, F vektortér és $u : F \to E$ lineáris *injekció*, akkor a $\|\cdot\| \circ u : F \to \mathbb{R}_+$ leképezés norma F felett.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|$ normára (NO_I) teljesül, ezért ha $x \in F$, akkor $(\|\cdot\| \circ u)(x) = 0$ pontosan akkor igaz, ha $u(x) = 0$, ami az u injektivitása folytán azzal ekvivalens, hogy $x = 0$. Ezért (NO_I) a $\|\cdot\| \circ u$-ra is teljesül. A $\|\cdot\|$ normára (NO_{II}) teljesül, ezért az u homogenitása miatt (NO_{II}) a $\|\cdot\| \circ u$-ra is igaz. Végül, a $\|\cdot\|$ normára (NO_{III}) teljesül, így az u additivitása folytán (NO_{III}) a $\|\cdot\| \circ u$-ra is igaz. ■

Definíció. Az $(E, \|\cdot\|)$ normált tér *normált alterének* nevezünk minden olyan $(F, \|\cdot\| \circ u_F)$ párt, amelyre teljesül az, hogy F lineáris altere az E vektortérnek és u_F az $F \to E$ kanonikus injekció (vagyis $\|\cdot\| \circ u_F$ egyenlő a $\|\cdot\|$ norma F-re vett leszűkítésével).

Példák (*normált terekre*)

1) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \geq 1$ valós szám. Ekkor a

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{x}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés az elemi Minkowski-egyenlőtlenség alapján norma a $\mathbb{K}^n$ vektortér felett. A $\|\cdot\|_2$ normát (amelynek fontos speciális tulajdonságai vannak) *euklidészi normának* nevezzük $\mathbb{K}^n$ felett.

2) Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+ \quad \boldsymbol{x} \mapsto \max_{0\le k\le n-1} |\boldsymbol{x}(k)|$$

leképezés norma $\mathbb{K}^n$ felett; ezt nevezzük *max-normának* $\mathbb{K}^n$ felett.

3) Legyen $p \ge 1$ valós szám, és tekintsük az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatteret. Ekkor a

$$\|\cdot\|_p : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{x}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés norma $l^p_{\mathbb{K}}$ felett. A $\|\cdot\|_2$ normát (amelynek fontos speciális tulajdonságai vannak) *euklidészi normának* nevezzük $l^2_{\mathbb{K}}$ felett.

4) Az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozattér felett a

$$\|\cdot\|_\infty : l^\infty_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+ \quad \boldsymbol{x} \mapsto \sup_{k\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{x}(k)|$$

leképezés norma; ezt nevezzük *sup-normának* $l^\infty_{\mathbb{K}}$ felett.

5) Az előző példa a következőképpen általánosítható. Legyen T nem üres halmaz, és a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ terén tekintsük a

$$\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in T} |f(t)|$$

leképezést. Ez norma a $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ függvénytér felett, és ezt *sup-normának* nevezzük $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ felett.

6) Tekintsük a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sorozatteret, amely minden $p \ge 1$ valós számra lineáris altere az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattérnek. Ezért a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ felett minden $p \ge 1$ valós számra vehetjük a $\|\cdot\|_p$ norma leszűkítését.

Definíció. Az $(A, \|\cdot\|)$ párt *normált algebrának* nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha A algebra $\mathbb{K}$ felett, és $\|\cdot\|$ norma az A vektortér felett, továbbá minden $a, b \in A$ esetén

$$\|a \cdot b\| \le \|a\|\|b\|$$

teljesül (amit úgy fejezünk ki, hogy a $\|\cdot\|$ norma *szubmultiplikatív*).

Példák (*normált algebrákra*)

1) Legyen T halmaz és $A := \mathscr{F}^b(T;\mathbb{K})$ a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények algebrája. Ekkor A a sup-normával ellátva normált algebra. Speciálisan:

- az $l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozattér a pontonként értelmezett szorzással és a $\|\cdot\|_\infty$ sup-normával ellátva normált algebra;

- ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\mathbb{K}^n$ a komponensenként értelmezett szorzással és a $\|\cdot\|_\infty$ max-normával ellátva normált algebra.

2) Az $l^1_{\mathbb{K}}$ sorozattér a konvolúciós szorzással és a $\|\cdot\|_1$ normával ellátva normált algebra.

Később majd bizonyos operátoralgebrákon is bevezetünk olyan normát, amivel azok normált algebrák lesznek.

Gyakorlatok

1. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $(E, \|\cdot\|)$ normált térre $f \circ \|\cdot\|$ norma E felett. Ekkor egyértelműen létezik olyan $C > 0$ valós szám, amelyre minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(t) = C \cdot t$.

2. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzítve. Ha $\boldsymbol{a} \in (\mathbb{R}^+)^n$ tetszőleges és $p \geq 1$ valós szám, akkor a

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{a}(k)|\boldsymbol{x}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \max_{0 \leq k \leq n-1} (\boldsymbol{a}(k)|\boldsymbol{x}(k)|)$$

leképezések normák $\mathbb{K}^n$ felett. Minden $p \geq 1$ valós számra a

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} |\boldsymbol{x}(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\sum_{j=0}^{k} |\boldsymbol{x}(j)| \right)$$

leképezések normák $\mathbb{K}^n$ felett.

3. A $\mathbb{H} \to \mathbb{R}_+;\ q \mapsto \sqrt{det(q)}$ leképezés *abszolútérték-függvény* a $\mathbb{H}$ kvaternió ferdetest felett, vagyis teljesülnek rá a (VA_I), (VA_{II}) és (VA_{III}) tulajdonságok. Ennek a függvénynek a leszűkítése $\mathbb{C}$-re (a $\mathbb{C}$-t a $\mathbb{H}$ résztestének tekintve) pontosan a $\mathbb{C}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvény. Ezzel az abszolútérték-függvénnyel ellátva a kvaternió ferdetest valós, négydimenziós, nem kommutatív normált algebra.

4. Minden valós vagy komplex vektortér felett *létezik* norma.

(*Útmutatás.* Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett és B algebrai bázishalmaz E-ben (IV. fejezet, 1. pont, **2**. gyakorlat). Ekkor a

$$\mathbb{K}^{(B)} \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \max_{b \in B} |f(b)|$$

leképezés, és minden $p \geq 1$ valós számra a

$$\mathbb{K}^{(B)} \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \left(\sum_{b \in B} |f(b)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés is norma a $\mathbb{K}^{(B)}$ függvénytér felett. Tehát $\mathbb{K}^{(B)}$ felett létezik norma. Ha $u : \mathbb{K}^{(B)} \to E$ a kanonikus lineáris bijekció (IV. fejezet, 1. pont, **2**. gyakorlat), és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^{(B)}$ felett, akkor $\|\cdot\| \circ u^{-1}$ norma E felett.)

V. METRIKUS TEREK

Az analízis legfontosabb feladata bizonyos matematikai objektumok egymáshoz való "közelségének" pontos és tartalmas értelmezése. A valós számok fogalmának bevezetése után lehetőség nyílik arra, hogy egy halmaz pontjainak egymástól mért "távolságát" pozitív valós számokkal mérjük. Pontosabban: ha egy halmaz minden elempárjához egy nemnegatív valós számot rendelünk, akkor azt mondhatjuk, hogy a halmaz két pontja ε-közelségben van egymáshoz, ahol $\varepsilon > 0$ valós szám, ha a két pont által meghatározott párhoz rendelt valós szám (vagyis azok "távolsága") kisebb ε-nál.

Természetesen ahhoz, hogy az így értelmezett közelség-fogalom rendelkezzék a vele szemben támasztható természetes elvárásoknak; a halmazzal kapcsolatban bevezetett távolság-függvényre szükséges néhány feltételt előírni. A fejezet első pontjában éppen ilyan követelményeket fogalmazunk meg a *metrikák*, vagy *távolság-függvények* definíciójában; ezek az (M_I), (M_{II}) és (M_{III}) feltételek. Az (M, d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha d metrika az M halmaz felett.

Kiderül, hogy minden halmazon bevezethető távolság-fogalom, és minden végtelen halmaz felett sokféle metrika létezik. Ezért különös jelentősége van minden olyan állításnak, amely valamely halmazon valamilyen szempontból *kitüntetett* metrikák létezését mondja ki. Ilyen metrikák test felett az abszolútértékekből, illetve vektorterek felett a normákból származtatható metrikák.

A metrikák segítségével azonnal megadható természetes módon a *gömbök* fogalma, és azok által bevezethetők a *nyílt* és a *zárt* halmazok. A fejezetben mindenütt érezhető lesz a metrika által meghatározott nyílthalmaz-fogalomnak, vagyis a metrika által generált *topológiának* a jelentősége. A második pontban csak a legelemibb topológiai fogalmakról lesz szó. Értelmezzük a metrikák, illetve normák *ekvivalenciáját*, ami azt jelenti hogy az általuk meghatározott nyílt halmazok ugyanazok, továbbá jellemezni fogjuk a normák ekvivalenciáját. Mivel a metrikus és normált terekkel kapcsolatban sok olyan tulajdonság, illetve objektum megadható, amelyek a metrikától csak az általa meghatározott nyílt halmazokon keresztül függenek (ezeket nevezzük *topologikus* tulajdonságoknak, illetve objektumoknak), így fontos a pontok *környezeteinek* fogalma, hiszen látható lesz, hogy minden olyan tulajdonság, illetve objektum, amelyet környezetek segítségével értelmezünk automatikusan topologikus jellegű lesz.

Az egyik legfontosabb tulajdonság a metrikus térben haladó sorozatok *konvergenciája*; ezzel foglalkozunk a harmadik pontban. Ezután könnyen értelmezhető a normált térben haladó sorok konvergenciája. Látjuk majd, hogy a konvergens sorozatokkal jellemezhetők a halmazok *érintési* és *torlódási pontjai*. Itt vezetjük be a halmazok *sűrűségének* és a metrikus terek *szeparabilitásának* fogalmát. Az analízisben sok olyan tétel van, amelyek érvényességéhez szükséges a tételben szereplő metrikus vagy normált tér szeparabilitása.

Lényegesek azok a módszerek, amelyek segíségével már létező metrikus terekből újabbak állíthatók elő. Már az első pontban bemutatunk ilyen (egészen triviális) eljárást; a *metrikus alterek* konstrukcióját. A negyedik pontban metrikus és normált terek *szorzatáról* lesz szó. A metrikus terek szorzása lehetővé teszi egyszerűbb

metrikus terekből bonyolultabbak előállítását. Megvizsgáljuk a metrikus szorzatterek néhány topologikus tulajdonságát, valamint a metrikus szorzatterekben haladó sorozatok konvergenciáját.

A $\mathbb{K}$ testtel kapcsolatos topológiai meggondolásokban fontos szerepet játszanak az euklidészi metrika szerint korlátos és zárt halmazok. Ezek szerepét a metrikus terekben speciális korlátos és zárt halmazok veszik át: a *kompakt* halmazok. Az ötödik pontban értelmezzük a kompakt, relatív kompakt és teljesen korlátos halmazokat, továbbá megvizsgáljuk ezek egymással való kapcsolatait. Egyszerű topológiai jellemzést adunk metrikus terek kompaktságára, majd igazoljuk a Bolzano-Weierstrass tételt, ami gyakorlati szempontból jól használható jellemzése a halmazok kompaktságának sorozatok segítségével. Bebizonyítjuk, hogy minden véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett bármely két norma ekvivalens. Ez elvi fontosságú tény, mert megmutatja, hogy a $\mathbb{K}$ feletti véges dimenziós vektorterek felett létezik egy nemtriviális kitüntetett nyílthalmaz-fogalom (azaz topológia), bár az általános esetben sem kitüntetett norma, sem kitüntetett nemtriviális metrika nem létezik rajtuk.

A 6., 7. és 8. pontban a metrikus terek között ható függvényeket vizsgáljuk. A hatodik pontban bevezetjük az általános *határérték-fogalmat*, és megvizsgáljuk annak tulajdonságait. A hetedik pontban értelmezzük a metrikus terek között ható függvények *folytonosságát* és *egyenletes folytonosságát*, majd bevezetünk néhány speciális egyenletesen folytonos függvény-típust. Részletesen elemezzük a metrikus téren értelmezett, valós értékű nemtriviális folytonos függvények létezésének problémáját, és megmutatjuk, hogy metrikus térben a zárt halmazok karakterisztikus függvényei bizonyos értelemben jól közelíthetők folytonos függvényekkel. A nyolcadik pontban olyan tényekről lesz szó, amelyek a kompakt halmazokon folytonos függvények speciális tulajdonságaival kapcsolatosak. Az eredmények alkalmazásával lehetővé válik a véges dimenziós normált terek kompakt részhalmazainak újabb jellemzése, továbbá viszonylag elemi bizonyítást adhatunk az *algebra alaptételére*. A metrikus terek közötti folytonos függvényekre vonatkozó *Heine-tétel* alapján igzoljuk a konstruktív függvénytan egyik nevezetes tételét: a a folytonos függvények *Bernstein-polinomokkal* való egyenletes közelíthetőségének tételét.

A metrikus terek elméletében egészen fontos szerepet játszik a *teljesség* fogalma; ennek a témának szenteljük a kilencedik pontot. Metrikus terekre könnyen általánosható a *Cauchy-sorozatok* fogalma, és kiderül, hogy nagyon sok metrikus térben léteznek nem konvergens Cauchy-sorozatok. A *teljes metrikus terek* éppen azok, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens. A Cauchy-sorozatok segítségével megadható a teljesen korlátos halmazok Hausdorff-féle jellemzése, amiből a halmazok kompaktságának metrikus karakterizációja származtatható. Bevezetjük a teljes normált terek, vagyis a *Banach-terek* fogalmát, és megmutatjuk a normált terek teljessége szoros kapcsolatban áll az abszolút konvergens sorok konvergenciájával. Bebizonyítjuk a metrikus tér sűrű részhalmazán értelmezett, teljes metrikus térbe ható, egyenletesen folytonos függvények egyértelmű folytonos kiterjeszthetőségét. Azt is látni fogjuk, hogy minden metrikus tér *teljessé tehető*, tehát azonosítható egy teljes metrikus tér sűrű metrikus alterével. A teljes metrikus terekkel kapcsolatos számos egzisztencia-tétel közül egy viszonylag egyszerű, de nagyon jól alkalmazható állítást bizonyítunk: a *Banach-féle fixponttételt*. Később (a

VII. és X. fejezetben) ennek segítségével tudjuk bizonyítani az *inverzfüggvény-tételt* és a közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos Cauchy-feladat megoldásának lokális egzisztenciáját.

Már a valós változós, valós értékű függvények elemi analízise közben is látható, hogy az intervallumon értelmezett folytonos függvényeknek fontos speciális tulajdonságaik vannak. Az intervallumok topológiai szempontú általánosításai metrikus terekben az az *ívszerűen összefüggő* és az *összefüggő* halmazok. Ezekkel a tizedik pontban foglalkozunk.

A fejezet utolsó pontjában a függvénysoroztok és függvénysorok *pontonkénti*, *lokálisan egyenletes* és *egyenletes* konvergenciájáról lesz szó, és megvizsgáljuk a függvények bizonyos topológiai tulajdonságainak *öröklődését* a határérték--függvényekre.

Irodalomjegyzék

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Topologie générale*, Hermann, Paris

2. K. Kuratowski, *Topology*, vols. I-II, Acad. Press, 1968.

3. J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Co., 1957.

4. Császár Ákos, *Bevezetés az általános topológiába*, Akadémiai Kiadó, 1970.

5. H. Schubert, *Topológia*, Műszaki Könyvkiadó, 1986.

1. A metrikus terek alaptulajdonságai

Definíció. Ha M halmaz, akkor egy $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ függvényt *metrikának*, vagy *távolság-függvénynek* nevezünk M felett, ha d-re teljesülnek a következők.

(M_I) Minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) = 0$ ekvivalens azzal, hogy $x = y$.

(M_{II}) Minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) = d(y, x)$ (*szimmetria*).

(M_{III}) Minden $x, y, z \in M$ esetén $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Az (M, d) párt *metrikus térnek* nevezzük, ha d metrika az M halmaz felett.

Példák (*metrikus terekre*)

1) Legyen M halmaz és

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \neq y \\ 0 & \text{, ha } x = y. \end{cases}$$

Ekkor d metrika M felett, amit az M halmaz feletti *diszkrét* metrikának nevezünk. Az (M, d) párt *diszkrét metrikus térnek* nevezzük, ha d a diszkrét metrika az M halmaz felett.

2) Ha d metrika az M halmaz felett, akkor az

$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \min(d(x, y), 1),$$
$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}$$

függvények is metrikák a M felett.

3) Legyen K test és $|\cdot|$ abszolútérték K felett. Ekkor a

$$K \times K \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

függvény metrika K felett, amit az $|\cdot|$ *abszolútérték által generált* K feletti metrikának nevezünk, és $d_{|\cdot|}$-kel jelölünk. Ha $|\cdot|$ az improprius abszolútérték K felett, akkor $d_{|\cdot|}$ a diszkrét metrika K felett.

4) Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az

$$E \times E \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

függvény metrika E felett, amit a $\|\cdot\|$ *norma által generált* E feletti metrikának nevezünk, és $d_{\|\cdot\|}$-val jelölünk. Speciálisan, minden $p \geq 1$ valós számra a $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattéren vehetjük a $\|\cdot\|_p$ norma által generált metrikát. Továbbá, a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sorozattéren minden $p \geq 1$ valós számra vehetjük a $\|\cdot\|_p$ norma $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-re vett leszűkítése által generált metrikát.

Definíció. Ha E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor egy E feletti d metrikát *normálhatónak* nevezünk, ha létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $d = d_{\|\cdot\|}$.

Nyilvánvaló, hogy ha E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor minden E feletti $\|\cdot\|$ normára és $x \in E$ vektorra $\|x\| = \|x - 0\| = d_{\|\cdot\|}(x, 0)$, ezért minden E feletti d normálható metrikához *egyértelműen* létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $d = d_{\|\cdot\|}$.

Állítás. Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett, és d metrika E felett. A d pontosan akkor normálható, ha teljesülnek rá a következők.

a) Minden $x, y, z \in E$ esetén $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, vagyis d *transzláció-invariáns.*

b) Minden $x, y \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $d(\lambda.x, \lambda.y) = |\lambda| d(x, y)$.

Bizonyítás. Ha $\|\cdot\|$ olyan norma E felett, amelyre $d = d_{\|\cdot\|}$, akkor $x, y, z \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$d(x + z, y + z) := \|(x + z) - (y + x)\| = \|x - y\| =: d(x, y),$$

továbbá $x, y \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén az (NO_{II}) szerint

$$d(\lambda.x, \lambda.y) := \|\lambda.x - \lambda.y\| = \|\lambda.(x - y)\| = |\lambda| \|x - y\| =: |\lambda| d(x, y),$$

tehát d-re a) és b) teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy d-re a) és b) teljesül, és értelmezzük a

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto d(x, 0)$$

függvény. Állítjuk, hogy ez az a norma E felett, amelyre $d = d_{\|\cdot\|}$. Valóban, a $\|\cdot\|$ függvényre vonatkozóan (NO_I) azt jelenti, hogy minden $x \in E$ vektorra, a $d(x, 0) =: \|x\| = 0$ és $x = 0$ egyenlőségek ekvivalensek. Ez a d-re vonatkozó (M_I) feltételből nyilvánvalóan következik. Továbbá, a $\|\cdot\|$ függvényre (NO_{II}) is igaz, mert minden $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén a b) alkalmazásával

$$\|\lambda.x\| := d(\lambda.x, 0) = d(\lambda.x, \lambda.0) = |\lambda| d(x, 0) =: |\lambda| \|x\|.$$

A $\|\cdot\|$ függvényre (NO_{III}) is teljesül, mert ha $x, y, z \in E$, akkor az a) alapján $d(x+y, y) = d(x+y, 0+y) = d(x, 0)$, így a d-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből

$$\|x + y\| := d(x + y, 0) \leq d(x + y, y) + d(y, 0) = d(x, 0) + d(y, 0) =: \|x\| + \|y\|$$

következik. Ezzel beláttuk, hogy a $\|\cdot\|$ függvény norma E felett. Ha $x, y \in E$, akkor az a) alapján $d(x - y, 0) = d((x - y) + y, 0 + y) = d(x, y)$, így

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\| := d(x - y, 0) = d(x, y),$$

vagyis $d = d_{\|\cdot\|}$, tehát a d metrika normálható. ■

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér, M' halmaz és $f : M' \to M$ injekció, akkor az

$$d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto d(f(x), f(y))$$

leképezés metrika M' felett.

Bizonyítás. Ha $x, y \in M'$, akkor a d-re vonatkozó (M_I) feltétel és f injektivitása folytán

$$d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y,$$

tehát d'-re (M_I) teljesül. Ha $x, y \in M$, akkor a d szimmetrikussága miatt

$$d'(x,y) := d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) =: d'(y,x),$$

tehát d' is szimmetrikus. Végül, ha $x, y, z \in M$, akkor a d-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$d'(x,y) := d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(x)) =: d'(x,z) + d'(z,y)$$

adódik, tehát a háromszög-egyenlőtlenség d'-re is igaz. ■

Az előző állítás speciális esete az, amikor (M, d) metrikus tér, $M' \subseteq M$, és $f := id_{M'}$; ekkor az állításban értelmezett M' feletti metrika nyilvánvalóan egyenlő a $d|_{M' \times M'}$ leszűkített függvénnyel.

Definíció. Az (M, d) metrikus tér *metrikus alterének* nevezünk minden olyan (M', d') metrikus teret, amelyre $M' \subseteq M$ és $d' = d|_{M' \times M'}$.

Definíció. Ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, akkor egy $f : M \to M'$ leképezést *izometriának* nevezünk a d és d' metrikák szerint, ha minden $x, y \in M$ esetén

$$d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

teljesül. Az (M, d) és (M', d') metrikus tereket *izomorfaknak* nevezzük, ha létezik olyan $M \to M'$ bijekció, amely izometria a d és d' metrikák szerint.

Könnyen látható, hogy

- ha (M, d) metrikus tér, akkor az (M, d) és (M, d) metrikus terek izomorfak, vagyis az izomorfia *reflexív*, hiszen az id_M függvény bijektív izometria;
- ha az (M, d) és (M', d') metrikus terek izomorfak, akkor az (M', d') és (M, d) metrikus terek is izomorfak, vagyis az izomorfia *szimmetrikus*, hiszen ha $f : M \to M'$ bijektív izometria a d és d' metrikák szerint, akkor az $f^{-1} : M' \to M$ inverzfüggvény bijektív izometria a d' és d metrikák szerint;
- ha az (M, d) és (M', d') metrikus terek izomorfak, és az (M', d') és (M'', d'') metrikus terek izomorfak, akkor az (M, d) és (M'', d'') metrikus terek izomorfak, vagyis az izomorfia *tranzitív*, hiszen ha $f : M \to M'$ bijektív izometria a d és d' metrikák szerint, és $g : M' \to M''$ bijektív izometria a d' és d'' metrikák szerint, akkor a $g \circ f : M \to M''$ függvény bijektív izometria a d és d'' metrikák szerint.

Ez azt jelenti, hogy a metrikus terek izomorfiája, mint kapcsolat rendelkezik az ekvivalencia-relációk tulajdonságaival.

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra és minden $r \geq 0$ valós számra a

$$B_r(\mathfrak{a}; d) := \{x \in M | d(x, \mathfrak{a}) < r\}$$

halmazt $\mathfrak{a}$ *középpontú, r-sugarú nyílt gömbnek* nevezzük a d metrika szerint, és a

$$\overline{B}_r(\mathfrak{a}; d) := \{x \in M | d(x, \mathfrak{a}) \leq r\}$$

halmazt $\mathfrak{a}$ *középpontú, r-sugarú zárt gömbnek* nevezzük a d metrika szerint, és az

$$S_r(\mathfrak{a}; d) := \{x \in M | d(x, \mathfrak{a}) = r\}$$

halmazt $\mathfrak{a}$ *középpontú, r-sugarú gömbfelületnek* nevezzük a d metrika szerint. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti halmazokról van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk, és ilyenkor a kevésbé pontos $B_r(\mathfrak{a})$, $\overline{B}_r(\mathfrak{a})$ és $S_r(\mathfrak{a})$ jelöléseket alkalmazzuk.

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmazt *korlátosnak* nevezünk a d metrika szerint, ha $E = \emptyset$ vagy létezik olyan $\mathfrak{a} \in M$ és $r > 0$ valós szám, hogy $E \subseteq B_r(\mathfrak{a}; d)$. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti korlátosságról van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk.

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ nem üres halmaz *átmérőjének* nevezzük (a d metrika szerint) a

$$diam_d(E) := \sup_{(x,y) \in E \times E} d(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

számot. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti átmérőről van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk, és ilyenkor a kevésbé pontos $diam(E)$ jelölést alkalmazzuk.

Megjegyezzük, hogy ha (M, d) metrikus tér, $\mathfrak{a} \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+$, akkor a metrika szimmetrikussága és a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$diam_d(B_r(\mathfrak{a}; d)) \leq diam_d(\overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)) \leq 2r,$$

hiszen $x, y \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)$ esetén $d(x, y) \leq d(x, \mathfrak{a}) + d(\mathfrak{a}, y) \leq r + r = 2r$. Azonban az egyenlőtlenségek helyett általában nem írhatunk egyenlőséget. Ha például (M, d) diszkrét metrikus tér, akkor minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra $B_1(\mathfrak{a}; d) = \{\mathfrak{a}\}$, tehát $diam_d(B_1(\mathfrak{a}; d)) = 0$, ugyanakkor $\overline{B}_1(\mathfrak{a}; d) = M$, tehát ha M legalább két elemű halmaz, akkor $diam_d(\overline{B}_1(\mathfrak{a}; d)) = 1$.

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér, akkor

a) az M minden korlátos részhalmazának minden részhalmaza korlátos;

b) az M véges sok korlátos részhalmazának uniója korlátos;

c) egy $E \subseteq M$ nem üres halmaz pontosan akkor korlátos, ha $diam(E) < +\infty$.

Bizonyítás. a) A korlátosság definíciója alapján nyilvánvaló.

b) Legyen $(E_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy I nem üres, véges halmaz és minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M$ korlátos halmaz. Ekkor a definíció szerint kiválaszthatunk olyan $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ rendszert M-ben és olyan $(r_i)_{i \in I}$ rendszert $\mathbb{R}^+$-ban, hogy minden $i \in I$ indexre $E_i \subseteq B_{r_i}(\mathfrak{a}_i; d)$. Legyen $\mathfrak{a} \in M$ egy rögzített pont. Ha $x \in \bigcup_{i \in I} E_i$, akkor

van olyan $i \in I$, amelyre $x \in E_i$, tehát $d(x, \mathfrak{a}_i) < r_i$, így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(x, \mathfrak{a}) \leq d(x, \mathfrak{a}_i) + d(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}) < r_i + d(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}) \leq \left(\max_{j \in I} r_j\right) + \left(\max_{j \in I} d(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a})\right).$$

Ez azt mutatja, hogy az

$$r := \left(\max_{j \in I} r_j\right) + \left(\max_{j \in I} d(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a})\right)$$

számra $\bigcup_{i \in I} E_i \subseteq B_r(\mathfrak{a}; d)$ teljesül, vagyis $\bigcup_{i \in I} E_i$ korlátos halmaz.

c) Ha E korlátos és $\mathfrak{a} \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $E \subseteq B_r(\mathfrak{a}; d)$, akkor $diam(E) \leq diam(B_r(\mathfrak{a})) \leq 2r < +\infty$. Megfordítva, ha $diam(E) < +\infty$ és $r \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $diam(E) < r$, akkor bármely $\mathfrak{a} \in E$ pontra $E \subseteq B_r(\mathfrak{a}; d)$, hiszen $x \in E$ esetén $d(x, \mathfrak{a}) \leq diam(E) < r$, ezért E korlátos halmaz. ■

Definíció. Ha T halmaz és (M, d) metrikus tér, akkor egy $f : T \to M$ függvényt *korlátosnak* nevezünk a d metrika szerint, ha $Im(f) \subseteq M$ korlátos halmaz d szerint. Ha T halmaz és (M, d) metrikus tér, akkor

$$\mathscr{F}^b(T; M, d) := \{f \in \mathscr{F}(T; M) | \text{"}f \text{ korlátos } d \text{ szerint"}\}.$$

Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti korlátosságól van szó, akkor a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk, és ilyenkor a kevésbé pontos $\mathscr{F}^b(T; M)$ jelölést alkalmazzuk, és ezt a $T \to M$ korlátos függvények halmazának nevezzük.

Gyakorlatok

1. Ha M halmaz, akkor egy $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ függvény pontosan akkor metrika M felett, ha teljesül rá (M_I) és rendelkezik a következő tulajdonsággal.

(M'_{II}) Minden $x, y, z \in M$ esetén $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

2. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre teljesünek a következők:

a) $f(0) = 0$ és minden $t > 0$ valós számra $f(t) > 0$;

b) f monoton növő;

c) minden $t, s \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(t + s) \leq f(t) + f(s)$.

Ekkor minden M halmazra és minden M feletti d metrikára $f \circ d$ is metrika az M felett. Az a), b) és c) tulajdonságok teljesülnek a $\min(id_{\mathbb{R}_+}, 1)$, $id_{\mathbb{R}_+}/(id_{\mathbb{R}_+} + 1)$, $log(1 + id_{\mathbb{R}_+})$ és $\sqrt{id_{\mathbb{R}_+}}$ függvényekre.

3. Értelmezzük a következő függvényt:

$$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+; \quad (m, n) \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n} & , \text{ ha } m \neq n \\ 0 & , \text{ ha } m = n. \end{cases}$$

Ekkor d metrika $\mathbb{N}$ felett, és létezik olyan $\mathbb{N}$-ben haladó $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, valamint olyan $\mathbb{R}^+$-ben haladó $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szigorúan fogyó sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $r_k > 1$ és $\overline{B}_{r_{k+1}}(n_{k+1}; d) \subseteq \overline{B}_{r_k}(n_k; d)$, de $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_{r_k}(n_k; d) = \emptyset$.

(*Útmutatás.* Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$r_k := 1 + \frac{1}{(k + 1)^2},$$

és $n_k := k$.)

4. Ha M halmaz, akkor egy $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ függvényt *félmetrikának*, vagy *eltérés-függvénynek* nevezünk M felett, ha d-re teljesülnek az (M_{II}) és (M_{III}) feltételek, valamint (M_I) helyett a következő gyengébb feltétel.

(M'_I) Minden $x \in M$ esetén $d(x, x) = 0$.

Az (M, d) párt *félmetrikus térnek* nevezzük, ha M halmaz és d félmetrika M felett. Ha (M, d) félmetrikus tér, akkor lehetséges az, hogy $x, y \in M$, $x \neq y$, de $d(x, y) = 0$; speciálisan, az $M \times M \to \mathbb{R}_+$ azonosan 0 függvény is félmetrika M felett. A továbbiakban feltesszük, hogy adott egy (M, d) félmetrikus tér.

a) Az $R := \{(x, y) \in M \times M | d(x, y) = 0\}$ reláció *ekvivalencia* az M halmaz felett; jelölje $\dot{M}$ az M/R faktorhalmazt, és minden $x \in M$ esetén legyen $\dot{x}$ az x pont R szerinti ekvivalencia-osztálya.

b) Létezik egyetlen olyan $\dot{d} : \dot{M} \times \dot{M} \to \mathbb{R}_+$ függvény, hogy minden $x, y \in M$ esetén $\dot{d}(\dot{x}, \dot{y}) = d(x, y)$ teljesül. A $\dot{d}$ függvény metrika az $\dot{M}$ faktorhalmaz felett. Az $(\dot{M}, \dot{d})$ metrikus teret nevezzük az (M, d) *félmetrikus térhez asszociált metrikus térnek.*

c) Legyen (M', d') metrikus tér és $f : M \to M'$ olyan függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $x, y \in M$ esetén, ha $d(x, y) = 0$, akkor $d'(f(x), f(y)) = 0$ (vagyis

$f(x) = f(y)$). Ekkor létezik egyetlen olyan $\dot{f} : \dot{M} \to M'$ függvény, hogy minden $x \in M$ esetén $\dot{f}(\dot{x}) = f(x)$ teljesül.

5. Legyen M halmaz, (M', d') félmetrikus tér, és $f : M \to M'$ tetszőleges függvény. Ekkor a

$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto d'(f(x), f(y))$$

függvény félmetrika M felett; ezt nevezzük *az f függvény és a d' félmetrika által meghatározott félmetrikának* M felett. Speciálisan; ha M halmaz, és $f : M \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, akkor a

$$d_f : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$$

félmetrikát az *f valós függvény által meghatározott félmetrikának* nevezzük M felett.

6. Normált térben nem nulla dimenziós lineáris altér *nem korlátos* halmaz a norma által meghatározott metrika szerint. Ha E valós vagy komplex vektortér, és d olyan metrika E felett, hogy létezik olyan d szerinti 0 középpontú gömb E-ben, amely tartalmaz nem nulla dimenziós lineáris alteret, akkor a d metrika nem normálható.

7. Legyen $p \in]0, 1[$ tetszőleges valós szám, és

$$l^p_{\mathbb{K}} := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \text{"a } \sum_{k \in \mathbb{N}} |\boldsymbol{s}(k)|^p \text{ sor konvergens"}\}.$$

Ekkor $l^p_{\mathbb{K}}$ *lineáris altere* a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ függvénytérnek, de az

$$l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+; \quad \boldsymbol{s} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés *nem norma* $l^p_{\mathbb{K}}$ felett. Ugyanakkor a

$$d_p : l^p_{\mathbb{K}} \times l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+; \quad (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}'(k)|^p$$

leképezés *nem normálható transzláció-invariáns* metrika $l^p_{\mathbb{K}}$ felett.

(*Útmutatás.* Ha $a, b \geq 0$ valós számok és $p \in]0, 1[$ tetszőleges valós szám, akkor $(a + b)^p \leq a^p + b^p$. Valóban, ha $a + b > 0$ (és ez a nemtriviális eset), akkor $a/(a + b) \leq 1$ és $b/(a + b) \leq 1$, így $p \in]0, 1[$ miatt $(a/(a + b))^p \geq a/(a + b)$ és $(b/(a + b))^p \geq b/(a + b)$, amiből összeadással nyerjük, hogy $(a^p + b^p)/(a + b)^p \geq 1$. Ebből következik, hogy a d_p függvényre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A d_p metrika nem normálható, mert $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $d_p(\lambda.\boldsymbol{s}, \lambda.s) = |\lambda|^p d_p(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}')$, ezért ha $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'$ és $|\lambda| \neq 1$, akkor $d_p(\lambda.\boldsymbol{s}, \lambda.s) \neq |\lambda| d_p(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}')$. Később megmutatjuk, hogy a d_p metrika még *topologikusan sem normálható* (2. pont, **7**. gyakorlat).)

8. (*A korlátosság jellemzése sorozatokkal.*) Ha (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

a) az E halmaz korlátos;

b) az E minden megszámlálható részhalmaza korlátos;

c) minden E-ben haladó sorozat korlátos.

9. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $f : M \to M'$ olyan bijekció, amely izometria a d és d' metrikák szerint. Ekkor $\mathfrak{a} \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$f\langle B_r(\mathfrak{a}; d)\rangle = B_r(f(\mathfrak{a}); d'), \quad f\langle \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)\rangle = \overline{B}_r(f(\mathfrak{a}); d'), \quad f\langle S_r(\mathfrak{a}; d)\rangle = S_r(f(\mathfrak{a}); d'),$$

továbbá egy $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor korlátos a d metrika szerint, ha az $f\langle E\rangle \subseteq M'$ halmaz korlátos a d' metrika szerint.

2. Metrikus tér topológiája

Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Egy $\Omega \subseteq M$ halmazt *nyíltnak* nevezünk a d metrika szerint, ha minden $x \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy $B_r(x; d) \subseteq \Omega$ teljesül. Egy $F \subseteq M$ halmazt *zártnak* nevezünk a d metrika szerint, ha az $M \setminus F$ halmaz nyílt a d metrika szerint. Az M halmaz d szerint nyílt részhalmazainak halmazát $\mathscr{T}_d$ jelöli, és ezt a *d metrika által generált topológiának* nevezzük M felett.

Állítás. Metrikus térben a nyílt gömbök nyílt halmazok és a zárt gömbök zárt halmazok.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $\mathfrak{a} \in M$ és $\in \mathbb{R}_+$.

Ha $x \in B_r(\mathfrak{a}; d)$, akkor $d(x, \mathfrak{a}) < r$, és ekkor bármely $s \in]0, r - d(x, \mathfrak{a})]$ valós számra $B_s(x; d) \subseteq B_r(\mathfrak{a}; d)$, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség miatt minden $y \in B_s(x; d)$ pontra $d(y, \mathfrak{a}) \leq d(y, x) + d(x, \mathfrak{a}) < s + d(x, \mathfrak{a}) < r$. Ez azt jelenti, hogy a $B_r(\mathfrak{a}; d)$ nyílt gömb nyílt halmaz a d metrika szerint.

Legyen $x \in M \setminus \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)$, tehát $d(x, \mathfrak{a}) > r$. Ha $s \in]0, d(x, \mathfrak{a}) - r]$ tetszőleges valós szám, akkor $y \in B_s(x; d)$ esetén $d(y, \mathfrak{a}) > r$, mert ha nem így volna, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján $d(x, \mathfrak{a}) \leq d(x, y) + d(y, \mathfrak{a}) < s + d(y, \mathfrak{a}) \leq s + r \leq d(x, \mathfrak{a})$ teljesülne, ami lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy bármely $s \in]0, d(x, \mathfrak{a}) - r[$ valós számra $B_s(x; d) \subseteq M \setminus \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)$, vagyis $M \setminus \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)$ nyílt, így $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)$ zárt halmaz a d metrika szerint. ■

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér, akkor a d metrika által generált $\mathscr{T}_d$ topológia rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

(O_I) $\emptyset \in \mathscr{T}_d$ és $M \in \mathscr{T}_d$ (vagyis az üres halmaz és az alaphalmaz nyílt).

(O_{II}) Bármely $\mathscr{T}_d$-ben haladó nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathscr{T}_d$-nek (vagyis véges sok nyílt halmaz metszete nyílt).

(O_{III}) Bármely $\mathscr{T}_d$-ben haladó rendszer uniója eleme $\mathscr{T}_d$-nek (vagyis nyílt halmazok uniója nyílt).

Bizonyítás. A nyíltság definíciója alapján (O_I) nyilvánvalóan igaz.

Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy $I \neq \emptyset$ véges halmaz, és minden $i \in I$ esetén $\Omega_i \subseteq M$ nyílt halmaz a d metrika szerint. Ha $x \in \bigcap\limits_{i \in I} \Omega_i$, akkor minden $i \in I$ esetén $x \in \Omega_i$, így kiválasztható olyan $(r_i)_{i \in I}$ rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, hogy minden $i \in I$ indexre $B_{r_i}(x; d) \subseteq \Omega_i$. Ekkor az $r := \min\limits_{i \in I} r_i$ valós számra nyilvánvalóan teljesül az, hogy $B_r(x; d) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} \Omega_i$, tehát $\bigcap\limits_{i \in I} \Omega_i$ nyílt halmaz a d metrika szerint.

Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\Omega_i \subseteq M$ nyílt halmaz a d metrika szerint. Ha $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$, akkor létezik olyan $j \in I$, hogy $x \in \Omega_j$, így az Ω_j nyíltsága folytán van olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $B_r(x; d) \subseteq \Omega_j \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ nyílt halmaz a d metrika szerint. ■

Következmény. Ha (M, d) metrikus tér, akkor a d metrika által meghatározott zárt halmazok $\mathfrak{F}_d$ halmaza rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

(C_I) $\emptyset \in \mathfrak{F}_d$ és $M \in \mathfrak{F}_d$ (vagyis az üres halmaz és az alaphalmaz zárt).

(C_{II}) Bármely $\mathfrak{F}_d$-ben haladó nem üres rendszer metszete eleme $\mathfrak{F}_d$-nek (vagyis zárt halmazok metszete zárt).

(C_{III}) Bármely $\mathfrak{F}_d$-ben haladó véges rendszer uniója eleme $\mathfrak{F}_d$-nek (vagyis véges sok zárt halmaz uniója zárt).

Bizonyítás. Ha $(F_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres halmazrendszer, akkor a de Morgan azonosságok szerint:

$$M \setminus \bigcup_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I}(M \setminus F_i); \quad M \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I}(M \setminus F_i)$$

(I. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat), így az állítás azonnal következik a zárt halmazok definíciójából és az előző állításból. ■

Azonban végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, és végtelen sok zárt halmaz uniója nem feltétlenül zárt. Az viszont nyilvánvaló, hogy ha (M, d) metrikus tér és $\Omega \subseteq M$ nyílt és $F \subseteq M$ zárt halmaz a d metrika szerint, akkor $\Omega \setminus F = \Omega \cap (M \setminus F)$ nyílt halmaz a d metrika szerint, mert két nyílt halmaz metszete, továbbá $F \setminus \Omega = F \cap (M \setminus \Omega)$ zárt halmaz a d metrika szerint, mert két zárt halmaz metszete. Speciálisan; a gömbfelületek zárt halmazok a metrikus terekben, mert ha (M, d) metrikus tér, $\mathfrak{a} \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+$, akkor $S_r(\mathfrak{a}; d) = \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d) \setminus B_r(\mathfrak{a}; d)$.

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér. Minden $E \subseteq M$ halmazhoz egyértelműen létezik az a d metrika szerint nyílt halmaz M-ben, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott, d szerint nyílt részhalmazt tartalmaz. Továbbá, minden $E \subseteq M$ halmazhoz egyértelműen létezik az a d metrika szerint zárt halmaz M-ban, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó, d szerint zárt halmaznak részhalmaza.

Bizonyítás. Legyen $E \subseteq M$ és $\mathcal{O} := \{\Omega \subseteq M | (\Omega \in \mathscr{T}_d) \wedge (\Omega \subseteq E)\}$. Ekkor az ($\mathrm{O}_{III}$) miatt $\bigcup \mathcal{O}$ nyílt halmaz a d metrika szerint, $\bigcup \mathcal{O} \subseteq E$, és ha $\Omega \subseteq E$ tetszőleges d szerint nyílt halmaz, akkor a $\mathcal{O}$ definíciója szerint $\Omega \in \mathcal{O}$, tehát $\Omega \subseteq \bigcup \mathcal{O}$. Ezért $\bigcup \mathcal{O}$ az a d szerint nyílt halmaz M-ben, amely részhalmaza E-nek, és minden E által tartalmazott d szerint nyílt részhalmazt tartalmaz.

Legyen $E \subseteq M$ és $\mathscr{F} := \{F \subseteq M | (E \setminus F \in \mathscr{T}_d) \wedge (E \subseteq F)\}$. Ekkor $\mathscr{F} \neq \emptyset$, mert $M \in \mathscr{F}$, így a $\bigcap \mathscr{F} := \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ halmaz jól értelmezett, és a (C_{III}) miatt zárt halmaz d szerint, továbbá $E \subseteq \bigcap \mathscr{F}$, és ha $F \subseteq M$ olyan d szerint zárt halmaz, hogy $E \subseteq F$, akkor a $\mathscr{F}$ definíciója szerint $F \in \mathscr{F}$, tehát $\bigcap \mathscr{F} \subseteq F$. Ezért $\bigcap \mathscr{F}$ az a d szerint zárt halmaz M-ben, amely tartalmazza E-t, és minden E-t tartalmazó, d szerint zárt halmaznak részhalmaza. ■

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmaz *belsejének* (illetve *lezártjának*) nevezzük a d metrika szerint azt a tartalmazás tekintetében legnagyobb (illetve legkisebb) d szerint nyílt (illetve d szerint zárt) halmazt M-ben, amely részhalmaza E-nek (illetve tartalmazza E-t). Az E halmaz belsejét (illetve lezártját)

a d metrika szerint az $\overset{\circ}{E}$ vagy $Int(E)$ (illetve $\overline{E}$ vagy $Cl(E)$) szimbólummal jelöljük. Az $\overset{\circ}{E}$ (illetve $\overline{E}$) elemeit az E *belső* (illetve *érintési*) *pontjainak* nevezzük a d metrika szerint. Ha nyilvánvaló, hogy melyik metrika szerinti belsőről (illetve lezártról) van szó, akkor az elnevezésekben a "d metrika szerint" kifejezést elhagyjuk.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha (M, d) metrikus tér, akkor minden $E \subseteq M$ halmazra; az E pontosan akkor nyílt (illetve zárt) a d szerint, ha $E = \overset{\circ}{E}$ (illetve $E = \overline{E}$).

Állítás. Metrikus térben korlátos halmaz lezártja korlátos.

Bizonyítás. Ha (M, d) metrikus tér, és $E \subseteq M$ korlátos halmaz a d metrika szerint, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, illetve $x \in M$ olyan pont, amelyekre $E \subseteq B_r(x; d)$, akkor $B_r(x; d) \subseteq \overline{B}_r(x; d)$ és a $\overline{B}_r(x; d)$ halmaz zártsága folytán $\overline{E} \subseteq \overline{B}_r(x; d)$ is teljesül. Ekkor bármely $s \in \mathbb{R}^+$ számra, ha $r < s$, akkor $\overline{E} \subseteq B_s(x; d)$, így $\overline{E}$ is korlátos halmaz d szerint. ■

Állítás. (*A belső pontok és érintési pontok jellemzése gömbi környezetekkel.*) Legyen (M, d) metrikus tér, $E \subseteq M$ és $x \in M$.

- Az x pont akkor és csak akkor belső pontja E-nek, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x; d) \subseteq E$.

- Az x pont akkor és csak akkor érintési pontja E-nek, ha minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(x; d) \cap E \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Ha x belső pontja E-nek, akkor $x \in \overset{\circ}{E}$ és $\overset{\circ}{E}$ nyílt halmaz, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x; d) \subseteq \overset{\circ}{E} \subseteq E$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(x; d) \subseteq E$, akkor $x \in B_r(x; d) \subseteq \overset{\circ}{E}$, mert a $B_r(x; d)$ gömb nyílt halmaz, így x belső pontja E-nek.

Ha x *nem* érintési pontja E-nek, akkor $x \in M \setminus \overline{E}$, és a definíció szerint $M \setminus \overline{E}$ nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_r(x; d) \subseteq M \setminus \overline{E}$; ekkor teljesül az, hogy $B_r(x; d) \cap E = \emptyset$. Megfordítva, ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy $B_r(x; d) \cap E = \emptyset$, akkor $M \setminus B_r(x; d)$ olyan zárt halmaz, amely tartalmazza E-t, így $\overline{E}$-t is, ugyanakkor $x \notin M \setminus B_r(x; d)$, következésképpen $x \notin \overline{E}$, így x *nem* érintési pontja E-nek. ■

Állítás. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in E$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $\overline{B_r(x; d_{\|\cdot\|})} = \overline{B}_r(x; d_{\|\cdot\|})$.

Bizonyítás. A $\overline{B}_r(x; d_{\|\cdot\|})$ halmaz zárt és tartalmazza $B_r(x; d_{\|\cdot\|})$-t, ezért a lezárt definíciója szerint $\overline{B_r(x; d_{\|\cdot\|})} \subseteq \overline{B}_r(x; d_{\|\cdot\|})$.

Legyen $F \subseteq E$ olyan zárt halmaz $d_{\|\cdot\|}$ szerint, hogy $B_r(x; d_{\|\cdot\|}) \subseteq F$. Ekkor $M \setminus F \subseteq M \setminus B_r(x; d_{\|\cdot\|})$, ezért $x' \in M \setminus F$ esetén $\|x' - x\| \geq r$, ugyanakkor az $M \setminus F$ nyíltsága miatt van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_\varepsilon(x'; d_{\|\cdot\|}) \subseteq M \setminus F$; megmutatjuk, hogy ekkor $\|x' - x\| \geq r + \varepsilon$ is teljesül. Ha ugyanis ez nem volna igaz, akkor $1 - \frac{\varepsilon}{\|x'-x\|} < \frac{r}{\|x'-x\|} \leq 1$ teljesülne, tehát

$$\left]0, \frac{r}{\|x' - x\|}\right[\cap \left]1 - \frac{\varepsilon}{\|x' - x\|}, 1\right[\neq \emptyset.$$

Ha t eleme ennek a halmaznak, akkor az $x_t := (1-t)x + tx' \in E$ vektorra $\|x - x_t\| = t\|x - x'\| < r$ és $\|x' - x_t\| = (1-t)\|x - x'\| < \varepsilon$ teljesül, tehát a háromszög-egyenlőtlenség szerint $x_t \in B_\varepsilon(x'; d_{\|\cdot\|}) \cap B_r(x; d_{\|\cdot\|})$, holott $B_\varepsilon(x'; d_{\|\cdot\|}) \subseteq M \setminus F \subseteq M \setminus B_r(x; d_{\|\cdot\|})$ miatt $B_\varepsilon(x'; d_{\|\cdot\|}) \cap B_r(x; d_{\|\cdot\|}) = \emptyset$. Ebből következik, hogy $x' \in M \setminus F$ esetén $\|x' - x\| > r$, azaz $x' \in M \setminus \overline{B}_r(x; d_{\|\cdot\|})$. Másként fogalmazva: $\overline{B}_r(x; d_{\|\cdot\|}) \subseteq F$ teljesül minden olyan $F \subseteq M$ olyan zárt halmazra, amelyre $B_r(x; d_{\|\cdot\|}) \subseteq F$, így a lezárt definíciója szerint $\overline{B}_r(x; d_{\|\cdot\|}) \subseteq \overline{B_r(x; d_{\|\cdot\|})}$. ■

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmazt *sűrűnek* nevezzük a d metrika szerint, ha $\overline{E} = M$.

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmaz *torlódási pontjának* nevezünk a d metrika szerint minden olyan $x \in M$ pontot, amelyre $x \in \overline{E \setminus \{x\}}$ teljesül.

Az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján nyilvánvaló, hogy ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $x \in M$ pont akkor és csak akkor torlódási pontja az $E \subseteq M$ halmaznak, ha minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra $(E \setminus \{x\}) \cap B_r(x; d) \neq \emptyset$, vagyis az x minden gömbi környezetében van az E-nek *x-től különböző* pontja. Világos, hogy egy halmaz minden torlódási pontja érintési pont is, de ennek megfordítása általában nem igaz.

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmaz *izolált pontjának* nevezzük d szerint az E minden olyan érintési pontját, amely nem torlódási pontja E-nek. Az $E \subseteq M$ halmazt *diszkrétnek* nevezzük, ha az E minden pontja izolált pontja E-nek.

Tehát ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $x \in M$ pont akkor és csak akkor izolált pontja az $E \subseteq M$ halmaznak, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $E \cap B_r(x; d) = \{x\}$. Speciálisan; az E minden izolált pontja szükségképpen eleme E-nek.

Állítás. Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek.

- Az $\Omega' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor nyílt a d' altér-metrika szerint, ha létezik olyan $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz d szerint, amelyre $\Omega' = \Omega \cap M'$.

- Az $F' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor zárt a d' altér-metrika szerint, ha létezik olyan $F \subseteq M$ zárt halmaz d szerint, amelyre $F' = F \cap M'$.

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq M$ tetszőleges, d szerint nyílt halmaz. Ekkor $x \in \Omega \cap M'$ esetén van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x; d) \subseteq \Omega$, tehát $B_r(x; d') = B_r(x; d) \cap M' \subseteq \Omega \cap M'$. Ezért $\Omega \cap M'$ nyílt halmaz a d' metrika szerint.

Legyen az $\Omega' \subseteq M'$ halmaz nyílt a d' altér-metrika szerint. Minden $x \in \Omega'$ ponthoz van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x; d') \subseteq \Omega'$. Ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehető olyan $\rho : \Omega' \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre minden $x \in \Omega'$ esetén $B_{\rho(x)}(x; d') \subseteq \Omega'$. Ekkor az

$$\Omega := \bigcup_{x \in \Omega'} B_{\rho(x)}(x; d)$$

halmaz nyílt M-ben a d metrika szerint, és

$$\Omega \cap M' = \left(\bigcup_{x \in \Omega'} B_{\rho(x)}(x; d) \right) \cap M' = \bigcup_{x \in \Omega'} (B_{\rho(x)}(x; d) \cap M') = \bigcup_{x \in \Omega'} B_{\rho(x)}(x; d') = \Omega'.$$

Legyen $F \subseteq M$ tetszőleges, d szerint zárt halmaz. Ekkor az előzőek szerint $(M \setminus F) \cap M'$ nyílt a d' metrika szerint, viszont ez egyenlő az $M' \setminus (F \cap M')$ halmazzal, tehát $F \cap M'$ zárt d' szerint.

Legyen az $F' \subseteq M'$ halmaz zárt a d' altér-metrika szerint. Az előzőek szerint létezik olyan $\Omega \subseteq M$ halmaz, amely nyílt d szerint és amelyre $\Omega \cap M' = M' \setminus F'$ teljesül. Ekkor $F := M \setminus \Omega$ olyan halmaz, amely zárt d szerint és $F \cap M' = (M \setminus \Omega) \cap M' = M' \setminus (\Omega \cap M') = F'$. ■

Következmény. Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek.

- Ha M' nyílt d szerint, akkor az $\Omega' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor nyílt a d' altér-metrika szerint, ha nyílt a d szerint.

- Ha M' zárt d szerint, akkor az $F' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor zárt a d' altér-metrika szerint, ha zárt a d szerint.

Bizonyítás. Az előző állításból nyilvánvalóan következik, mert két nyílt (illetve zárt) halmaz metszete nyílt (illetve zárt). ■

Könnyen látható, hogy egy halmaz felett általában sok olyan egészen különböző metrika létezhet, amelyek ugyanazokat a nyílt halmazokat határozzák meg. Továbbá, a metrikus terekkel kapcsolatban sok olyan fogalom bevezethető, amely nem közvetlenül a metrikától, hanem a metrika által generált topológiától függ. Ezeket az objektumokat, illetve tulajdonságokat *topologikus objektumoknak*, illetve *topologikus tulajdonságoknak* nevezzük.

Definíció. Az M halmaz feletti d_1 és d_2 metrikákat *ekvivalenseknek* nevezzük, ha $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$, vagyis a d_1 és d_2 által meghatározott nyílt halmazok ugyanazok. Az E vektortér feletti $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normákat *ekvivalenseknek* nevezzük, ha az általuk generált $d_{\|\cdot\|_1}$ és $d_{\|\cdot\|_2}$ metrikák ekvivalensek.

Nyilvánvaló, hogy egy adott halmaz feletti metrikák halmazán az imént értelmezett ekvivalencia valóban ekvivalencia-reláció. Megjegyezzük még, hogy a metrikák ekvivalenciájának egyéb formái is léteznek; erre példát mutatunk be az **5**. gyakorlatban.

Állítás. Az E vektortér feletti $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $C_1, C_2 > 0$ valós számok, amelyekre minden $x \in E$ esetén

$$\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek. A $B_1(0; d_{\|\cdot\|_1})$ halmaz $d_{\|\cdot\|_1}$ szerint nyílt, igy a hipotézis szerint $d_{\|\cdot\|_2}$ szerint is nyílt és 0 eleme neki, tehát van olyan $r_2 \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_{r_2}(0; d_{\|\cdot\|_2}) \subseteq B_1(0; d_{\|\cdot\|_1})$. Ha $x \in E$ és

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor nyilvánvaló, hogy $\left(\frac{r_2}{\|x\|_2+\varepsilon}\right).x \in B_{r_2}(0; d_{\|\cdot\|_2})$, ezért ez a vektor a $B_1(0; d_{\|\cdot\|_1})$ gömbnek is eleme, vagyis

$$\left\|\left(\frac{r_2}{\|x\|_2+\varepsilon}\right).x\right\|_1 < 1,$$

így $\|x\|_1 < \frac{1}{r_2}(\|x\|_2+\varepsilon)$. Ebből következik, hogy a $C_2 := 1/r_2$ szám olyan, hogy minden $x \in E$ esetén $\|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$. Ezt az érvelést a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák felcserélése után megismételve kapjuk olyan $C_1 > 0$ valós szám létezését, hogy minden $x \in E$ vektorra $\|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1$.

Megfordítva; legyenek $C_1, C_2 > 0$ olyan valós számok, amelyekre minden $x \in E$ esetén $\|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$ és $\|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1$ teljesül. Legyen $\Omega \subseteq M$ olyan halmaz, amely nyílt a $d_{\|\cdot\|_1}$ metrika szerint; megmutatjuk, hogy Ω a $d_{\|\cdot\|_2}$ metrika szerint is nyílt. Legyen ugyanis $x \in \Omega$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(x; d_{\|\cdot\|_1}) \subseteq \Omega$. A C_2 definíciója szerint nyilvánvaló, hogy

$$B_{\frac{r}{C_2}}(x; d_{\|\cdot\|_2}) \subseteq B_r(x; d_{\|\cdot\|_1}),$$

ezért $B_{\frac{r}{C_2}}(x; d_{\|\cdot\|_2}) \subseteq \Omega$. Ez azt jelenti, hogy Ω a $d_{\|\cdot\|_2}$ metrika szerint is nyílt halmaz. Ezt az érvelést a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák felcserélése után megismételve kapjuk, hogy az M minden $d_{\|\cdot\|_2}$ szerint nyílt részhalmaza $d_{\|\cdot\|_1}$ szerint is nyílt, tehát a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek. ■

Példák 1) Ha d metrika az M halmaz felett, akkor az

$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x,y) \mapsto \min(d(x,y), 1),$$
$$M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (x,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$$

függvények olyan metrikák a M felett, amelyek d-vel ekvivalensek (**6**. gyakorlat). E metrikák szerint az M halmaz korlátos, akkor is, ha a d metrika szerint nem korlátos. Ezért a korlátosság *nem topologikus* tulajdonság.

2) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \geq 1$ tetszőleges valós szám; megmutatjuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ feletti $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek. Valóban, ha $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, akkor

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{x}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|\boldsymbol{x}\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$

továbbá

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{0\leq k\leq n-1} |\boldsymbol{x}(k)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{x}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} =: \|\boldsymbol{x}\|_p,$$

tehát a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek. Ebből azonnal következik, hogy bármely két $p, q \geq 1$ valós számra a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_q$ normák is ekvivalensek. Később látni fogjuk, hogy ez nem véletlen, mert véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett bármely két norma ekvivalens.

3) Ha $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, akkor a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ végtelen dimenziós vektortér feletti $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák *nem ekvivalensek* (**12**. gyakorlat).

Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $\mathfrak{a} \in M$. Egy $V \subseteq M$ halmazt az $\mathfrak{a}$ pont *környezetének* nevezünk a d metrika szerint, ha létezik olyan $\Omega \subseteq M$ halmaz, amely nyílt d szerint és amelyre $\mathfrak{a} \in \Omega \subseteq V$ teljesül. Az $\mathfrak{a}$ pont d szerinti környezeteinek halmazát $\mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ jelöli.

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér és $\mathfrak{a} \in M$, akkor $\mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

a) Minden $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ esetén $\mathfrak{a} \in V$.

b) Minden $V, V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ esetén $V \cap V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$.

c) Minden $V \subseteq M$ halmazra, ha létezik olyan $V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $V' \subseteq V$, akkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Az a) és c) állítások a környezetek definíciója alapján nyilvánvalóak, míg b) abból következik, hogy két nyílt halmaz metszete is nyílt halmaz. ■

Nyilvánvaló, hogy metrikus térben egy pont környezeteinek halmaza topologikus objektum, tehát csakis a metrika által generált topológiától függ. Ezért minden olyan objektum, illetve tulajdonság, amelyet a környezetek segítségével vezetünk be eleve topologikus objektum, illetve topologikus tulajdonság lesz.

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér és $x_1, x_2 \in M$ olyan pontok, hogy $x_1 \neq x_2$, akkor léteznek olyan $V_1 \in \mathscr{T}_d(x_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_d(x_2)$ környezetek, amelyekre $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Bizonyítás. Ha $r \in]0, d(x_1, x_2)/2]$ tetszőleges valós szám, akkor fennáll a $B_r(x_1; d) \cap B_r(x_2; d) = \emptyset$ egyenlőség, hiszen ha $x \in B_r(x_1; d) \cap B_r(x_2; d)$ teljesülne, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2) < 2r \leq d(x_1, x_2)$ is igaz volna, ami lehetetlen. Ezért $V_1 := B_r(x_1; d)$ és $V_2 := B_r(x_2; d)$ olyan halmazok, hogy $V_1 \in \mathscr{T}_d(x_1)$, $V_2 \in \mathscr{T}_d(x_2)$ és $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

Állítás. Ha (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek, és $\mathfrak{a} \in M'$, akkor egy $V' \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor környezete $\mathfrak{a}$-nak a d' altérmetrika szerint, ha létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan d szerinti V környezete, amelyre $V' = V \cap M'$, vagyis $\mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a}) = \{V \cap M' | V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})\}$.

Bizonyítás. Ha $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a})$, akkor van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$, hogy $\mathfrak{a} \in \Omega' \subseteq V'$; ekkor létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, amelyre $\Omega' = \Omega \cap M'$, így $V := \Omega \cup V' \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet d szerint, hogy $V \cap M' = (\Omega \cap M') \cup (V' \cap M') = \Omega' \cup V' = V'$.

Megfordítva, ha $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan halmaz, hogy $V' = V \cap M'$, akkor létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, hogy $\mathfrak{a} \in \Omega \subseteq V$; ekkor $\Omega \cap M' \in \mathscr{T}_{d'}$ és $\mathfrak{a} \in \Omega \cap M' \subseteq V \cap M' = V'$, így $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a})$. ■

Gyakorlatok

1. Legyen (M, d) metrikus tér.

a) Minden $E, F \subseteq M$ halmazra, ha $E \subseteq F$, akkor $Int(E) \subseteq Int(F)$ és $\overline{E} \subseteq \overline{F}$.

b) Minden $E \subseteq M$ halmazra $Int(Int(E)) = Int(E)$ és $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

c) Minden $E \subseteq M$ halmazra

$$Int(E) = M \setminus \overline{M \setminus E},$$
$$\overline{E} = M \setminus Int(M \setminus E).$$

d) Ha $(E_i)_{i \in I}$ az M részhalmazainak *véges* rendszere, akkor

$$\overline{\bigcup_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{E_i},$$

és ha I nem üres, akkor

$$Int\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} Int(E_i).$$

e) Van olyan (M, d) metrikus tér és $E, F \subseteq M$ halmaz, amelyre

$$\overline{E \cap F} \neq \overline{E} \cap \overline{F}, \quad Int(E \cup F) \neq Int(E) \cup Int(F).$$

2. Legyen (M, d) metrikus tér, és $(E_i)_{i \in I}$ az M részhalmazainak olyan rendszere, amelyre minden $x \in M$ pontra és az x minden V környezetére az $\{i \in I | V \cap E_i \neq \emptyset\}$ halmaz véges; az ilyen tulajdonságú halmazrendszereket *lokálisan végeseknek* nevezzük. Ha minden $i \in I$ esetén E_i zárt halmaz, akkor $\bigcup_{i \in I} E_i$ is zárt halmaz. Igaz-e, hogy nyílt halmazok nem üres, lokálisan véges rendszerének a metszete nyílt?

3. Legyen M a $\{0\} \times [0, 1]$ és $[0, 1] \times \{0\}$ $\mathbb{R}^2$-beli halmazok uniója, és d az $\mathbb{R}^2$ feletti euklidészi metrika leszűkítése M-re. Ekkor van olyan $\mathfrak{a} \in M$ pont és $r > 0$ valós szám, hogy

$$\overline{B_r(\mathfrak{a}; d)} \neq \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d).$$

4. Legyen M halmaz és $\mathscr{P}_0(M)$ az M nem üres részhalmazainak halmaza. Legyen d olyan metrika M felett, amely szerint M nem korlátos halmaz, továbbá értelmezzük a következő függvényeket:

$$\rho : \mathscr{P}_0(M) \times \mathscr{P}_0(M) \to \mathbb{R}_+; \quad (E, F) \mapsto \sup_{x \in E} \left(\inf_{y \in F} d(x, y) \right),$$
$$\sigma : \mathscr{P}_0(M) \times \mathscr{P}_0(M) \to \mathbb{R}_+; \quad (E, F) \mapsto \max(\rho(E, F), \rho(F, E)).$$

Ekkor a $(\mathscr{P}_0(M), \sigma)$ pár félmetrikus tér, és ha $\mathscr{H}$ az M nem üres *zárt* részhalmazainak halmaza, akkor a $(\mathscr{H}, \sigma|_{\mathscr{H} \times \mathscr{H}})$ pár metrikus tér.

5. Ha M halmaz és d_1, d_2 olyan metrikák M felett, amelyekhez léteznek olyan $C_1, C_2 > 0$ valós számok, hogy minden $x, y \in M$ esetén $d_1(x,y) \leq C_2 d_2(x,y)$ és $d_2(x,y) \leq C_1 d_1(x,y)$, akkor d_1 és d_2 ekvivalensek. Azonban lehetséges az, hogy d_1 és d_2 olyan ekvivalens metrikák az M halmaz felett, amelyekhez nem léteznek ilyen tulajdonságú C_1 és C_2 valós számok.

6. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amelyre teljesülnek az 1. pont **2**. gyakorlat a), b) és c) feltételei. Ha f még *folytonos* is a 0-ban, akkor f mindenütt folytonos, és minden (M,d) metrikus térre $(M, f \circ d)$ olyan metrikus tér, hogy d és $f \circ d$ *ekvivalens* metrikák. Az 1. pont **2**. gyakorlatában felsorolt konkrét függvények mind folytonosak.

(*Útmutatás.* Először azt kell igazolni, hogy a c) miatt $t, t' \in \mathbb{R}_+$ esetén $|f(t) - f(t')| \leq f(|t - t'|)$, így az f 0-ban való folytonosságából következik a folytonossága. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $0 = f(0) = \lim\limits_{0} f$ miatt van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [0, \delta[$ valós számra $f(t) < \varepsilon$, ezért minden $x \in M$ pontra $B_\delta(x; d) \subseteq B_\varepsilon(x; f \circ d)$. Ebből következik, hogy $\mathscr{T}_{f \circ d} \subseteq \mathscr{T}_d$.

Megfordítva, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f folytonossága és a Bolzano-tétel alapján $[0, f(\varepsilon)] \subseteq f\langle[0, \varepsilon]\rangle$, ezért minden $x \in M$ esetén $B_{f(\varepsilon)}(x, f \circ d) \subseteq B_\varepsilon(x; d)$. Ebből következik, hogy $\mathscr{T}_d \subseteq \mathscr{T}_{f \circ d}$.)

7. Egy valós vagy komplex E vektortér feletti d metrikát *topologikusan normálhatónak* nevezünk, ha létezik olyan E feletti $\|\cdot\|$ norma, amelyre a d és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák ekvivalensek. Minden normálható metrika nyilvánvalóan topologikusan is normálható, de ennek megfordítása nem igaz.

8. Az M halmaz feletti d metrikát *ultrametrikának* nevezzük, ha d-re az (M_{III})-nál erősebb következő feltétel teljesül:

(M'_{III}) Minden $x, y, z \in M$ pontra $d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$.

Az (M,d) párt *ultrametrikus térnek* nevezzük, ha d ultrametrika az M halmaz felett. Minden diszkrét metrikus tér ultrametrikus tér.

a) Ha (M,d) ultrametrikus tér és $x, y, z \in M$ olyan pontok, hogy $d(x,z) \neq d(y,z)$, akkor $d(x,y) = \max(d(x,z), d(z,y))$.

b) Ha (M,d) ultrametrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor a $B_r(x;d)$ gömb *nyílt-zárt halmaz*, vagyis egyszerre nyílt és zárt a d metrika szerint, továbbá minden $y \in \overline{B}_r(x;d)$ pontra $\overline{B}_r(y;d) = \overline{B}_r(x;d)$ teljesül, valamint fennáll a

$$\overline{B}_r(x;d) = \bigcup_{y \in \overline{B}_r(x;d)} B_r(y;d)$$

egyenlőség.

c) Ha ultrametrikus térben két gömb metszi egymást, akkor az egyikük részhalmaza a másiknak.

d) Ha K test és $|\cdot|$ ultrametrikus abszolútérték K felett (II. fejezet, 2. pont, **1**. gyakorlat), akkor $d_{|\cdot|}$ ultrametrika K felett. Például, ha p prímszám, akkor a $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|_p})$ pár nem diszkrét ultrametrikus tér.

9. Legyen M az összes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények halmaza, és minden $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in M$ esetén, ha $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'$, akkor

$$\delta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') := min\{n \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(n) \neq \boldsymbol{s}'(n)\}.$$

Legyen $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in M$ esetén

$$d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') := \begin{cases} \frac{2+\delta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}')}{1+\delta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}')} & ; \text{ ha } \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}', \\ 0 & ; \text{ ha } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'. \end{cases}$$

Ekkor (M, d) ultrametrikus tér.

(*Útmutatás.* Elég azt igazolni, hogy $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}', \boldsymbol{s}'' \in \mathscr{F}(\mathbb{N}; \mathbb{N})$ esetén

$$\delta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') \geq \min(\delta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}''), \delta(\boldsymbol{s}'', \boldsymbol{s}')),$$

ami könnyen igazolható.)

10. Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\mathfrak{a}$-t $\mathfrak{b}$-vel *összekötő ε-láncnak* nevezünk minden olyan $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszert M-ben, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = \mathfrak{a}$, $x_n = \mathfrak{b}$, továbbá minden $k < n$ természetes számra $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$.

a) Minden $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in M \times M$ párhoz van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, amelyhez létezik $\mathfrak{a}$-t $\mathfrak{b}$-vel összekötő ε-lánc.

b) Legyen $d' : M \times M \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amely minden $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in M \times M$ párhoz azon $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számok halmazának *infimumát* rendeli, amelyekhez létezik $\mathfrak{a}$-t $\mathfrak{b}$-vel összekötő ε-lánc. Ekkor d' félmetrika M felett, és az (M, d') félmetrikus térhez asszociált metrikus tér (1. pont, **4**. gyakorlat) ultrametrikus tér.

11. Legyen K test, és $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ nem improprius abszolútérték K felett.

a) A $d_{|\cdot|_1}$ és $d_{|\cdot|_2}$ metrikák pontosan akkor ekvivalensek, ha $B_1(0; d_{|\cdot|_1}) \subseteq B_1(0; d_{|\cdot|_2})$.

b) Ha a $d_{|\cdot|_1}$ és $d_{|\cdot|_2}$ metrikák ekvivalensek, akkor van olyan $\rho > 0$ valós szám, amelyre minden $x \in K$ esetén $|x|_2 = |x|_1^\rho$ teljesül.

c) Ha $|\cdot|$ abszolútérték K felett, és $\rho \in]0, 1]$ tetszőleges valós szám, akkor a $|\cdot|^\rho$ függvény olyan abszolútérték K felett, hogy a $d_{|\cdot|}$ és $d_{|\cdot|^\rho}$ metrikák ekvivalensek.

d) Jelölje $|\cdot|$ az euklidészi abszolútértéket $\mathbb{Q}$ felett. Ekkor az $a^{\nu_p(\cdot)}$ és $|\cdot|^\rho$ abszolútértékek (ahol $a \in]0, 1[$ és $\rho \in]0, 1]$ valós számok, valamint p prímszám) *páronként inekvivalensek* (III. fejezet, 1. pont, **13**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy a $d_{|\cdot|_1}$ és $d_{|\cdot|_2}$ metrikák ekvivalensek. A $B_1(0; d_{|\cdot|_2})$ gömb nyílt a $d_{|\cdot|_2}$ metrika szerint, ezért a $d_{|\cdot|_1}$ szerint is nyílt, így létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $B_r(0; d_{|\cdot|_1}) \subseteq B_1(0; d_{|\cdot|_2})$. Ha $x \in B_1(0; d_{|\cdot|_1})$, azaz $|x|_1 < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} |x^n|_1 = \lim\limits_{n\to\infty} |x|_1^n = 0$, tehát van olyan $n > 0$ természetes szám, hogy $|x^n|_1 < r$, azaz $x^n \in B_r(0; d_{|\cdot|_1})$; ekkor $|x|_2^n = |x^n|_2 < 1$, így $|x|_2 < 1$. Ez azt jelenti, hogy $B_1(0; d_{|\cdot|_1}) \subseteq B_1(0; d_{|\cdot|_2})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $B_1(0; d_{|\cdot|_1}) \subseteq B_1(0; d_{|\cdot|_2})$. Ekkor $x \in K$ és $|x|_1 > 1$ esetén $|x^{-1}|_1 = |x|_1^{-1} < 1$, tehát $x^{-1} \in B_1(0; d_{|\cdot|_2})$, következésképpen $|x|_2^{-1} = |x^{-1}|_2 > 1$, azaz $|x|_2 > 1$. A feltevés szerint $|\cdot|_1$ nem improprius abszolútérték, ezért rögzíthetünk olyan $z \in K$ elemet, amelyre $|z|_1 > 1$. Értelmezzük most a $\rho := log(|z|_2)/log(|z|_1) \in \mathbb{R}^+$ számot!

Megmutatjuk, hogy minden $x \in K \setminus \{0\}$ esetén $|x|_2 = |x|_1^\rho$. Legyen ugyanis $x \in K \setminus \{0\}$ rögzített és $\gamma := log(|x|_1)/log(|z|_1)$. Ekkor $|x|_1 = |z|_1^\gamma$, így $|z|_1 > 1$ miatt

- ha $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ és $p/q > \gamma$, akkor $|x|_1 = |z|_1^\gamma < |z|_1^{p/q}$, így $|x^q/z^p|_1 < 1$, tehát $|x^q/z^p|_2 < 1$, vagyis $|x|_2 < |z|_2^{p/q}$;

- ha $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ és $p/q < \gamma$, akkor $|x|_1 = |z|_1^\gamma > |z|_1^{p/q}$, így $|x^q/z^p|_1 > 1$, tehát $|x^q/z^p|_2 > 1$, vagyis $|x|_2 > |z|_2^{p/q}$.

Ebből következik, hogy $|x|_2 = |z|_2^\gamma$, azaz

$$log(|x|_2) = \gamma \cdot log(|z|_2) = \gamma \cdot \rho \cdot log(|z|_1) = \rho \cdot log(|x|_1),$$

tehát $|x|_2 = |x|_1^\rho$. Ebből adódik, hogy minden $x \in \mathbb{K}$ pontra és $r > 0$ valós számra

$$B_r(x; d_{|\cdot|_2}) = B_{r^{1/\rho}}(x; d_{|\cdot|_1}),$$

tehát a $d_{|\cdot|_1}$ és $d_{|\cdot|_2}$ metrikák ekvivalensek. Ezzel a)-t és b)-t igazoltuk.)

12. Ha $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, akkor a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák leszűkítései $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-re *nem ekvivalens* normák.

(*Útmutatás.* Legyen $p \geq 1$ rögzített valós szám. Könnyen látható, hogy minden $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\boldsymbol{s}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{s}\|_p$ teljesül, azonban nem létezhet olyan $C > 0$ valós szám, amelyre minden $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ esetén $\|\boldsymbol{s}\|_p \leq C\|\boldsymbol{s}\|_\infty$. Legyen ugyanis minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $\boldsymbol{s}_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ az a sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{s}_n(k) := \begin{cases} n^{-1/p} & ; \text{ ha } k < n; \\ 0 & ; \text{ ha } k \geq n. \end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $\|\boldsymbol{s}_n\|_p = 1$ és $\|\boldsymbol{s}_n\|_\infty = n^{-1/p}$. Ezért nincs olyan $C > 0$ valós szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\|\boldsymbol{s}_n\|_p \leq C\|\boldsymbol{s}_n\|_\infty$ teljesül.)

13. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $f : M \to M'$ olyan bijekció, amely izometria a d és d' metrikák szerint. Ekkor

- az $\Omega \subseteq M$ halmaz pontosan akkor nyílt a d metrika szerint, ha az $f\langle\Omega\rangle \subseteq M'$ halmaz nyílt a d' metrika szerint,

- az $F \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt a d metrika szerint, ha az $f\langle F\rangle \subseteq M'$ halmaz zárt a d' metrika szerint,

- minden $E \subseteq M$ halmazra $Int(f\langle E\rangle) = f\langle Int(E)\rangle$ és $\overline{f\langle E\rangle} = f\langle\overline{E}\rangle$,

- az $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor sűrű a d metrika szerint, ha az $f\langle E\rangle \subseteq M'$ halmaz sűrű a d' metrika szerint.

3. Sorozatok metrikus terekben

Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot *konvergensnek* mondjuk a d metrika szerint, ha létezik olyan $\mathfrak{a} \in M$ pont, amelyre

$$(\forall V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \ (n > N \Rightarrow \boldsymbol{s}(n) \in V)$$

teljesül. Az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat d metrika szerinti *határértékének* nevezünk minden olyan $\mathfrak{a} \in M$ pontot, amelyre ez az tulajdonság teljesül. Az M-ben haladó, d szerint nem konvergens sorozatokat *divergenseknek* mondjuk.

A környezetek definíciója alapján világos, hogy ha (M, d) metrikus tér, akkor az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat d szerinti konvergenciája olyan $\mathfrak{a} \in M$ pont létezésével ekvivalens, amelyre

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : \ (n > N \Rightarrow d(\boldsymbol{s}(n), \mathfrak{a}) < \varepsilon)$$

teljesül. Ez azt mutatja, hogy egy $\mathbb{K}$-ban haladó (azaz numerikus) sorozat pontosan akkor konvergens $\mathbb{K}$-ban (a korábbi definíció alapján), ha konvergens a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi metrika szerint (az itteni definíció alapján).

Állítás. Metrikus térben minden sorozatnak legfeljebb egy határértéke van.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, és $\boldsymbol{s}$ olyan M-ben haladó sorozat, amelynek az $\mathfrak{a}_1$ és $\mathfrak{a}_2$ pontok mindketten a határértékei. Ha $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{a}_2$, akkor léteznek olyan $V_1 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}_2)$ környezetek, amelyekre $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ekkor léteznek olyan $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N_1$, akkor $\boldsymbol{s}(n) \in V_1$, és ha $n > N_2$, akkor $\boldsymbol{s}(n) \in V_2$. Ez azt jeleni, hogy ha $n > \max(N_1, N_2)$, akkor $\boldsymbol{s}(n) \in V_1 \cap V_2$, ami ellentmond annak, hogy $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ezért szükségképpen $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. ■

Jelölés. Ha (M, d) metrikus tér és $\boldsymbol{s}$ M-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, akkor az $\boldsymbol{s}$ határértékét $\lim(\boldsymbol{s})$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}(n)$ jelöli.

Ha (M, d) metrikus tér, és $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ olyan M-ben haladó sorozatok, amelyekhez létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$ számra $\boldsymbol{s}(n) = \boldsymbol{s}'(n)$, akkor az $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ sorozatok egyszerre konvergensek vagy divergensek, és ha konvergensek, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(\boldsymbol{s}')$. Valóban, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens, akkor a $\lim(\boldsymbol{s})$ pont bármely V környezetéhez van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $\boldsymbol{s}(n) \in V$; ekkor $n > \max(N, N_0)$ esetén fennáll, hogy $\boldsymbol{s}'(n) \in V$, így $\boldsymbol{s}'$ konvergens, és $\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(\boldsymbol{s}')$.

Az előző bekezdésből következik, hogy ha (M, d) metrikus tér, és az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatnak *véges sok* helyen megváltoztatjuk az értékét, akkor az így nyert $\boldsymbol{s}'$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens, továbbá, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) = \lim(\boldsymbol{s}')$. Ezért minden olyan $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \rightarrowtail M$ függvénynek is tekinthetjük a konvergenciáját és a határértékét, amelyre $\mathbb{N} \setminus \mathit{Dom}(\boldsymbol{s})$ *véges* halmaz; ehhez elegendő az $\boldsymbol{s}$ függvényt kiterjeszteni $\mathbb{N}$-re *tetszőlegesen*, és venni a kiterjesztett

sorozat határértékét (amennyiben létezik); ekkor a kiterjesztett sorozat d szerinti konvergenciájának ténye, illetve konvergencia esetén az M-beli határértéke d szerint *független* a kiterjesztés választásától.

Állítás. Metrikus térben minden konvergens sorozat mindegyik részsorozata konvergens, és a határértéke egyenlő az eredeti sorozat hatérértékével.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $\boldsymbol{s}$ egy M-ben haladó konvergens sorozat és $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény. Ha $V \in \mathscr{T}_d(\lim(\boldsymbol{s}))$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in V$; ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\sigma(n) \geq n > N$, így $\boldsymbol{s}(\sigma(n)) \in V$ is teljesül, tehát $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens d szerint, és $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = \lim(\boldsymbol{s})$. ■

Állítás. Metrikus térben minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $\boldsymbol{s}$ M-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}^+$ számot. Ekkor $B_r(\lim(\boldsymbol{s}); d) \in \mathscr{T}_d(\lim(\boldsymbol{s}))$, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in B_r(\lim(\boldsymbol{s}); d)$, vagyis $\{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \subseteq B_r(\lim(\boldsymbol{s}); d)$; ekkor az $\{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\}$ halmaz korlátos d szerint és $\{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$ szintén korlátos, hiszen véges, így $Im(\boldsymbol{s})$ is korlátos halmaz d szerint, mert két korlátos halmaz uniója korlátos, és $Im(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n > N)\} \cup \{\boldsymbol{s}(n) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq N)\}$. ■

Most jellemezzük az altérmetrika szerint konvergens sorozatokat. Látható lesz, hogy az állítás az altérmetrika szerinti környezetek jellemzési tételének alkalmazásával igazolható.

Állítás. Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek és $\boldsymbol{s}'$ M'-ben haladó sorozat. Az $\boldsymbol{s}'$ sorozat pontosan akkor konvergens M'-ben a d' altérmetrika szerint, ha konvergens M-ben a d metrika szerint és a d szerinti határértéke eleme M'-nek. Továbbá, ha $\boldsymbol{s}'$ konvergens M'-ben a d' altérmetrika szerint, akkor az $\boldsymbol{s}'$ határértéke a d és d' metrikák szerint ugyanaz a pont.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{s}'$ konvergens M'-ben a d' metrika szerint és legyen $\mathfrak{a}'$ a d' szerinti határértéke. Ekkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}')$ esetén $V \cap M' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a}')$, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}'(n) \in V \cap M' \subseteq V$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}'$ konvergens M-ben a d metrika szerint és a d szerinti határértéke megegyezik $\mathfrak{a}'$-vel, ami eleme M'-nek. Az is látható, hogy az $\boldsymbol{s}'$ határértéke a d és d' metrikák szerint ugyanaz a pont.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\boldsymbol{s}'$ konvergens M-ben a d metrika szerint, és a d szerinti $\mathfrak{a}$ határértéke olyan, hogy $\mathfrak{a} \in M'$. Ekkor $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{a})$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $V' = V \cap M'$, és egy ilyen V-hez van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}'(n) \in V \cap M' = V'$. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}'$ konvergens M'-ben a d' metrika. ■

Azonban előfordulhat az, hogy egy M'-ben haladó $\boldsymbol{s}'$ sorozat konvergens M-ben a d metrika szerint, de a határértéke *nem eleme* M'-nek; ekkor $\boldsymbol{s}'$ bizonyosan nem konvergens M'-ben a d' altérmetrika szerint. A következő állításból látszik, hogy ilyen eset pontosan akkor fordul elő, ha M' a d metrika szerint nem zárt halmaz M-ben.

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér, $E \subseteq M$ és $x \in M$.

- Az x pontosan akkor érintési pontja E-nek d szerint, ha létezik olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál d szerint. (*Az érintési pontok jellemzése sorozatokkal.*)

- Az x pontosan akkor torlódási pontja E-nek d szerint, ha létezik olyan $E \setminus \{x\}$-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál d szerint. (*A torlódási pontok jellemzése sorozatokkal.*)

- Az E halmaz pontosan akkor zárt d szerint, ha minden E-ben haladó, d szerint konvergens sorozat határértéke eleme E-nek. (*A zárt halmazok jellemzése sorozatokkal.*)

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amely x-hez konvergál d szerint, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in B_\varepsilon(x; d)$; ekkor $E \cap B_\varepsilon(x; d) \neq \emptyset$, vagyis az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján $x \in \overline{E}$. Megfordítva, tegyük fel, hogy x érintési pontja E-nek. Rögzítsünk egy $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot, amely $\mathbb{R}^+$-ban halad. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \cap B_{\varepsilon_n}(x; d) \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma szerint: $\prod_{n\in\mathbb{N}} (E \cap B_{\varepsilon_n}(x; d)) \neq \emptyset$; legyen $\boldsymbol{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(\boldsymbol{s}(n), x) < \varepsilon_n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra $\varepsilon_n < \varepsilon$, igy $d(\boldsymbol{s}(n), x) < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{s}$ sorozat az x-hez konvergál d szerint.

A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből és abból, hogy definíció szerint x pontosan akkor torlódási pontja E-nek, ha érintési pontja $E \setminus \{x\}$-nek.

A harmadik állítás nyilvánvalóan következik az elsőből és abból, hogy az E halmaz pontosan akkor zárt, ha $\overline{E} \subseteq E$. ■

Megállapodunk abban, hogy ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\boldsymbol{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor az "$\boldsymbol{s}$ konvergens a $d_{\|\cdot\|}$ szerint" kifejezés helyett a kevésbé pontos "$\boldsymbol{s}$ konvergens a $\|\cdot\|$ szerint" kifejezést használjuk. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\boldsymbol{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor az $\boldsymbol{s}$-hez asszociált $\sum \boldsymbol{s}$ (vektor)sor szintén E-ben haladó sorozat, ezért a $\sum \boldsymbol{s}$ sor $\|\cdot\|$ szerinti konvergenciáját már értelmeztük; ha a $\sum \boldsymbol{s}$ sor a $\|\cdot\|$ szerint konvergens, akkor a $\lim \left(\sum \boldsymbol{s}\right)$ határértéket a $\sum \boldsymbol{s}$ sor *összegének* nevezzük, és a $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)$ szimbólummal jelöljük.

Definíció. Legyen E vektortér a K test felett, és $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ E-ben haladó sorozatok, valamint α K-ban haladó sorozat. Ekkor az $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}'$ és $\alpha.\boldsymbol{s}$ E-ben haladó sorozatokat úgy értelmezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}')(n) := \boldsymbol{s}(n) + \boldsymbol{s}'(n), \quad (\alpha.\boldsymbol{s})(n) := \alpha(n).\boldsymbol{s}(n)$$

Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor $\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|$ jelöli azt a valós sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|(n) := \|\boldsymbol{s}(n)\|.$$

Állítás. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ E-ben haladó sorozatok, valamint α $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat.

a) Ha $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint, akkor $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}'$ is konvergens $\|\cdot\|$ szerint és

$$\lim(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}').$$

b) Ha $\boldsymbol{s}$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint és α konvergens számsorozat, akkor $\alpha.\boldsymbol{s}$ is konvergens $\|\cdot\|$ szerint, és

$$\lim(\alpha.\boldsymbol{s}) = \lim(\alpha).\lim(\boldsymbol{s}).$$

c) Ha $\boldsymbol{s}$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint, akkor $\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, és

$$\lim(\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|) = \|\lim(\boldsymbol{s})\|.$$

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ konvergens sorozatok $\|\cdot\|$ szerint, valamint α konvergens számsorozat.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\varepsilon' < \varepsilon/2$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $\|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})\| < \varepsilon'$ (illetve $\|\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}')\| < \varepsilon'$). Ekkor minden $n > \max(N, N')$ természetes számra:

$$\|(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}')(n) - (\lim(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}'))\| \leq \|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})\| + \|\boldsymbol{s}'(n) - \lim(\boldsymbol{s}')\| < 2\cdot\varepsilon' < \varepsilon,$$

tehát $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}'$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint, és $\lim(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}') = \lim(\boldsymbol{s}) + \lim(\boldsymbol{s}')$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$(\alpha.\boldsymbol{s})(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\boldsymbol{s})) = \alpha(n).\boldsymbol{s}(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\boldsymbol{s})) =$$
$$(\alpha(n) - \lim(\alpha)).(\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})) + (\alpha(n) - \lim(\alpha)).\lim(\boldsymbol{s}) + \lim(\alpha).(\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})),$$

amiből az következik, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $|\alpha(n) - \lim(\alpha)| < \varepsilon$, valamint $\|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})\| < \varepsilon$, akkor:

$$\|(\alpha.\boldsymbol{s})(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\boldsymbol{s}))\| < \varepsilon^2 + \varepsilon\cdot\|\lim(\boldsymbol{s})\| + |\lim(\alpha)|\cdot\varepsilon.$$

Legyen tehát $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és vegyünk tetszőleges olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $(\varepsilon')^2 + \varepsilon'\cdot\|\lim(\boldsymbol{s})\| + |\lim(\alpha)|\cdot\varepsilon' \leq \varepsilon$; például:

$$\varepsilon' := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + |\lim(\alpha)| + \|\lim(\boldsymbol{s})\|}\right).$$

Az ε' számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ (illetve $N' \in \mathbb{N}$) olyan, hogy minden $n > N$ (illetve $n > N'$) természetes számra $|\alpha(n) - \lim(\alpha)| < \varepsilon'$ (illetve $\|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})\| < \varepsilon'$). Ekkor a fentiek szerint minden $n > N$ természetes számra:

$$\|(\alpha.\boldsymbol{s})(n) - (\lim(\alpha)).(\lim(\boldsymbol{s}))| < (\varepsilon')^2 + \varepsilon'\cdot\|\lim(\boldsymbol{s})\| + |\lim(\alpha)|\cdot\varepsilon' \leq \varepsilon,$$

tehát $\alpha.\boldsymbol{s}$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint és $\lim(\alpha.\boldsymbol{s}) = \lim(\alpha).\lim(\boldsymbol{s})$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})\| < \varepsilon$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra:

$$|\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|(n) - \|\lim(\boldsymbol{s})\|| := |\|\boldsymbol{s}(n)\| - \|\lim(\boldsymbol{s})\|| \leq \|\boldsymbol{s}(n) - \lim(\boldsymbol{s})\| < \varepsilon,$$

tehát $\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, és

$$\lim(\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|) = \|\lim(\boldsymbol{s})\|$$

teljesül. ■

Következmény. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $F \subseteq E$ lineáris altér, akkor $\overline{F}$ is lineáris altere E-nek.

Bizonyítás. Ha $x, x' \in \overline{F}$, akkor az érintési pontok sorozatokkal való jellemzése alapján léteznek olyan $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ sorozatok, amelyek F-ben haladnak, és $\|\cdot\|$ szerint $x = \lim(\boldsymbol{s})$, $x' = \lim(\boldsymbol{s})$ teljesül; ekkor az előző állítás a) pontja szerint $x + x' = \lim(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}')$, és az $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}'$ sorozat is F-ben halad, így $x + x' \in \overline{F}$.

Ha $x \in \overline{F}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor érintési pontok sorozatokkal való jellemzése alapján létezik olyan F-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, amelyre $x = \lim(\boldsymbol{s})$ a $\|\cdot\|$ szerint; ekkor az előző állítás b) pontját alkalmazhatjuk az α értékű konstans-sorozatra (amit szintén α-val jelölünk), tehát $\alpha.x = \lim(\alpha.\boldsymbol{s})$, és az $\alpha.\boldsymbol{s}$ sorozat is $\mathbb{F}$-ben halad, következésképpen $\alpha.x \in \overline{F}$ ■

Definíció. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor az E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot *zérussorozatnak* nevezzük $\|\cdot\|$ szerint, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens $\|\cdot\|$ szerint és $\lim(\boldsymbol{s}) = 0$.

Állítás. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $\boldsymbol{s}$ E-ben haladó és α $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat. Ha

- α korlátos számsorozat és $\boldsymbol{s}$ a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat, *vagy*
- α zérussorozat $\mathbb{K}$-ban és $\boldsymbol{s}$ korlátos $\|\cdot\|$ szerint,

akkor $\alpha.\boldsymbol{s}$ zérussorozat $\|\cdot\|$ szerint.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy α korlátos sorozat $\mathbb{K}$-ban és $\boldsymbol{s}$ a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $Im(\alpha) \subseteq B_r(0; \mathbb{K})$, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\alpha(n)| < r$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) = 0$ miatt az $\varepsilon/r \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $\|\boldsymbol{s}(n)\| < \varepsilon/r$; ekkor $\|(\alpha.\boldsymbol{s})(n)\| < r \cdot (\varepsilon/r) = \varepsilon$, így $\alpha.\boldsymbol{s}$ zérussorozat $\|\cdot\|$ szerint.

Tegyük fel, hogy α zérussorozat $\mathbb{K}$-ban és $\boldsymbol{s}$ korlátos $\|\cdot\|$ szerint. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $Im(\boldsymbol{s}) \subseteq B_r(0; d_{\|\cdot\|})$, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\boldsymbol{s}(n)\| < r$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim(\alpha) = 0$ miatt az $\varepsilon/r \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ha $n > N$, akkor $|\alpha(n)| < \varepsilon/r$; ekkor $\|(\alpha.\boldsymbol{s})(n)\| < (\varepsilon/r) \cdot r = \varepsilon$, így $\alpha.\boldsymbol{s}$ zérussorozat $\|\cdot\|$ szerint. ■

Állítás. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre a $\sum \boldsymbol{s}$ vektorsor a $\|\cdot\|$ szerint konvergens, akkor $\boldsymbol{s}$ a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat.

Bizonyítás. Legyen S a $\sum \boldsymbol{s}$ sor összege, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $S = \lim\left(\sum \boldsymbol{s}\right)$ miatt vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $n > N$ természetes számra $\left\|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n) - S\right\| < \varepsilon/2$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$\|\boldsymbol{s}(n)\| = \left\|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n+1) - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n)\right\| \leq$$
$$\leq \left\|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n+1) - S\right\| + \left\|S - \left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n)\right\| < \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}$ a $\|\cdot\|$ szerint zérussorozat. ■

Definíció. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\boldsymbol{s}$ E-ben haladó sorozat, akkor a $\sum \boldsymbol{s}$ vektorsort *abszolút konvergensnek* nevezzük $\|\cdot\|$ szerint, ha a $\sum \|\boldsymbol{s}(\cdot)\|$ numerikus sor konvergens.

Általában egy normált térben haladó sorozathoz asszociált sor konvergenciája és abszolút konvergenciája *egymástól független tulajdonságok*, vagyis egyikből sem következik a másik.

Állítás. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre a $\sum \boldsymbol{s}$ vektorsor a $\|\cdot\|$ szerint konvergens *és* abszolút konvergens, akkor

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{s}(k)\|.$$

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}(k)\right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\boldsymbol{s}(k)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}(k)|,$$

ezért fennáll a

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)\right\| = \left\|\lim\left(\sum \boldsymbol{s}\right)\right\| = \lim\left\|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(\cdot)\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\left(\sum \boldsymbol{s}\right)(n)\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{s}(k)\|$$

egyenlőtlenség. ■

Definíció. Az (M, d) metrikus teret *szeparábilisnak* nevezzük, ha létezik M-nek olyan megszámlálható részhalmaza, amely sűrű M-ben d szerint.

Állítás. Az (M, d) metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik olyan $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$ megszámlálható halmaz, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (M, d) szeparábilis metrikus tér, és legyen $D \subseteq M$ olyan megszámlálható halmaz, amelyre $\overline{D} = M$. Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$. Értelmezzük az

$$\mathfrak{S} := \{B_{r_n}(\mathfrak{a}; d) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (\mathfrak{a} \in D)\}$$

halmazt. Ekkor $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$, és $\mathfrak{S}$ megszámlálható, mert az

$$\mathbb{N} \times D \to \mathfrak{S}; \quad (n, \mathfrak{a}) \mapsto B_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$$

leképezés szürjekció, és az $\mathbb{N} \times D$ halmaz megszámlálható. Könnyen látható, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként. Valóban, legyen $\Omega \in \mathscr{T}_d$ és $x \in \Omega$. Vehetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $B_r(x; d) \subseteq \Omega$; ekkor $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$ miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $r_n < r/2$. A D halmaz sűrű d szerint, így $B_{r_n}(x; d) \cap D \neq \emptyset$; legyen $\mathfrak{a}$ eleme ennek a metszetnek. Ekkor $B_{r_n}(\mathfrak{a}; d) \in \mathfrak{S}$, és

$$x \in B_{r_n}(\mathfrak{a}; d) \subseteq B_r(x; d) \subseteq \Omega,$$

hiszen $y \in B_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$ esetén $d(y, x) \leq d(y, \mathfrak{a}) + d(\mathfrak{a}, x) < 2 \cdot r_n < r$. Ez azt jelenti, hogy ha $I := \{H \in \mathfrak{S} | H \subseteq \Omega\}$, akkor $\Omega = \bigcup\limits_{H\in I} H$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$ olyan megszámlálható halmaz, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként. Legyen $\mathfrak{S}_0 := \mathfrak{S} \setminus \{\emptyset\}$, és tekintsük az $(S)_{S\in\mathfrak{S}_0}$ halmazrendszert, amelynek minden tagja nem üres halmaz. A kiválasztási axióma szerint vehetünk egy

$$f \in \prod_{S\in\mathfrak{S}_0} S$$

kiválasztó-függvényt. Ekkor $Im(f)$ megszámlálható halmaz, mert $Dom(f) = \mathfrak{S}_0$ megszámlálható. Továbbá $Im(f)$ sűrű d szerint, mert ha $x \in M$ és Ω az x-nek nyílt környezete, akkor a feltevés szerint van olyan $S \in \mathfrak{S}$ halmaz, amelyre $x \in S \subseteq \Omega$; ekkor $S \in \mathfrak{S}_0$ és $f(S) \in S$, vagyis $f(S) \in Im(f) \cap \Omega$. ■

Állítás. Ha $n \in \mathbb{N}$, és $p = \infty$ vagy $p \geq 1$ valós szám, akkor a $\mathbb{Q}^n$ halmaz sűrű $\mathbb{R}^n$-ben, és $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$ sűrű $\mathbb{C}^n$-ben a $\|\cdot\|_p$ szerint.

Bizonyítás. Láttuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ feletti $\|\cdot\|_p$ normák ekvivalensek egymással, és egy halmaz sűrűsége nyilvánvalóan topologikus tulajdonság, ezért elég a $\|\cdot\|_\infty$ normára bizonyítani. Ha $x := (x_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$B_r(x; d_{\|\cdot\|_\infty}) = \prod_{k\in n} B_r(x_k; \mathbb{K}),$$

és a II. fejezet 2. pontjában láttuk, hogy minden $k \in n$ esetén $B_r(x_k; \mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, és $B_r(x_k; \mathbb{C}) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, ezért a $B_r(x; d_{\|\cdot\|_\infty})$ gömb metszi $\mathbb{Q}^n$-t a valós esetben, és $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$-t a komplex esetben. Ebből az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján következik az állítás. ■

Következmény. Ha $n \in \mathbb{N}$, és $p = \infty$ vagy $p \geq 1$ valós szám, akkor a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ normált tér szeparábilis.

Bizonyítás. A $\mathbb{Q}^n$ és $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$ halmazok megszámlálhatóak. ■

Gyakorlatok

1. Legyen $H \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{N};\mathbb{N})$ olyan *véges* halmaz, hogy minden $\sigma \in H$ függvény szigorúan monoton növő, és $\mathbb{N} = \bigcup_{\sigma \in H} Im(\sigma)$. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat pontosan akkor konvergens d szerint, ha minden $\sigma \in H$ esetén az $s \circ \sigma$ részsorozat konvergens d szerint, és minden $\sigma, \sigma' \in H$ esetén $\lim(s \circ \sigma) = \lim(s \circ \sigma')$ teljesül.

2. Ha d és d' metrikák az M halmaz felett, akkor a következő állítások ekvivalensek:

a) a d és d' metrikák ekvivalensek;

b) minden M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, és minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra: az $\boldsymbol{s}$ pontosan akkor konvergál d szerint az $\mathfrak{a}$ ponthoz, ha d' szerint konvergál az $\mathfrak{a}$ ponthoz.

(*Útmutatás.* tegyük fel, hogy a) nem igaz. Ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, hogy $\Omega \notin \mathscr{T}_{d'}$, *vagy* van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$, hogy $\Omega' \notin \mathscr{T}_d$. A meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $\Omega \in \mathscr{T}_d$ és $\Omega \notin \mathscr{T}_{d'}$, továbbá legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ olyan pont, amely nem belső pontja Ω-nak a d' metrika szerint. Ekkor minden $\delta \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_\delta(\mathfrak{a}; d') \setminus \Omega \neq \emptyset$, tehát ha $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó számsorozat, akkor a kiválasztási axióma szerint vehetünk egy

$$\boldsymbol{s} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} (B_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d') \setminus \Omega)$$

sorozatot. Világos, hogy ha $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben, akkor $\boldsymbol{s}$ konvergál $\mathfrak{a}$-hoz d' szerint. Ugyanakkor $\boldsymbol{s}$ az $M \setminus \Omega$ halmazban halad, amely *zárt* d szerint, ezért ha $\boldsymbol{s}$ a d szerint is konvergálna $\mathfrak{a}$-hoz, akkor $\mathfrak{a} \in M \setminus \Omega$ teljesülne, holott $\mathfrak{a} \in \Omega$. Ezért b) sem igaz, ami azt bizonyítja, hogy b)$\Rightarrow$a) teljesül.)

3. Minden $p \geq 1$ valós számra $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ a $\|\cdot\|_p$ szerint sűrű az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattérben. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$, és ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^{(\mathbb{N})}$ megszámlálható sűrű halmaz $l^p_{\mathbb{K}}$-ban a $\|\cdot\|_p$ szerint, tehát az $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ sorozatterek szeparábilisak.

4. A $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ lineáris altér $\|\cdot\|_\infty$ szerinti lezártja $l^\infty_{\mathbb{K}}$-ben megegyezik a $\mathbb{K}$-ban haladó zérussorozatok lineáris alterével.

5. Nem megszámlálhatóan végtelen alaphalmazú diszkrét metrikus tér nem szeparábilis.

6. Az $(l^\infty_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér nem szeparábilis.

(*Útmutatás.* Minden $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazra legyen

$$\Omega_E := B_{1/2}(\chi_E; d_{\|\cdot\|_\infty}).$$

Ekkor $(\Omega_E)_{E\in\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ nem üres nyílt halmazok *diszjunkt* rendszere $l^\infty_{\mathbb{K}}$-ben, így az $\{\Omega_E | E \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$ halmaz *nem megszámlálható.* Ha $D \subseteq l^\infty_{\mathbb{K}}$ sűrű halmaz a $\|\cdot\|_\infty$ szerint, akkor minden $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazra $D \cap \Omega_E \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma szerint vehetünk egy

$$f \in \prod_{E\in\mathscr{P}(\mathbb{N})} (D \cap \Omega_E)$$

függvényt. Ekkor $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to D$ *injekció*, tehát D legalább kontinuumszámosságú.)

7. Legyen $\boldsymbol{c} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. A $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vektorteréhez tekintsük a következő leképezést:

$$d_{\boldsymbol{c}} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+; \quad (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{|\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}'(k)|}{1 + |\boldsymbol{s}(k) - \boldsymbol{s}'(k)|}.$$

a) A $d_{\boldsymbol{c}}$ függvény nem normálható, transzláció-invariáns metrika a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sorozattér felett.

b) Ha $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ és $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$-ben haladó sorozat, akkor $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor konvergál $\boldsymbol{s}$-hez a $d_{\boldsymbol{c}}$ metrika szerint, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(\boldsymbol{s}_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergál $\boldsymbol{s}(k)$-hoz $\mathbb{K}$-ban.

c) Ha $\boldsymbol{c}' := (c'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szintén olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c'_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ feletti $d_{\boldsymbol{c}}$ és $d_{\boldsymbol{c}'}$ metrikák ekvivalensek.

(*Útmutatás.* A 4. pont **2**. gyakorlatának útmutatásában még egy ennél is általánosabb állítást is igazolunk.)

8. Legyen T halmaz és $f : T \to \mathbb{R}_+$ függvény. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{f^{-1}\left\langle\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right\rangle}.$$

Ekkor minden $t \in T$ esetén az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^+}$ rendszer monoton növő és $f(t) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} f_n(t)$. Ha f korlátos, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$, akkor $\sup\limits_{t\in T} |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$, vagyis ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in T} |f(t) - f_n(t)| \right) = 0$$

teljesül.

9. Ha (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek, és $D \subseteq M'$ olyan halmaz, amely sűrű M'-ben a d' metrika szerint, és M' sűrű M-ben a d metrika szerint, akkor D sűrű M-ben a d metrika szerint.

10. Szeparábilis metrikus tér minden metrikus altere szeparábilis metrikus tér.

(*Útmutatás.* Ha (M', d') metrikus altere az (M, d) szeparábilis metrikus térnek, és $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$ olyan megszámlálható halmaz, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként, akkor az $\mathfrak{S}' := \{M' \cap \Omega | \Omega \in \mathfrak{S}\}$ halmaz része $\mathscr{T}_{d'}$-nek, megszámlálható, és az M' minden d' szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}'$-ben haladó rendszer uniójaként.)

4. Metrikus és normált terek szorzata

Állítás. Legyen $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ normált terek nem üres véges rendszere, és $E := \prod_{i\in I} E_i$ az $(E_i)_{i\in I}$ vektortér-rendszer lineáris szorzata. Ekkor a

$$\|\cdot\|_{(\infty)} : E \to \mathbb{R}_+; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \max_{i\in I} \|x_i\|_i$$

leképezés norma E felett, és minden $p \geq 1$ valós számra a

$$\|\cdot\|_{(p)} : E \to \mathbb{R}_+; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés norma E felett, és ezek a normák páronként ekvivalensek.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{(\infty)}$ függvény nyilvánvalóan norma, míg a $p \geq 1$ valós számra a $\|\cdot\|_{(p)}$ függvény az elemi Minkowski-egyenlőtlenség alapján teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, hiszen ha $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in E$, akkor

$$\|(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I}\|_{(p)} := \left(\sum_{i\in I} \|x_i + y_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i + \|y_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} \|y_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} =: \|(x_i)_{i\in I}\|_{(p)} + \|(y_i)_{i\in I}\|_{(p)}$$

Nyilvánvaló, hogy ha $p \geq 1$ valós szám és $(x_i)_{i\in I} \in E$, akkor

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_{(\infty)} := \max_{i\in I} \|x_i\|_i \leq \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} =: \|(x_i)_{i\in I}\|_{(p)},$$

továbbá világos, hogy

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_{(p)} := \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i\in I} \max_{j\in I} \|x_j\|_j{}^p\right)^{\frac{1}{p}} =: (Card(I))^{\frac{1}{p}} \|(x_i)_{i\in I}\|_{(\infty)},$$

tehát a $\|\cdot\|_{(\infty)}$ és $\|\cdot\|_{(p)}$ normák ekvivalensek. Ezért bármely két $q, p \geq 1$ valós számra is igaz az, hogy a $\|\cdot\|_{(q)}$ és $\|\cdot\|_{(p)}$ normák ekvivalensek. ■

Definíció. Ha $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ normált terek nem üres véges rendszere, akkor a $\left(\prod_{i\in I} E_i, \|\cdot\|_{(\infty)}\right)$ normált teret az adott *normálttér-rendszer szorzatának* nevezzük.

Állítás. Legyen $((M_i, d_i))_{i\in I}$ metrikus terek nem üres véges rendszere, és $M := \prod_{i\in I} M_i$ az $(M_i)_{i\in I}$ halmazrendszer szorzata. Ekkor a

$$d_{(\infty)} : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max_{i\in I} d_i(x_i, y_i)$$

leképezés metrika M felett, és minden $p \geq 1$ valós számra a

$$d_{(p)} : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \left(\sum_{i\in I} d_i(x_i, y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

leképezés metrika M felett, és ezek a metrikák páronként ekvivalensek.
Bizonyítás. Az előző állítás bizonyításának mintájára igazolható. ■

Definíció. Ha $((M_i, d_i))_{i\in I}$ metrikus terek nem üres véges rendszere, akkor a $\left(\prod_{i\in I} M_i, d_{(\infty)}\right)$ metrikus teret az adott *metrikustér-rendszer szorzatának* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, akkor minden $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$B_r(\mathfrak{a}; d) = \prod_{i\in I} B_r(\mathfrak{a}_i; d_i), \quad \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d) = \prod_{i\in I} \overline{B}_r(\mathfrak{a}_i; d_i),$$

vagyis a szorzatmetrika szerinti gömbök valójában olyan szorzathalmazok, amelyek "oldalai" gömbök a megfelelő komponens-térben. Éppen ez a tény indokolja azt, hogy $d_{(\infty)}$-t tekintsük a "szorzatmetrikának". Egyébként a szorzattérbeli gömbökre vonatkozó előző egyenlőségekből következik, hogy egy $V \subseteq M$ halmaz pontosan akkor környezete a $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M$ pontnak a d szorzatmetrika szerint, ha létezik olyan $(V_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén V_i az $\mathfrak{a}_i$-nek környezete d_i szerint és $\prod_{i\in I} V_i \subseteq V$.

A továbbiakban gyakran felhasználunk két elemi halmazelméleti tényt.
- Ha $(E_i)_{i\in I}$ és $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszerek, akkor

$$\left(\prod_{i\in I} E_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} F_i\right) = \prod_{i\in I} (E_i \cap F_i).$$

- Ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén E_i nem üres, akkor minden $k \in I$ indexre

$$pr_k\langle \prod_{i\in I} E_i\rangle = E_k.$$

Állítás. Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha minden $i \in I$ esetén $\Omega_i \subseteq M_i$ (illetve $F_i \subseteq M_i$) a d_i metrika szerint

nyílt (illetve zárt) halmaz M_i-ben, akkor $\prod_{i\in I}\Omega_i$ (illetve $\prod_{i\in I}F_i$) nyílt (illetve zárt) halmaz a d szorzatmetrika szerint.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\Omega_i$. Ekkor minden $i \in I$ esetén van olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_{r_i}(\mathfrak{a}_i; d_i) \subseteq \Omega_i$; így bármely $r \in]0, \min_{i\in I} r_i]$ valós számra

$$B_r(\mathfrak{a}; d) = \prod_{i\in I} B_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \subseteq \prod_{i\in I} B_{r_i}(\mathfrak{a}_i; d_i) \subseteq \prod_{i\in I}\Omega_i,$$

ezért $\prod_{i\in I}\Omega_i$ nyílt halmaz a d metrika szerint.

Legyen $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M \setminus \prod_{i\in I} F_i$. Ekkor vehetünk olyan $j \in I$ indexet, amelyre $\mathfrak{a}_j \notin F_j$, és ekkor az F_j halmaz d_j szerinti zártsága miatt van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\mathfrak{a}_j; d_j) \cap F_j = \emptyset$. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$B_r(\mathfrak{a}; d) \cap \left(\prod_{i\in I} F_i\right) = \left(\prod_{i\in I} B_r(\mathfrak{a}_i; d_i)\right) \cap \left(\prod_{i\in I} F_i\right) = \prod_{i\in I}(B_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \cap F_i) = \emptyset,$$

így $B_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq M \setminus \prod_{i\in I} F_i$, ami azt jelenti, hogy $\prod_{i\in I} F_i$ zárt a d metrika szerint. ■

Állítás. Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M_i$, akkor

$$\overline{\prod_{i\in I} E_i} = \prod_{i\in I} \overline{E_i}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint $\prod_{i\in I} \overline{E_i}$ zárt halmaz d szerint, és ez természetesen tartalmazza a $\prod_{i\in I} E_i$ szorzathalmazt, ezért $\overline{\prod_{i\in I} E_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{E_i}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M \setminus \overline{\prod_{i\in I} E_i}$. Ekkor van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre

$$\emptyset = B_r(\mathfrak{a}; d) \cap \left(\prod_{i\in I} E_i\right) = \prod_{i\in I}(B_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \cap E_i),$$

amiből következik olyan $i \in I$ létezése, amelyre $B_r(\mathfrak{a}_i; d_i) \cap E_i = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $i \in I$, amelyre $\mathfrak{a}_i \notin \overline{E_i}$, ezért $\mathfrak{a} \in M \setminus \prod_{i\in I} \overline{E_i}$. ■

Állítás. Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz a d szorzatmetrika szerint, akkor minden $i \in I$ esetén $pr_i\langle\Omega_i\rangle \subseteq M_i$ nyílt halmaz d_i szerint.

Bizonyítás. Legyenek $i \in I$ és $\mathfrak{a}_i \in pr_i\langle\Omega_i\rangle$ rögzítettek. Vegyünk olyan $\mathfrak{a} \in \Omega$ pontot, amelyre $\mathfrak{a}_i = pr_i(\mathfrak{a})$. Az Ω halmaz d szerinti nyíltsága miatt van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $B_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq \Omega$. Ekkor $B_r(\mathfrak{a}_i; d_i) = pr_i\langle B_r(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq pr_i\langle\Omega_i\rangle$, így $pr_i\langle\Omega_i\rangle$ nyílt halmaz d_i szerint. ■

Azonban metrikus terek szorzatában létezhet olyan zárt halmaz, amelynek egyik projekciója sem zárt.

Állítás. Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat pontosan akkor konvergens d szerint, ha minden $i \in I$ esetén a $pr_i \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens M_i-ben d_i szerint. Ha az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens d szerint, akkor minden $i \in I$ esetén

$$pr_i\left(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{s}(n)\right) = \lim_{n\to\infty} (pr_i(\boldsymbol{s}(n)))$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat konvergens d szerint, és legyen $\lim(\boldsymbol{s}) = (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} =: \mathfrak{a}$. Legyen $i \in I$ rögzített index, és $V_i \in \mathscr{T}_{d_i}(\mathfrak{a}_i)$. Minden $j \in I \setminus \{i\}$ legyen $V_j := M_j$, és $V := \prod_{j\in I} V_j$. Ekkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in V$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $(pr_i \circ \boldsymbol{s})(n) \in pr_i\langle V\rangle = V_i$, tehát az M_i-ben haladó $pr_i \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens d_i szerint, és $\lim(pr_i \circ \boldsymbol{s}) = pr_i(\lim(\boldsymbol{s}))$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $pr_i \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens M_i-ben d_i szerint, és $\mathfrak{a}_i = \lim(pr_i \circ \boldsymbol{s})$. Legyen $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$; megmutatjuk, hogy $\boldsymbol{s}$ konvergál $\mathfrak{a}$-hoz d szerint. Ehhez legyen $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ tetszőleges, és vegyünk olyan $(V_i)_{i\in I}$ rendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén V_i az $\mathfrak{a}_i$-nek környezete d_i szerint és $\prod_{i\in I} V_i \subseteq V$. Minden $i \in I$ esetén vehetünk olyan $N_i \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $n \in \mathbb{N}$ és $n > N_i$ esetén $(pr_i \circ \boldsymbol{s})(n) \in V_i$. Ekkor $N := \max_{i\in I} N_i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra és minden $i \in I$ indexre $pr_i(\boldsymbol{s}(n)) \in V_i$, vagyis $\boldsymbol{s}(n) \in \prod_{i\in I} V_i \subseteq V$. ■

Gyakorlatok

1. Legyen $((M_i, d_i))_{i\in I}$ metrikus terek nem üres véges rendszere, és $\sigma : I \to I$ bijekció. Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ metrikustér-rendszer szorzata és (M_σ, d_σ) az $((M_{\sigma(i)}, d_{\sigma(i)}))_{i\in I}$ metrikustér-rendszer szorzata, akkor az

$$M \to M_\sigma; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto (x_{\sigma(i)})_{i\in I}$$

leképezés izometrikus bijekció (azaz izomorfizmus) az (M, d) és (M_σ, d_σ) metrikus terek között.

2. Legyen $((M_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ metrikus terek sorozata és $\boldsymbol{c} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Legyen $M := \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$, és értelmezzük a

$$d_{\boldsymbol{c}} : M \times M \to \mathbb{R}_+; \quad (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}{1 + d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}$$

leképezést.

a) A $d_{\boldsymbol{c}}$ függvény metrika az M szorzathalmaz felett.

b) Ha $\boldsymbol{s} \in M$ és $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in N}$ M-ben haladó sorozat, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{s}$ pontosan akkor teljesül a $d_{\boldsymbol{c}}$ metrika szerint, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n(k) = \boldsymbol{s}(k)$ teljesül a d_k metrika szerint.

c) Ha $\boldsymbol{c}' := (c'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ szintén olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c'_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor az M feletti $d_{\boldsymbol{c}}$ és $d_{\boldsymbol{c}'}$ metrikák ekvivalensek.

d) Egy $\Omega \subseteq M$ halmaz pontosan akkor nyílt a $d_{\boldsymbol{c}}$ metrika szerint, ha minden $\mathfrak{a} \in \Omega$ ponthoz van olyan $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, amelyre a következők teljesülnek:

- Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén V_n környezete $pr_n(\mathfrak{a})$-nak a d_n metrika szerint.
- Az $\{n \in \mathbb{N} | V_n \neq M_n\}$ halmaz *véges*.
- Teljesül az, hogy $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq \Omega$.

(*Útmutatás.* a) Csak a háromszög-egyenlőtlenség nem nyilvánvaló. Ehhez elég azt igazolni, hogy ha $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ és $\gamma \leq \alpha + \beta$, akkor

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}.$$

b) A bizonyításban annak az elemi ténynek lesz jelentősége, hogy az

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \frac{t}{1+t}$$

függvény *szigorúan monoton növő.* Legyen $\boldsymbol{s} \in M$ és $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in N}$ M-ben haladó sorozat.

Először tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{s}$ teljesül a $d_{\boldsymbol{c}}$ metrika szerint, és legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor a $c_k \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $N_k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_k$ természetes számra

$$c_k \frac{d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}{1 + d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))} \leq d_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{s}_n, \boldsymbol{s}) < c_k \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \in \mathbb{R}^+,$$

tehát $d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k)) < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n(k) = \boldsymbol{s}(k)$ teljesül a d_k metrika szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n(k) = \boldsymbol{s}(k)$ teljesül a d_k metrika szerint, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\sum\limits_{k=N'+1}^{\infty} c_k < \varepsilon/2$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \leq N'$, akkor létezik olyan $N_k \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_k$ természetes számra

$$d_k(\boldsymbol{s}_n(k), \boldsymbol{s}(k)) < \frac{\varepsilon/2}{\sum\limits_{j=0}^{N'} c_j}.$$

Kiválasztva ilyen $(N_k)_{0\leq k\leq N'}$ rendszert, ha $N := \max(N', \max\limits_{0\leq k\leq N'} N_k)$, akkor minden $n > N$ természetes számra

$$d_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{s}_n, \boldsymbol{s}) = \sum_{k=0}^{N'} c_k \frac{d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}{1 + d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))} + \sum_{k=N'+1}^{\infty} c_k \frac{d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}{1 + d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))} <$$

$$< \sum_{k=0}^{N'} c_k \frac{d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}{1 + d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))} + \frac{\varepsilon}{2} < \left(\sum_{k=0}^{N'} c_k\right) \cdot \frac{\varepsilon/2}{\sum\limits_{j=0}^{N'} c_j} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{s}$ a $d_{\boldsymbol{c}}$ metrika szerint.

c) A 3. pont **2**. gyakorlat eredménye és a b) alapján nyilvánvaló.)

5. Kompakt halmazok metrikus terekben

Az eulidészi metrikával ellátott $\mathbb{K}$ metrikus térrel kapcsolatban a korlátos és zárt halmazok fontos szerepet játszottak. Azonban tetszőleges metrikus térben a korlátos és zárt halmazokra sem a Cantor-féle közösrész-tétel, sem a Borel-Lebesgue befedési-tétel, sem a Bolzano-Weierstrass kiválasztási-tétel, sem a Bolzano-Weierstrass tétel nem érvényes. Mindazonáltal metrikus terekben is bevezethető olyan halmaztípus, amely ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint a korlátos és zárt halmazok $\mathbb{K}$-ban; ezek a *kompakt* halmazok.

Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér. Egy $K \subseteq M$ halmazt *kompaktnak* nevezünk a d metrika szerint, ha az M d szerint nyílt halmazainak bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszerére teljesül az, hogy ha $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$, akkor létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$. Azt mondjuk, hogy (M, d) *kompakt metrikus tér*, ha (M, d) metrikus tér és M kompakt részhalmaza M-nek a d szerint.

Tehát egy halmaz kompaktsága azt jelenti, hogy a halmaz bármely nyílt befedésének létezik véges részbefedése, vagyis a kompaktság fogalmát metrikus terekben úgy vezetjük be, hogy kompakt halmazokra a Borel-Lebesgue befedési tétel *definíció szerint* teljesüljön. A kompaktság nyilvánvalóan topologikus fogalom.

Állítás. Metrikus térben minden kompakt halmaz korlátos és zárt.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$.

Tegyük fel, hogy E nem korlátos d szerint. Legyen $\mathfrak{a} \in M$ rögzített, és vegyünk olyan $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely $\mathbb{R}^+$-ban halad, monoton növő, és $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = +\infty$. A feltevés szerint $M = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$, tehát $(B_{r_n}(\mathfrak{a}; d))_{n\in\mathbb{N}}$ nyílt befedése E-nek. Ugyanakkor minden $H \subseteq \mathbb{N}$ nem üres véges halmazra $\bigcup\limits_{n\in H} B_{r_n}(\mathfrak{a}; d) = B_{r_{\max(H)}}(\mathfrak{a}; d)$, ezért nem létezik olyan $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup\limits_{n\in H} B_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$, hiszen a feltevés szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \nsubseteq B_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$. Tehát E nem kompakt halmaz.

Tegyük fel, hogy E nem zárt d szerint, és legyen $\mathfrak{a} \in \overline{E} \setminus E$. Vegyünk olyan $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely $\mathbb{R}^+$-ban halad, monoton fogyó, és $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$. Ha $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(x, \mathfrak{a}) \leq r_n$, így $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$ miatt $d(x, \mathfrak{a}) = 0$, vagyis $x = \mathfrak{a}$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d) = \{\mathfrak{a}\}$. Tehát az $(M \setminus \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer minden tagja nyílt, és $\mathfrak{a} \notin E$ miatt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (M \setminus \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)) = M \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)) = M \setminus \{\mathfrak{a}\} \supseteq E.$$

Ugyanakkor minden $H \subseteq \mathbb{N}$ nem üres véges halmazra $\bigcup\limits_{n\in H} (M \setminus \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a}; d)) = M \setminus \overline{B}_{r_{\max(H)}}(\mathfrak{a}; d)$, ezért nem létezik olyan $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq$

$\bigcup_{n\in H}(M \setminus \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a};d))$, hiszen $\mathfrak{a} \in \overline{E}$ miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E \cap \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a};d) \neq \emptyset$. Tehát E nem kompakt halmaz. ■

Azonban metrikus térben, sőt normált térben is létezhetnek olyan korlátos és zárt halmazok, amelyek nem kompaktak. Ez nem zárja ki azt, hogy bizonyos metrikus terekben a kompakt halmazok éppen a korlátos és zárt halmazok legyenek, mint például az euklidészi metrikával ellátott $\mathbb{R}$ metrikus térben.

Állítás. Metrikus tér kompakt részhalmazának minden zárt részhalmaza kompakt. Kompakt metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.

Bizonyítás. A második állás következik az elsőből és a kompakt halmazok zártságából, ezért elég az elsőt igazolni.

Legyen (M,d) metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz, és $F \subseteq K$ zárt halmaz. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése F-nek. Vegyünk olyan α halmazt, hogy $\alpha \notin I$, és legyen $I' := I \cup \{\alpha\}$, valamint minden $i \in I$ esetén $\Omega'_i := \Omega_i$, ha $i \neq \alpha$, és $\Omega'_\alpha := M \setminus F$. Az F halmaz zárt, ezért $(\Omega'_i)_{i\in I'}$ nyílt halmazok rendszere, és nyilvánvaló, hogy $\bigcup_{i\in I'} \Omega'_i = M$, tehát $(\Omega'_i)_{i\in I'}$ a K-nak befedése. A K kompaktsága miatt van olyan $J' \subseteq I'$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{i\in J'} \Omega'_i$. Legyen $J := J' \setminus \{\alpha\}$; állítjuk, hogy $F \subseteq \bigcup_{i\in J} \Omega_i$. Valóban, ha $x \in F$, akkor $F \subseteq K$ miatt $x \in K$, így van olyan $i \in J'$, amelyre $x \in \Omega'_i$; ugyanakkor az Ω'_α definíciója szerint $i \neq \alpha$, vagyis $i \in J$. Ez azt jelenti, hogy F kompakt halmaz. ■

Következmény. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt és létezik azt tartalmazó kompakt halmaz a térben.

Bizonyítás. A feltétel triviálisan szükséges, és az előző állítás szerint elégséges is. ■

Definíció. Ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmazt *relatív kompaktnak* nevezünk a d metrika szerint, ha $\overline{E}$ kompakt halmaz d szerint.

Következmény. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha létezik azt tartalmazó kompakt halmaz a térben. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt és relatív kompakt.

Bizonyítás. Ha (M,d) metrikus tér, és $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyhez van olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, hogy $E \subseteq K$, akkor a K zártsága folytán $\overline{E} \subseteq K$, tehát $\overline{E}$ zárt halmaz, és létezik azt tartalmazó kompakt halmaz, így az előző állítás szerint $\overline{E}$ kompakt halmaz. ■

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy metrikus térben minden *véges* halmaz kompakt. Továbbá véges sok kompakt halmaz uniója is kompakt, mert véges sok véges (index)halmaz uniója véges. Az eddigiek alapján az is világos, hogy kompakt halmazok bármely nem üres rendszerének a metszete kompakt, mert zárt és része valamely kompakt halmaznak, ti. a metszetben szereplő halmazok bármelyikének.

Állítás. Ha (M,d) metrikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) (M,d) kompakt metrikus tér.

b) Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ az M-nek olyan nem üres nyílt befedése, hogy minden $i, j \in I$ indexhez van olyan $k \in I$, amelyre $\Omega_i \cup \Omega_j \subseteq \Omega_k$ (tehát az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer *felfelé irányított*), akkor létezik olyan $i \in I$, amelyre $M = \Omega_i$.

c) Ha $(F_i)_{i\in I}$ az M zárt részhalmazainak olyan nem üres rendszere, hogy minden $i, j \in I$ indexhez van olyan $k \in I$, amelyre $F_i \cap F_j \supseteq F_k$ (tehát az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer *lefelé irányított*), és $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$, akkor létezik olyan $i \in I$, hogy $F_i = \emptyset$.

Bizonyítás. a)⇒b) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ az M-nek felfelé irányított nem üres nyílt befedése. Az M kompaktsága miatt van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $M = \bigcup\limits_{j\in J} \Omega_j$. A felfelé irányítottság miatt van olyan $i \in I$, hogy minden $j \in J$ esetén $\Omega_j \subseteq \Omega_i$; ekkor természetesen $\bigcup\limits_{j\in J} \Omega_j \subseteq \Omega_i$, vagyis $M = \Omega_i$.

b)⇒c) Legyen $(F_i)_{i\in I}$ az M zárt részhalmazainak olyan lefelé irányított nem üres rendszere, amelyre $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$. Minden $i \in I$ esetén legyen $\Omega_i := M \setminus F_i$. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ az M-nek felfelé irányított nem üres nyílt befedése, ezért van olyan $i \in I$, amelyre $M = \Omega_i := M \setminus F_i$, vagyis $F_i = \emptyset$.

c)⇒a) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése M-nek. Jelölje A az I véges részhalmazainak halmazát, és minden $\alpha \in A$ esetén legyen $F_\alpha := M \setminus \bigcup\limits_{i\in\alpha} \Omega_i$. Nyilvánvaló, hogy $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ az M zárt részhalmazainak olyan lefelé irányított nem üres rendszere, hogy $\bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha = \emptyset$. A feltevés miatt van olyan $\alpha \in A$, amelyre $F_\alpha = \emptyset$, azaz $M = \bigcup\limits_{i\in\alpha} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy M kompakt halmaz. ■

Állítás. Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek. Egy $K \subseteq M'$ halmaz pontosan akkor kompakt M'-ben a d' metrika szerint, ha kompakt M-ben a d metrika szerint.

Bizonyítás. Legyen K kompakt a d' metrika szerint, és legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a K-nak d szerint nyílt halmazokból álló befedése M-ben. Ekkor $(\Omega_i \cap M')_{i\in I}$ a K-nak d' szerint nyílt halmazokból álló befedése M'-ben, így van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} (\Omega_i \cap M')$; világos, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$ még inkább teljesül, tehát K kompakt M-ben a d metrika szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy K kompakt a d metrika szerint, és legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ a K-nak d' szerint nyílt halmazokból álló befedése M'-ben. Ekkor kiválasztható a d szerint nyilt halmazoknak olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszere, amelyre minden $i \in I$ esetén $\Omega'_i = \Omega_i \cap M'$. Ekkor az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer d szerint nyílt halmazokból álló befedése K-nak, tehát van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$; ugyanakkor $K \subseteq M'$ is teljesül, így $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} (\Omega_i \cap M') = \bigcup\limits_{i\in J} \Omega'_i$, vagyis K kompakt a d' metrika szerint. ■

Állítás. (*Cantor-féle közösrész-tétel.*) Legyen (M, d) metrikus tér, és $(K_i)_{i\in I}$ az M kompakt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $I \neq \emptyset$, és minden $i, j \in I$ esetén van olyan $m \in I$, hogy $K_m \subseteq K_i \cap K_j$ (vagyis a $(K_i)_{i\in I}$ halmazrendszer *lefelé irányított*). Ha minden $i \in I$ esetén $K_i \neq \emptyset$, akkor $\bigcap\limits_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.

Bizonyítás. A $(K_i)_{i\in I}$ halmazrendszer lefelé irányítottságából teljes indukcióval könnyen adódik, hogy minden $J \subseteq I$ nem üres véges halmazhoz van olyan $i \in I$, amelyre $K_i \subseteq \bigcap\limits_{j\in J} K_j$. Legyen most $\alpha \in I$ egy rögzített index, és minden $i \in I$ esetén legyen $\Omega_i := M \setminus (K_i \cap K_\alpha)$. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt halmazoknak olyan rendszere, amelyre

$$\bigcup_{i\in I} \Omega_i = M \setminus \bigcap_{i\in I} (K_i \cap K_\alpha),$$

ezért ha $\bigcap\limits_{i\in I} K_i = \emptyset$ teljesülne, akkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ befedése volna M-nek, így K_α-nak is. Ekkor viszont a K_α kompaktsága folytán létezne olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre

$$K_\alpha \subseteq \bigcup_{j\in J} \Omega_j = M \setminus \bigcap_{j\in J} (K_j \cap K_\alpha)$$

teljesülne. Ha most $i \in I$ olyan, hogy minden $j \in J$ esetén $K_i \subseteq K_j$ és $K_i \subseteq K_\alpha$, akkor $K_\alpha \subseteq M \setminus K_i$, így $K_i = \emptyset$. Ezért ha minden $i \in I$ esetén $K_i \neq \emptyset$, akkor $\bigcap\limits_{i\in I} K_i = \emptyset$ lehetetlen. ■

A most következő állítás előkészíti a metrikus terek kompakt részhalmazainak sorozatokkal való jellemzését megfogalmazó tételt: a *Bolzano-Weierstrass tételt.*

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz, akkor minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\boldsymbol{s}$ tetszőleges K-ban haladó sorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$K_n := \overline{\{\boldsymbol{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k > n)\}}.$$

Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén K_n kompakt halmaz, hiszen zárt, K kompakt, és $Im(\boldsymbol{s}) \subseteq K$ miatt $K_n \subseteq \overline{K} = K$. Az is nyilvánvaló, hogy a $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó, így lefelé irányított, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \neq \emptyset$, hiszen $\boldsymbol{s}(n+1) \in K_n$. Ezért a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Legyen $\mathfrak{a} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ és rögzítsünk egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Megmutatjuk olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan növő függvény létezését, amelyre az $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ részsorozat konvergens, és a határértéke egyenlő $\mathfrak{a}$-val, vagyis $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) \in K$. Ehhez először megjegyezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{a} \in K_n$, tehát a K_n definíciója és az érintési pontok gömbi környezetekkel való jellemzése alapján

$$B_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \cap \{\boldsymbol{s}(k) | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k > n)\} \neq \emptyset,$$

vagyis

$$\{k \in \mathbb{N} | k > n\} \cap \overset{-1}{\boldsymbol{s}} \langle B_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \rangle \neq \emptyset.$$

Értelmezzük most a

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min \left(\{k \in \mathbb{N} | k > n\} \cap \overset{-1}{\boldsymbol{s}} \langle B_{\varepsilon_n}(\mathfrak{a}; d) \rangle \right)$$

leképezést, és legyen σ a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és a g függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, amelyre $\sigma(0) := 0$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = g(\sigma(n)) \in \{k \in \mathbb{N} | k > \sigma(n)\} \cap \overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(\mathfrak{a}; d)\rangle$. Tehát σ szigorúan monoton növő, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(\boldsymbol{s}(\sigma(n+1)), \mathfrak{a}) < \varepsilon_{\sigma(n)}$, így minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n), \mathfrak{a}) < \varepsilon_{\sigma(n-1)}$. De $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{\sigma(n-1)} = 0$ is teljesül, így $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens és $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) = \mathfrak{a} \in K$. ■

Lemma. (*Lebesgue-lemma.*) Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak. Ekkor a K halmaz bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r > 0$ valós szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x; d) \subseteq \Omega_i$.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát felteszük, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak, ugyanakkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ olyan nyílt befedése K-nak, amelyre

$$(\forall r \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in K)(\forall i \in I) : \ B_r(x; d) \nsubseteq \Omega_i.$$

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. A feltevés szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{x \in K | (\forall i \in I) : B_{\varepsilon_n}(x; d) \nsubseteq \Omega_i\} \neq \emptyset,$$

így a kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \{x \in K | (\forall i \in I) : B_{\varepsilon_n}(x; d) \nsubseteq \Omega_i\} \neq \emptyset.$$

Legyen $\boldsymbol{s}$ eleme ennek a szorzathalmaznak; tehát $\boldsymbol{s}$ olyan K-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $i \in I$ esetén $B_{\varepsilon_n}(\boldsymbol{s}(n); d) \nsubseteq \Omega_i$. A K-ra vonatkozó hipotézis szerint vehetünk olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényt, amelyre az $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\mathfrak{a} := \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma) \in K$. Ekkor $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$ miatt rögzíthetünk olyan $\alpha \in I$ indexet, amelyre $\mathfrak{a} \in \Omega_\alpha$. Legyen $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $B_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq \Omega_\alpha$. Van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(\sigma(n)) \in B_{r/2}(\mathfrak{a}; d)$. Ugyanakkor $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{\sigma(n)} = 0$, ezért van olyan $N' \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N'$ természetes számra $\varepsilon_{\sigma(n)} < r/2$. Ha most $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N, N')$, akkor $x \in B_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{s}(\sigma(n)); d)$ esetén $d(x, \boldsymbol{s}(\sigma(n))) < \varepsilon_{\sigma(n)} < r/2$, ugyanakkor $d(\boldsymbol{s}(\sigma(n)), \mathfrak{a}) < r/2$, tehát $d(x, \mathfrak{a}) < r$, vagyis $x \in B_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq \Omega_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N, N')$ esetén $B_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{s}(\sigma(n)); d) \subseteq \Omega_\alpha$, ami ellentmond annak, hogy minden m természetes számra és minden $i \in I$ indexre $B_{\varepsilon_m}(\boldsymbol{s}(m); d) \nsubseteq \Omega_i$. ■

Megjegyezzük, hogy ha (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ *tetszőleges* halmaz, akkor nyilvánvaló, hogy a K halmaz bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedésére teljesül az, hogy

$$(\forall x \in K)(\exists r \in \mathbb{R}^+)(\exists i \in I) : \ B_r(x; d) \subseteq \Omega_i.$$

Azonban a Lebesgue-lemmában azt állítjuk, hogy a K halmaz bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedésére az előzőnél sokkal erősebb

$$(\exists r \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in K)(\exists i \in I) : \ B_r(x; d) \subseteq \Omega_i$$

állítás is teljesül, feltéve, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup\limits_{x \in H} B_\varepsilon(x; d)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varepsilon > 0$ olyan valós szám, amelyre minden $H \subseteq K$ véges halmazra $K \setminus \bigcup\limits_{x \in H} B_\varepsilon(x; d) \neq \emptyset$.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tételt alkalmazva igazoljuk olyan $\boldsymbol{s}$ sorozat létezését, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in K \setminus \bigcup\limits_{j \in n} B_\varepsilon(\boldsymbol{s}(j); d)$.

Az $\boldsymbol{s}(0)$-ra az a feltétel, hogy $\boldsymbol{s}(0) \in K$, mert az üres indexhalmazra vett unió az üres halmaz. Ezért $\boldsymbol{s}(0)$ megválasztható, hiszen K nem üres.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(\boldsymbol{s}(i))_{i \in n}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in n$ esetén $\boldsymbol{s}(i) \in K \setminus \bigcup\limits_{j \in i} B_\varepsilon(\boldsymbol{s}(j); d)$. A $H := \{\boldsymbol{s}(i) | i \in n\}$ halmaz véges részhalmaza K-nak, ezért a hipotézis alapján $K \setminus \bigcup\limits_{x \in H} B_\varepsilon(x; d) \neq \emptyset$. Ha $\boldsymbol{s}(n)$ definíció szerint eleme ennek a halmaznak, akkor $\boldsymbol{s}(n) \in K \setminus \bigcup\limits_{j \in n} B_\varepsilon(\boldsymbol{s}(j); d)$, tehát minden $i \in n + 1$ esetén $\boldsymbol{s}(i) \in K \setminus \bigcup\limits_{j \in i} B_\varepsilon(\boldsymbol{s}(j); d)$, így az előírt tulajdonságú $\boldsymbol{s}$ sorozat létezik.

Ha $\boldsymbol{s}$ ilyen sorozat, akkor minden $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ esetén $d(\boldsymbol{s}(i), \boldsymbol{s}(j)) \geq \varepsilon$, ezért minden $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényre $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ esetén $d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(i), (\boldsymbol{s} \circ \sigma)(j)) \geq \varepsilon$ teljesül. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy $\boldsymbol{s}$-nek nem létezik konvergens részsorozata. ■

Tétel. (*Bolzano-Weierstrass tétel.*) Legyen (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$. A K halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.

Bizonyítás. Már igazoltuk azt, hogy ha K kompakt, akkor minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden K-ban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme K-nak, és a K kompaktságának bizonyításához legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedése K-nak. A Lebesgue-lemma alapján vehetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in K$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $B_r(x; d) \subseteq \Omega_i$. Az előző állítás szerint r-hez van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup\limits_{x \in H} B_r(x; d)$. Legyen $f : H \to I$ olyan függvény, amelyre minden $x \in H$ esetén $B_r(x; d) \subseteq \Omega_{f(x)}$. Ekkor $J := Im(f)$ véges részhalmaza I-nek, és

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x; d) \subseteq \bigcup_{x \in H} \Omega_{f(x)} = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$$

teljesül, tehát K kompakt halmaz. ■

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $A \subseteq M$ halmazt *teljesen korlátosnak* nevezünk d szerint, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $H \subseteq A$ véges halmaz, amelyre $A \subseteq \bigcup_{x \in H} B_\varepsilon(x; d)$.

Tehát a Bolzano-Weierstrass tétel előtt álló kijelentés azt mondja, hogy minden olyan halmaz teljesen korlátos, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata. Később (a 9. pontban) megadjuk a teljesen korlátos halmazok sorozatokkal való jellemzését (*Hausdorff-tétel*). Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a kompaktsággal ellentétben, a teljesen korlátosság nem topologikus, hanem metrikus tulajdonság.

Állítás. Metrikus térben minden kompakt halmaz teljesen korlátos és minden teljesen korlátos halmaz korlátos.

Bizonyítás. A Bolzano-Weierstrass tétel alapján kompakt halmaz olyan, hogy minden benne halaladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, ezért kompakt halmaz teljesen korlátos. Másfelől, a definíció szerint teljesen korlátos halmazhoz létezik véges sok gömb (tehát korlátos halmaz), amelyek uniójának része, ezért teljesen korlátos halmaz korlátos. ■

Azonban teljesen korlátos halmaz nem szükségképpen kompakt és korlátos halmaz nem feltétlenül teljesen korlátos. Sőt még *zárt* és teljesen korlátos halmaz sem szükségképpen kompakt.

A következő állítás bizonyításában felhasználjuk azt, hogy ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $f : M \to M'$ olyan bijekció, amely izometria a d és d' metrikák szerint, akkor minden $K \subseteq M$ halmazra; K pontosan akkor kompakt a d metrika szerint, ha az $f\langle K \rangle \subseteq M'$ halmaz kompakt a d' metrika szerint. Ez nyilvánvalóan következik a 2. pont, **13**. gyakorlat állításából és a kompaktság definíciójából.

Állítás. Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata. Ha $(K_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz d_i szerint, akkor a $\prod_{i \in I} K_i$ halmaz kompakt a d szorzatmetrika szerint.

Bizonyítás. Az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás nyilvánvalóan igaz, ha $Card(I) = 1$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$, és az állítás minden olyan indexhalmaz esetében teljesül, amelynek számossága egyenlő n-nel, továbbá legyen $Card(I) = n + 1$. Legyen $\alpha \in I$ rögzített és $I' := I \setminus \{\alpha\}$. Ekkor $Card(I') = n$, tehát ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, és (M', d') az $((M_i, d_i))_{i \in I'}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, és $(K_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz d_i szerint, akkor az indukciós hipotézis alapján $\prod_{i \in I'} K_i$ halmaz kompakt a d' metrika szerint. Ugyanakkor az

$$f : \prod_{i \in I} M_i \to M_\alpha \times \prod_{i \in I'} M_i; \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto (x_\alpha, (x_i)_{i \in I'})$$

leképzés nyilvánvalóan izometrikus bijekció az (M, d) metrikus tér, valamint az (M_α, d_α) és (M', d') metrikus terek szorzata között. Ezért a $\prod_{i\in I} K_i$ halmaz pontosan akkor kompakt d szerint, ha az $f\left\langle \prod_{i\in I} K_i \right\rangle$ halmaz kompakt az (M_α, d_α) és (M', d') metrikus terek szorzatában. De világos, hogy

$$f\left\langle \prod_{i\in I} K_i \right\rangle = K_\alpha \times \prod_{i\in I'} K_i,$$

és tudjuk, hogy K_α kompakt d_α szerint, valamint $\prod_{i\in I'} K_i$ kompakt d' szerint.

Ezért az indukcós lépés megtételéhez elegendő igazolnunk azt, hogy ha (M, d) az (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus terek szorzata, és $K_1 \subseteq M_1$ a d_1 szerint kompakt halmaz, és $K_2 \subseteq M_2$ a d_2 szerint kompakt halmaz, akkor $K := K_1 \times K_2$ a d szerint kompakt. Természetesen feltehető, hogy $K \neq \emptyset$.

Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a d szorzatmetrika szerint nyílt befedése K-nak. Minden $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in K$ párhoz van olyan $i \in I$, hogy $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in \Omega_i$, és az Ω_i d szerinti nyíltsága folytán van olyan $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$, amelyre $V_1 \times V_2 \subseteq \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy minden $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in K$ párra

$$\{(V_1, V_2) | (V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)) \wedge (V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)) \wedge ((\exists i \in I) : V_1 \times V_2 \subseteq \Omega_i)\} \neq \emptyset,$$

így a kiválasztási axióma szerint a

$$\prod_{(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)\in K} (\{(V_1, V_2) | (V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)) \wedge (V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)) \wedge ((\exists i \in I) : V_1 \times V_2 \subseteq \Omega_i)\})$$

szorzathalmaz sem üres. Tehát vehetünk olyan $(V_1(\mathfrak{a}))_{\mathfrak{a}\in K}$ valamint $(V_2(\mathfrak{a}))_{\mathfrak{a}\in K}$ rendszereket, amelyekre teljesülnek a következők:

- minden $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in K$ esetén $V_1(\mathfrak{a}) \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2(\mathfrak{a}) \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$;
- minden $\mathfrak{a} \in K$ esetén van olyan $i \in I$, amelyre $V_1(\mathfrak{a}) \times V_2(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega_i$.

Ez utóbbi feltétel alapján, ismét a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $\iota : K \to I$ függvényt, amelyre minden $\mathfrak{a} \in K$ esetén $V_1(\mathfrak{a}) \times V_2(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega_{\iota(\mathfrak{a})}$ teljesül.

Ha $\mathfrak{a}_1 \in K_1$, akkor $(V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))_{\mathfrak{a}_2\in K_2}$ d_2 szerinti környezetekkel való befedése K_2-nek, és K_2 kompakt d_2 szerint, ezért van olyan $H \subseteq K_2$ véges halmaz, amelyre $K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2\in H} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$. Tehát minden $\mathfrak{a}_1 \in K_1$ esetén

$$\{H \subseteq K_2 | (H \text{ véges }) \wedge (K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2\in H} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)))\} \neq \emptyset,$$

így a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(H(\mathfrak{a}_1)_{\mathfrak{a}_1\in K_1})$ rendszert, amelyre minden $\mathfrak{a}_1 \in K_1$ esetén $H(\mathfrak{a}_1) \subseteq K_2$ véges halmaz és fennáll a

$$K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2\in H(\mathfrak{a}_1)} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$$

összefüggés. Ekkor $\mathfrak{a}_1 \in K_1$ esetén $H(\mathfrak{a}_1)$ nem üres, különben K_2 üres, így K is üres volna; következésképpen jól értelmezett a

$$U(\mathfrak{a}_1) := \bigcap_{\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1)} V_1((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$$

halmaz. Ekkor $(U(\mathfrak{a}_1))_{\mathfrak{a}_1 \in K_1}$ d_1 szerinti környezetekkel való befedése K_1-nek és K_1 kompakt d_1 szerint, így vehetünk olyan $A \subseteq K_1$ véges halmazt, amelyre

$$K_1 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_1 \in A} U(\mathfrak{a}_1).$$

Ezután értelmezhetjük a

$$J := \{\iota((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) | (\mathfrak{a}_1 \in A) \wedge (\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1))\} \subseteq I$$

halmazt, amely nyilvánvalóan véges. Megmutatjuk, hogy az $(\Omega_j)_{j \in J}$ rendszer szintén befedése K-nak. Ehhez legyen $(x_1, x_2) \in K$ rögzített, és

$$x_1 \in K_1 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_1 \in A} U(\mathfrak{a}_1)$$

miatt vegyünk olyan $\mathfrak{a}_1 \in A$ elemet, amelyre $x_1 \in U(\mathfrak{a}_1)$. Ugyanakkor

$$x_2 \in K_2 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1)} V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$$

miatt választhatunk olyan $\mathfrak{a}_2 \in H(\mathfrak{a}_1)$ elemet, amelyre $x_2 \in V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$. De a definíció szerint $x_1 \in U(\mathfrak{a}_1) \subseteq V_1((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))$, tehát

$$(x_1, x_2) \in V_1((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \times V_2((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \subseteq \Omega_{\iota((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2))},$$

vagyis a $j := \iota((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)) \in J$ indexre $(x_1, x_2) \in \Omega_j$ teljesül. ■

Lemma. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_k)_{k \in n} \in \mathbb{K}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor a $\|\cdot\|_\infty$ norma értelmezése alapján

$$\overline{B}_r(\mathfrak{a}; d_{\|\cdot\|_\infty}) = \prod_{k \in n} \overline{B}_r(\mathfrak{a}_k; \mathbb{K}),$$

és a $\mathbb{K}$-ra vonatkozó Bolzano-Weierstrass tétel alapján minden $k \in n$ esetén $\overline{B}_r(\mathfrak{a}_k; \mathbb{K})$ kompakt halmaz $\mathbb{K}$-ban az euklidészi metrika szerint. Ezért az előző állásból következik, hogy $\mathbb{K}^n$-ben minden $d_{\|\cdot\|_\infty}$ szerinti zárt gömb kompakt halmaz a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ metrika szerint. Ugyanakkor $\mathbb{K}^n$-ben minden korlátos és zárt halmaz részhalmaza egy zárt gömbnek, vagyis egy kompakt halmaznak, ezért minden korlátos és zárt halmaz kompakt $\mathbb{K}^n$-ben a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint. ■

Tétel. Véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett bármely két norma ekvivalens.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, akkor létezik olyan $C' > 0$ valós szám, amelyre minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\boldsymbol{x}\| \leq C'\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. Valóban, ha $(\boldsymbol{e}_k)_{k\in n}$ a kanonikus bázis $\mathbb{K}^n$-ben, akkor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{x}(k).\boldsymbol{e}_k$, ezért

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{x}(k).\boldsymbol{e}_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{x}(k)|\|\boldsymbol{e}_k\| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|\boldsymbol{e}_k\|\right) \|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$

így a $C' := \sum_{k=0}^{n-1} \|\boldsymbol{e}_k\|$ szám rendelkezik a megkövetelt tulajdonsággal.

Ebből az is következik, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, akkor $\mathscr{T}_{d_{\|\cdot\|}} \subseteq \mathscr{T}_{d_{\|\cdot\|_\infty}}$, így az is igaz, hogy a $\mathbb{K}^n$ minden $d_{\|\cdot\|}$ szerint zárt részhalmaza $d_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint is zárt.

Most megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, akkor létezik olyan $C > 0$ valós szám, amelyre minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{x}\|$, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{K}^n$ felett bármely két norma ekvivalens.

Legyen tehát $n \in \mathbb{N}^+$ és $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$ felett, továbbá legyen minden $r > 0$ valós számra

$$K_r := \overline{B}_r(0; d_{\|\cdot\|}) \cap S_1(0, d_{\|\cdot\|_\infty}).$$

Ekkor $r \in \mathbb{R}^+$ esetén K_r a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint zárt halmaz és persze korlátos is, így az előző állítás szerint kompakt $d_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint. Továbbá világos, hogy a $(K_r)_{r\in\mathbb{R}^+}$ halmazrendszer lefelé irányított, hiszen $r, s \in \mathbb{R}^+$ esetén $K_r \cap K_s = K_{\min(r,s)}$. Ezért ha minden $r > 0$ valós számra $K_r \neq \emptyset$ teljesülne, akkor a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap_{r\in\mathbb{R}^+} K_r \neq \emptyset$ is igaz volna. Ugyanakkor $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}^+} K_r$ esetén minden $r > 0$ valós számra $\|\boldsymbol{x}\| \leq r$, így $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, vagyis $\boldsymbol{x} = 0$, és egyidejűleg $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$, azaz $\boldsymbol{x} \neq 0$. Tehát $\bigcap_{r\in\mathbb{R}^+} K_r = \emptyset$, ezért rögzíthetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $K_r = \emptyset$.

Legyen $\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n$ és $\|\boldsymbol{z}\| \leq r$. Ekkor $\boldsymbol{z} \notin K_r$ miatt $\|\boldsymbol{z}\|_\infty \neq 1$, tehát $\|\boldsymbol{z}\|_\infty < 1$ vagy $\|\boldsymbol{z}\|_\infty > 1$. Ha $\|\boldsymbol{z}\|_\infty > 1$ teljesülne, akkor nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{z}/\|\boldsymbol{z}\|_\infty \in K_r$, holott $K_r = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n$ és $\|\boldsymbol{z}\| \leq r$ esetén $\|\boldsymbol{z}\|_\infty < 1$. Ha $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges nem nulla vektor, akkor $\|r.(\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|)\| = r$ miatt $\|r.(\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|)\|_\infty < 1$, vagyis $\|\boldsymbol{x}\|_\infty < (1/r)\|\boldsymbol{x}\|$. Ez azt jelenti, hogy a $C := 1/r$ valós számra teljesül az, hogy minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq C\|\boldsymbol{x}\|$.

Ezzel igazoltuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén bármely két $\mathbb{K}^n$ feletti norma ekvivalens, és ez $n = 0$ esetén triviálisan igaz.

Legyen most E véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett és $n \in \mathbb{N}$ olyan szám és $u : \mathbb{K}^n \to E$ olyan függvény, amely lineáris bijekció. Legyenek $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ tetszőleges normák E felett. Ekkor $\|\cdot\|_1 \circ u$ és $\|\cdot\|_2 \circ u$ normák $\mathbb{K}^n$ felett, tehát az előzőek alapján léteznek olyan $C_1, C_2 > 0$ valós számok, amelyekre minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $(\|\cdot\|_1 \circ u)(\boldsymbol{x}) \leq C_2(\|\cdot\|_2 \circ u)(\boldsymbol{x})$ és $(\|\cdot\|_2 \circ u)(\boldsymbol{x}) \leq C_1(\|\cdot\|_1 \circ u)(\boldsymbol{x})$. Az u szürjektivitása folytán minden $\boldsymbol{y} \in E$ vektorhoz van olyan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, hogy $\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$, és ekkor $\|\boldsymbol{y}\|_1 = (\|\cdot\|_1 \circ u)(\boldsymbol{x}) \leq C_2(\|\cdot\|_2 \circ u)(\boldsymbol{x}) = C_2\|\boldsymbol{y}\|_2$, és hasonlóan $\|\boldsymbol{y}\|_2 = (\|\cdot\|_2 \circ u)(\boldsymbol{x}) \leq C_1(\|\cdot\|_1 \circ u)(\boldsymbol{x}) = C_1\|\boldsymbol{y}\|_1$, így a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek. ■

Gyakorlatok

1. Ha (M, d) metrikus tér, és $\boldsymbol{s}$ konvergens M-ben haladó sorozat, akkor $Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\lim(\boldsymbol{s})\}$ kompakt halmaz.

2. Metrikus térben teljesen korlátos halmaz lezártja teljesen korlátos.

3. Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ nem üres véges metrikustér-rendszer szorzata, és minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq M_i$ teljesen korlátos halmaz a d_i metrika szerint, akkor $\prod\limits_{i \in I} E_i$ teljesen korlátos halmaz d szerint.

(*Útmutatás.* Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és $(H_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $H_i \subseteq E_i$ véges halmaz, és $E_i \subseteq \bigcup\limits_{x \in H_i} B_\varepsilon(x; d_i)$. Ekkor a $H := \prod\limits_{i \in I} H_i \subseteq \prod\limits_{i \in I} E_i$ véges halmazra az I. fejezet, 2. pont, **28**. gyakorlat alapján

$$\prod_{i \in I} E_i \subseteq \prod_{i \in I} \bigcup_{x \in H_i} B_\varepsilon(x; d_i) = \bigcup_{f \in H} \prod_{i \in I} B_\varepsilon(f(i); d_i) = \bigcup_{f \in H} B_\varepsilon(f; d)$$

teljesül.)

4. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

(*Útmutatás.* Legyen (M, d) metrikus tér, és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden A-ban haladó sorozatnak létezik d szerint konvergens részsorozata. Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges $\overline{A}$-ban haladó sorozat. Vegyünk tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_{\varepsilon_n}(x_n; d) \cap A \neq \emptyset$, ezért kiválaszthatunk olyan A-ban haladó $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, x_n) < \varepsilon_n$. A feltevés szerint van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre $(a_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergens sorozat; legyen $a := \lim\limits_{k \to \infty} a_{\sigma(k)}$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(a, x_{\sigma(k)}) \leq d(a, a_{\sigma(k)}) + d(a_{\sigma(k)}, x_{\sigma(k)}) < d(a, a_{\sigma(k)}) + \varepsilon_{\sigma(k)},$$

így az $(x_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens d szerint és $\lim\limits_{k \to \infty} x_{\sigma(k)} = a \in \overline{A}$. Ezért a Bolzano-Weierstrass tétel szerint $\overline{A}$ kompakt d szerint.)

6. Függvények határértéke

Definíció. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, valamint $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Azt mondjuk, hogy f-nek az $\mathfrak{a} \in M$ pontban *létezik határértéke* (a d és d' metrikák szerint), ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és van olyan $\mathfrak{b} \in M'$, hogy a $\mathfrak{b}$ minden d' szerinti V' környezetéhez létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan d szerinti V környezete, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$ teljesül; vagyis fennáll a

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}))(\exists\, V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})) : f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$$

kijelentés. Minden ilyen tulajdonságú $\mathfrak{b} \in M'$ pontot az f függvény *határértékének* nevezzük az $\mathfrak{a}$ pontban (a d és d' metrikák szerint).

A környezetek értelmezése alapján a határérték létezésének fogalma könnyen megadható a metrikus térbeli gömbök segítségével is: az $f{:}M{\rightarrowtail}M'$ függvénynek pontosan akkor létezik határértéke az $\mathfrak{a} \in M$ pontban, ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek és van olyan $\mathfrak{b} \in M'$, amelyre

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+) : f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; d) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_\varepsilon(\mathfrak{b}; d')$$

teljesül, ami azzal ekvivalens, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in Dom(f)) : (0 < d(x, \mathfrak{a}) < \delta \Rightarrow d'(f(x), \mathfrak{b}) < \varepsilon).$$

Figyeljük meg, hogy ez a formula nyilvánvalóan akkor is *értelmes*, ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $Dom(f)$-nek. De ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja $Dom(f)$-nek, akkor könnyen belátható, hogy *minden* $\mathfrak{b} \in M'$ pontra teljesül a fenti kijelentés, tehát akkor minden pont határértéke volna f-nek $\mathfrak{a}$-ban. Ezzel szemben érvényes a következő állítás.

Állítás. (*A határérték egyértelműsége.*) Ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, akkor f-nek legfeljebb egy határértéke létezik az $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Az állítással ellentétben legyenek $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in M'$ az f-nek különböző határértékei az $\mathfrak{a}$ pontban, továbbá legyenek $V_1' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}_1)$ és $V_2' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}_2)$ olyan környezetek, amelyekre $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. Ekkor van olyan $V_1 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V_2 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V_1'$ és $f\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V_2'$. Azonban $V := V_1 \cap V_2 \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, így $(V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f) \neq \emptyset$, hiszen $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Ha $x \in (V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f)$, akkor $f(x) \in f\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \cap f\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V_1' \cap V_2'$, ami ellentmond a $V_1' \cap V_2' = \emptyset$ egyenlőségnek. ■

Definíció. Ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és létezik f-nek határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} f \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to \mathfrak{a}} f(x)$$

jelöli az f egyértelműen meghatározott határértékét az $\mathfrak{a}$ pontban.

A határérték létezése "lokális" tulajdonság, tehát csak azon múlik, hogy a függvény hogyan viselkedik a pont közelében.

Állítás. (*A határérték lokalitása.*) Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f, g : M \rightarrowtail M'$ függvények, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f) \cap Dom(g)$-nek, és tegyük fel, hogy létezik olyan $W \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $(W \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f) = (W \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(g)$, és $f = g$ ezen a halmazon. Ekkor f-nek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Továbbá, ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}} g$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen V' tetszőleges környezete d' szerint a $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ pontnak. Legyen $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan, hogy $f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor $V := U \cap W \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és a definíciók alapján

$$g\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V',$$

ami azt jelenti, hogy g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} g = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$. ■

Állítás. (*Átviteli elv határértékekre.*) Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Az f-nek pontosan akkor létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor bármely $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén

$$\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$$

teljesül.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f)$ tetszőleges. Ekkor vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. A V-hez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in V$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in (V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f)$, ezért $f(\boldsymbol{s}(n)) \in f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ez azt jelenti, hogy $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozat és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens. Legyenek $\boldsymbol{s}'$ és $\boldsymbol{s}''$ olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozatok, hogy $\lim(\boldsymbol{s}') = \mathfrak{a}$ és $\lim(\boldsymbol{s}'') = \mathfrak{a}$. Képezzük azt az $\boldsymbol{s}$ számsorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(2k) := \boldsymbol{s}'(k)$ és $\boldsymbol{s}(2k+1) := \boldsymbol{s}''(k)$. Ekkor $\boldsymbol{s}$ szintén olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, ezért a hipotézis szerint $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozat. Azonban $f \circ \boldsymbol{s}'$ és $f \circ \boldsymbol{s}''$ részsorozatai $f \circ \boldsymbol{s}$-nek, így $\lim(f \circ \boldsymbol{s}') = \lim(f \circ \boldsymbol{s}'')$. Továbbá *létezik* olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, mert $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Ezért jól értelmezett az $\mathfrak{b} \in M'$ pont, amelyre $\mathfrak{b} := \lim(f \circ \boldsymbol{s})$ bármely olyan $\boldsymbol{s}$ sorozatra,

amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál és $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban halad. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{b}$ az f határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, vagyis, hogy

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}))(\exists\, V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})) : f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$$

teljesül. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy ez nem igaz, vagyis

$$(\exists\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b}))(\forall\, V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})) : f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \setminus V' \neq \emptyset.$$

Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b})$ olyan, hogy minden $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ esetén $f\langle V\setminus\{\mathfrak{a}\}\rangle\setminus V' \neq \emptyset$, vagyis

$$(V\setminus\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathfrak{a}$ pont környezeteinek olyan sorozata, amely tartalmazás tekintetében monoton fogyó, és rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az $\mathfrak{a}$ minden V környezetéhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $V_n \subseteq V$. Például, ha $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó monoton fogyó zérussorozat, akkor a $(B_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat megfelelő. Ekkor a V' definíciója szerint a

$$\left((V_n\setminus\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

halmazsorozat minden tagja nem üres halmaz, így a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left((V_n\setminus\{\mathfrak{a}\}) \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right) \neq \emptyset.$$

Legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in V_n$ és $f(\boldsymbol{s}(n)) \notin V'$. Ebből következik, hogy $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, tehát a feltevés szerint $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozat, továbbá a $\mathfrak{b}$ pont definíciója alapján $\mathfrak{b} = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b})$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\boldsymbol{s}(n)) \notin V'$. ■

Következmény. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és $\mathfrak{b} \in M'$. A $\mathfrak{b}$ elem pontosan akkor határértéke f-nek az $\mathfrak{a}$ pontban, ha minden $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = \mathfrak{b}$ teljesül.

Bizonyítás. Közvetlenül látszik az előző állítás alapján. ■

Az átviteli elv alkalmazható annak bizonyítására, hogy egy függvénynek *nem létezik* határértéke egy adott pontban. Ugyanis, ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, akkor ahhoz, hogy f-nek ne létezzen határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban *elégséges*

- egy olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot találni, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, de az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat *nem konvergens*, vagy
- két olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{s}'$ sorozatot találni, amelyekre az $f \circ \boldsymbol{s}$ és $f \circ \boldsymbol{s}'$ sorozatok konvergensek, de $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) \neq \lim(f \circ \boldsymbol{s}')$.

Az átviteli elv alkalmazható függvény határértékének *kiszámítására*, ha már tudjuk, hogy a függvénynek létezik határértéke az adott pontban. Ugyanis, ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és f-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ egyenlő az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat határértékével, ahol $\boldsymbol{s}$ *tetszőleges* olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$.

Definíció. (*A függvényműveletek értelmezése.*) Legyenek F vektortér a K test felett, és legyenek f és g olyan függvények, amelyekre $Im(f) \subseteq F$ és $Im(g) \subseteq F$ teljesül. Legyen továbbá $\alpha \in K$ és λ olyan függvény, amelyre $Im(\lambda) \subseteq K$.

- $f + g$ az a függvény, amelyre $Dom(f + g) := Dom(f) \cap Dom(g)$ és minden $x \in Dom(f + g)$ esetén $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$;

- $\alpha.f$ az a függvény, amelyre $Dom(\alpha.f) := Dom(f)$ és minden $x \in Dom(f)$ esetén $(\alpha.f)(x) := \alpha.f(x)$;

- $\lambda.f$ az a függvény, amelyre $Dom(\lambda.f) := Dom(\lambda) \cap Dom(f)$ és minden $x \in Dom(\lambda.f)$ esetén $(\lambda.f)(x) := \lambda(x).f(x)$;

- $\overline{\lambda}$ az a függvény, amelyre $Dom(\overline{\lambda}) := Dom(\lambda)$ és minden $x \in Dom(\lambda)$ esetén $\overline{\lambda}(x) := \overline{\lambda(x)}$.

Ha $(F, \|\cdot\|)$ normált tér, és f olyan függvény, amelyre $Im(f) \subseteq F$, akkor

- $\|f(\cdot)\|$ az a függvény, amelyre $Dom(\|f(\cdot)\|) := Dom(f)$ és minden $x \in Dom(\|f(\cdot)\|)$ esetén $\|f(\cdot)\|(x) := \|f(x)\|$.

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett. Legyenek $f, g : M \rightarrowtail F$ és $\lambda : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, valamint $\alpha \in \mathbb{K}$.

a) Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f) \cap Dom(g)$-nek, továbbá f-nek és g-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f + g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f + g) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g.$$

b) Ha $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(\lambda.f)$-nek, továbbá λ-nak és f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda.f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}(\lambda.f) = \left(\lim_{\mathfrak{a}} \lambda\right).\left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right).$$

c) Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor a $\|f(\cdot)\| : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ és $\alpha.f : M \rightarrowtail F$ függvényeknek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}} \|f(\cdot)\| = \left\|\lim_{\mathfrak{a}} f\right\|$$
$$\lim_{\mathfrak{a}}(\alpha.f) = \alpha.\lim_{\mathfrak{a}} f.$$

d) Ha λ-nak létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $\overline{\lambda} : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvénynek is létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}} \overline{\lambda} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}} \lambda}.$$

Bizonyítás. a) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $(Dom(f) \cap Dom(g)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $f \circ \boldsymbol{s}$ és $g \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozatok, így az $(f+g)\circ\boldsymbol{s} = (f\circ\boldsymbol{s})+(g\circ\boldsymbol{s})$ sorozat is konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $f+g$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan $(Dom(f)\cap Dom(g))\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(f+g) = \lim((f+g)\circ\boldsymbol{s}) = \lim(f\circ\boldsymbol{s}) + \lim(g\circ\boldsymbol{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} f + \lim_{\mathfrak{a}} g.$$

b) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $(Dom(\lambda) \cap Dom(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $\lambda \circ \boldsymbol{s}$ és $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozatok, így a $(\lambda.f) \circ \boldsymbol{s} = (\lambda \circ \boldsymbol{s}).(f \circ \boldsymbol{s})$ sorozat is konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $\lambda.f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan $(Dom(\lambda) \cap Dom(f)) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(\lambda.f) = \lim((\lambda.f)\circ\boldsymbol{s}) = \lim(\lambda\circ\boldsymbol{s}).\lim(f\circ\boldsymbol{s}) = \left(\lim_{\mathfrak{a}}\lambda\right).\left(\lim_{\mathfrak{a}} f\right).$$

c) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} f$, így az $\|f(\cdot)\| \circ \boldsymbol{s} = \|(f \circ \boldsymbol{s})(\cdot)\|$ és $(\alpha.f) \circ \boldsymbol{s} = \alpha.(f \circ \boldsymbol{s})$ sorozatok is konvergensek. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy a $\|f(\cdot)\|$ és $\alpha.f$ függvényeknek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}\|f(\cdot)\| = \lim(\|f(\cdot)\|\circ\boldsymbol{s}) = \lim(\|(f\circ\boldsymbol{s})(\cdot)\|) = \left\|\lim_{\mathfrak{a}} f\right\|$$
$$\lim_{\mathfrak{a}}(\alpha.f) = \lim((\alpha.f)\circ\boldsymbol{s}) = \lim(\alpha.(f\circ\boldsymbol{s})) = \alpha.\lim_{\mathfrak{a}} f.$$

d) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(\lambda)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $\lambda \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, és $\lim(\lambda \circ \boldsymbol{s}) = \lim_{\mathfrak{a}} \lambda$, így az $\overline{\lambda} \circ \boldsymbol{s} = \overline{\lambda \circ \boldsymbol{s}}$ sorozat is konvergens. Ismét az átviteli elv alapján kapjuk, hogy az $\overline{\lambda}$ függvénynek is létezik határértéke $\mathfrak{a}$-nak, és ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(\lambda)\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}}(\overline{\lambda}) = \lim(\overline{\lambda}\circ\boldsymbol{s}) = \lim\overline{(\lambda\circ\boldsymbol{s})} = \overline{\lim_{\mathfrak{a}}\lambda}$$

teljesül. ■

Állítás. (*Függvénykompozíció határértéke.*) Legyenek (M, d), (M', d'), valamint (M'', d'') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$, $g : M' \rightarrowtail M''$ függvények, és $\mathfrak{a} \in M$. Tegyük fel, hogy

- az $\mathfrak{a}$ pont torlódási pontja $Dom(g \circ f)$-nek,
- az f függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban,
- a g függvénynek létezik határéréke a $\mathfrak{b} := \lim_{\mathfrak{a}} f$ pontban.

Tegyük fel, hogy a következő feltételek *valamelyike* teljesül:

a) $\mathfrak{b} \notin Dom(g)$;

b) $\mathfrak{b} \in Dom(g)$ és $\lim_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$.

Ekkor $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és fennáll a

$$\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Először tekintsünk tetszőleges $V'' \in \mathscr{T}_{d''}(\lim_{\mathfrak{b}} g)$ környezetet. A határérték definíciója szerint vehetünk olyan $V' \in \mathscr{T}_{d'}(b)$ környezetet, amelyre $g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq V''$. Ugyanakkor $\mathfrak{b} := \lim_{\mathfrak{a}} f$, ezért V'-höz vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor nyilvánvalóan teljesül az, hogy

$$(g \circ f)\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = g\langle f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle \subseteq g\langle V'\rangle.$$

Ha a) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \notin Dom(g)$ akkor

$$g\langle V'\rangle = g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq V''.$$

Ha b) teljesül, vagyis $\mathfrak{b} \in Dom(g)$ és $\lim_{\mathfrak{b}} g = g(\mathfrak{b})$, akkor

$$g\langle V'\rangle = g\langle\{\mathfrak{b}\} \cup (V' \setminus \{\mathfrak{b}\})\rangle = \{g(\mathfrak{b})\} \cup g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle = \{\lim_{\mathfrak{b}} g\} \cup g\langle V' \setminus \{\mathfrak{b}\}\rangle \subseteq V''.$$

Tehát akár a), akár b) teljesül, az adódik, hogy a $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetre

$$(g \circ f)\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'',$$

vagyis $g \circ f$-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, és $\lim_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \lim_{\mathfrak{b}} g$. ■

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér, (M', d') az $((M'_i, d'_i))_{i \in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, $f{:}M \rightarrowtail M'$ függvény és $\mathfrak{a} \in M$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Az f függvénynek pontosan akkor létezik határértéke a d és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén a $pr_i \circ f : M \rightarrowtail M'_i$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint. Ha létezik f-nek határértéke a d és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor minden $i \in I$ esetén $pr_i(\lim_{\mathfrak{a}} f) = \lim_{\mathfrak{a}}(pr_i \circ f)$ teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke a d és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}$ pontban. Legyen $i \in I$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'_i}(pr_i(\lim_{\mathfrak{a}} f))$. A környezetek definíciója szerint vehetünk olyan $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'_i}$ halmazt, hogy $pr_i(\lim_{\mathfrak{a}} f) \in \Omega' \subseteq V'$. Ekkor $\overset{-1}{pr_i}\langle\Omega'\rangle = \prod_{j \in I} \Omega'_j$, ahol minden $j \in I$ esetén $\Omega'_j := M'_j$, ha $j \neq i$, és $\Omega'_i := \Omega'$. Nyílt halmazok szorzata nyílt a szorzatmetrika szerint, ezért $\prod_{j \in I} \Omega'_j$ nyílt halmaz d' szerint és természetesen $\lim_{\mathfrak{a}} f \in \prod_{j \in I} \Omega'_j$. Tehát $\prod_{j \in I} \Omega'_j$ nyílt környezete $\lim_{\mathfrak{a}} f$-nek d' szerint, így vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \prod_{j \in I} \Omega'_j$. Ekkor

$$(pr_i \circ f)\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle = pr_i\langle f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle \subseteq pr_i\langle \prod_{j \in I} \Omega'_j\rangle = \Omega'_i =: \Omega' \subseteq V',$$

ami azt jelenti, hogy a $pr_i \circ f : M \rightarrowtail M'_i$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}}(pr_i \circ f) = pr_i(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $pr_i \circ f : M \rightarrowtail M'_i$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint, és képezzük a $\mathfrak{b} := (\lim\limits_{\mathfrak{a}}(pr_i \circ f))_{i\in I} \in M'$ pontot. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\mathfrak{b})$ tetszőleges, és vegyünk olyan $(V'_i)_{i\in I}$ rendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén $V'_i \in \mathscr{T}_{d'_i}(\mathfrak{b}_i)$ és $\prod\limits_{i\in I} V'_i \subseteq V'$. Minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{b}_i := \lim\limits_{\mathfrak{a}}(pr_i \circ f)$ és $V'_i \in \mathscr{T}_{d'_i}(\mathfrak{b}_i)$, ezért van olyan $V_i \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $(pr_i \circ f)\langle V_i \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'_i$. Ekkor $V := \bigcap\limits_{i\in I} V_i \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet, amelyre

$$f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \prod_{i\in I} pr_i\langle f\langle V_i \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle\rangle = \prod_{i\in I}(pr_i \circ f)\langle V_i \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq \prod_{i\in I} V'_i \subseteq V',$$

tehát $\mathfrak{b}$ az f függvénynek határértéke a $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, és láthatóan minden $i \in I$ esetén $pr_i(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f) = \mathfrak{b}_i := \lim\limits_{\mathfrak{a}}(pr_i \circ f)$. ■

Definíció. Legyen $(M_i)_{i\in I}$ halmazrendszer és $M := \prod\limits_{i\in I} M_i$. Ha $k \in I$ és $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M$, akkor $in_{k,\mathfrak{a}}$ jelöli azt az $M_k \to M$ függvényt, amely minden $x_k \in M_k$ ponthoz azt az $in_{k,\mathfrak{a}}(x_k)$ elemet rendeli az M szorzathalmazból, amelyre $i \in I$ és $i \neq k$ esetén $(in_{k,\mathfrak{a}}(x_k))(i) := \mathfrak{a}_i$, és $(in_{k,\mathfrak{a}}(x_k))(i) := x_k$. Ha M' halmaz és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, akkor minden $k \in I$ indexre és $\mathfrak{a} \in M$ pontra az $f \circ in_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ függvényt az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli k-adik *parciális függvényének* nevezzük.

Két halmaz szorzatában értelmezett függvények esetében egyszerűbb jelöléseket alkalmazunk. Ha M_1, M_2, M' halmazok, $f{:}M_1 \times M_2 \rightarrowtail M'$ függvény és $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in M_1 \times M_2$, akkor az f függvény $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ pontbeli első (illetve második) parciális függvényét $f(\cdot, \mathfrak{a}_2)$ (illetve $f(\mathfrak{a}_1, \cdot)$) jelöli, tehát

- $f(\cdot, \mathfrak{a}_2) : M_1 \rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $Dom(f(\cdot, \mathfrak{a}_2)) := \{x_1 \in M_1 | (x_1, \mathfrak{a}_2) \in Dom(f)\}$, és minden $x_1 \in Dom(f(\cdot, \mathfrak{a}_2))$ esetén $f(\cdot, \mathfrak{a}_2)(x_1) := f(x_1, \mathfrak{a}_2)$;
- $f(\mathfrak{a}_1, \cdot) : M_2 \rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $Dom(f(\mathfrak{a}_1, \cdot)) := \{x_2 \in M_2 | (\mathfrak{a}_1, x_2) \in Dom(f)\}$, és minden $x_2 \in Dom(f(\mathfrak{a}_1, \cdot))$ esetén $f(\mathfrak{a}_1, \cdot)(x_2) := f(\mathfrak{a}_1, x_2)$.

Állítás. Legyen (M, d) az $((M_i, d_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, (M', d') metrikus tér, $f{:}M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in M$. Ha f-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, és $k \in I$ olyan, hogy $\mathfrak{a}_k$ torlódási pontja az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli k-adik parciális függvénye definíciós tartományának (vagyis $Dom(f \circ in_{k,\mathfrak{a}})$-nak), akkor az $f \circ in_{k,\mathfrak{a}}{:}M_k \rightarrowtail M'$ parciális függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}_k$-ban a d_k és d' metrikák szerint, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}_k}(f \circ in_{k,\mathfrak{a}}) = \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$.

Bizonyítás. Legyen V' tetszőleges környezete $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$-nek a d' metrika szerint. Vegyük a $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezetét a d metrika szerint, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. A V-hez vehetünk olyan $(V_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén V_i a $\mathfrak{a}_i$-nek környezete d_i szerint és $\prod\limits_{i\in I} V_i \subseteq V$. Ha $k \in I$, akkor V_k a $\mathfrak{a}_k$-nak

környezete a d_k szerint, és az $in_{k,\mathfrak{a}}$ függvény értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $in_{k,\mathfrak{a}}\langle V_k \setminus \{\mathfrak{a}_k\}\rangle \subseteq \left(\prod_{i\in I} V_i\right) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq V \setminus \{\mathfrak{a}\}$, tehát

$$(f \circ in_{k,\mathfrak{a}})\langle V_k \setminus \{\mathfrak{a}_k\}\rangle = f\langle in_{k,\mathfrak{a}}\langle V_k \setminus \{\mathfrak{a}_k\}\rangle\rangle \subseteq f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V',$$

ami az állítást bizonyítja. ■

Nyilvánvaló, hogy az előző állítás alkalmazható annak bizonyítására, hogy egy metrikus szorzattérben értelmezett függvénynek adott pontban *nincs* határértéke. Alkalmazható továbbá egy metrikus szorzattérben értelmezett függvény határértékének *kiszámítására*, ha már ismert az, hogy létezik határárték az adott pontban.

Azonban előfordulhat, hogy egy szorzathalmazban értelmezett függvénynek egy pontban az összes parciális függvénye az *üres függvény*, holott a szóbanforgó pont a függvény definíciós tartományának torlódási pontja. Ilyen esetben a parciális függvényeknek semmi kapcsolatuk nincs azzal a problémával, hogy létezik-e az eredeti függvénynek határértéke, vagy sem? Ha például $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, akkor a $(0,0)$ pont $Dom(f)$-nek torlódási pontja, de $f(\cdot,0) = \emptyset = f(0,\cdot)$; e mellett lehetséges, hogy f-nek van határértéke $(0,0)$-ban, és az is lehetséges, hogy nincs. Azonban ilyen esetben is létezhet kapcsolat a függvény határértékének létezése és a függvény bizonyos parciális függvényei határátékeinek létezése között.

Lemma. Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in M$. Ha f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor

$$\lim_{\mathfrak{a}} f \in \bigcap_{U\in\mathscr{T}_d(\mathfrak{a})} \overline{f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle}.$$

Bizonyítás. Legyen $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim_{\mathfrak{a}} f)$. Létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor $U \cap V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $(U \cap V) \cap (Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \neq \emptyset$, mivel $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Ha $x \in (U \cap V) \cap (Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\})$, akkor $f(x) \in f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle$, továbbá $f(x) \in f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$, vagyis $f(x) \in V'$. Ez azt jelenti, hogy $V' \cap f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \neq \emptyset$, amiből következik az állítás. ■

Tétel. (*A kettős határértékek tétele.*) Legyen (M,d) az (M_1,d_1) és (M_2,d_2) metrikus terek szorzata, (M',d') metrikus tér, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2) \in M$. Jelölje f_2 azt az $M_2 \rightarrowtail M'$ függvényt, amelyre $Dom(f_2) := \{x_2 \in M_2 | \lim_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot,x_2)$ létezik$\}$, és minden $x_2 \in Dom(f_2)$ esetén $f_2(x_2) := \lim_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot,x_2)$.

a) Ha $\mathfrak{a}_2 \in \overline{Dom(f_2)}$, akkor $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek.

b) Ha $\mathfrak{a}_2$ torlódási pontja $Dom(f_2)$-nek és f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor f_2-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}_2$-ben, és $\lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}_2} f_2$ teljesül.

Bizonyítás. a) Legyen $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, és vegyünk olyan $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$ környezeteket, amelyekre $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Az $\mathfrak{a}_2 \in \overline{Dom(f_2)}$ feltevés alapján $V_2 \cap Dom(f_2) \neq \emptyset$; legyen x_2 eleme ennek a halmaznak. Ekkor $f(\cdot,x_2)$-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}_1$ pontban, így $\mathfrak{a}_1$ torlódási pontja a $Dom(f(\cdot,x_2))$ halmaznak. Ugyanakkor $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$, tehát $V_1 \cap (Dom(f(\cdot,x_2)) \setminus \{\mathfrak{a}_1\}) \neq \emptyset$; legyen x_1 eleme

ennek a halmaznak. Ekkor (x_1, x_2) olyan pont $M_1 \times M_2$-ben, hogy $(x_1, x_2) \in Dom(f)$ és $(x_1, x_2) \neq \mathfrak{a}$, valamint $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$, tehát $(x_1, x_2) \in V$. Ez azt jelenti, hogy $V \cap (Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \neq \emptyset$, tehát $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek.

b) Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{a}_2$ torlódási pontja $Dom(f_2)$-nek és f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ az f_2-nek határértéke $\mathfrak{a}_2$-ben. Ehhez legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f)$ tetszőleges, és rögzítsünk olyan $W' \in \mathscr{T}_{d'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f)$ környezetet, amely *zárt* és $W' \subseteq V'$ teljesül. Legyen $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan, hogy $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq W'$, továbbá legyenek $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$ és $V_2 \in \mathscr{T}_{d_2}(\mathfrak{a}_2)$ olyan környezetek, amelyekre $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Be fogjuk bizonyítani azt, hogy $f_2\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}\rangle \subseteq \overline{W'}$, amiből a W' zártsága és $W' \subseteq V'$ miatt $f_2\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}\rangle \subseteq V'$ következik. Legyen ugyanis $x_2 \in (V_2 \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f_2)$ rögzített. Ekkor $\lim\limits_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot, x_2)$ létezik és a definíció szerint $f_2(x_2) := \lim\limits_{\mathfrak{a}_1} f(\cdot, x_2)$. Az előző lemma alapján

$$f_2(x_2) \in \bigcap_{U \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)} \overline{f(\cdot, x_2)\langle U \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle},$$

továbbá, $V_1 \in \mathscr{T}_{d_1}(\mathfrak{a}_1)$, így $f_2(x_2) \in \overline{f(\cdot, x_2)\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle}$ is igaz. Ha $y \in f(\cdot, x_2)\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle$, akkor van olyan $x_1 \in (V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}) \cap Dom(f(\cdot, x_2))$, amelyre $y = f(x_1, x_2)$; ekkor $(x_1, x_2) \in ((V_1 \times V_2) \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f)$, tehát $y \in f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq W'$. Ez azt jelenti, hogy $f(\cdot, x_2)\langle V_1 \setminus \{\mathfrak{a}_1\}\rangle \subseteq W'$, következésképpen $f_2(x_2) \in \overline{W'} = W' \subseteq V'$. Tehát $f_2\langle V_2 \setminus \{\mathfrak{a}_2\}\rangle \subseteq V'$, így $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ az f_2-nek határértéke $\mathfrak{a}_2$-ben. ■

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei mellett előfordulhat az, hogy $\mathfrak{a}_2 \in \overline{Dom(f_2)}$ és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ létezik, de $\mathfrak{a}_2$ nem torlódási pontja $Dom(f_2)$-nek, ezért a $\lim\limits_{\mathfrak{a}_2} f_2$ határérték nem létezhet!

A kettős határértékek tételében szereplő $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = \lim\limits_{\mathfrak{a}_2} f_2$ egyenlőséget a

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2\to\mathfrak{a}_2} \left(\lim_{x_1\to\mathfrak{a}_1} f(x_1, x_2) \right)$$

alakban is szokták írni. A jobb oldalon álló kifejezést az f függvény *kettős határértékének* nevezzük az $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ pontban. Természetesen elkészíthető a másik

$$\lim_{x_1\to\mathfrak{a}_1} \left(\lim_{x_2\to\mathfrak{a}_2} f(x_1, x_2) \right)$$

kettős határérték is, amelyre értelemszerűen hasonló állítás érvényes.

Gyakorlatok

1. Legyen (M, d) az (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus terek szorzata, $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \in M$ és $E \subseteq M$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{a}_1$ torlódási pontja a $pr_1\langle E \cap (M_1 \times \{\mathfrak{a}_1\})\rangle$ halmaznak a d_1 metrika szerint, *vagy* $\mathfrak{a}_2$ torlódási pontja a $pr_2\langle E \cap (M_2 \times \{\mathfrak{a}_2\})\rangle$ halmaznak a d_2 metrika szerint, akkor $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ torlódási pontja E-nek a d metrika szerint. Azonban lehetséges az, hogy $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ torlódási pontja E-nek a d metrika szerint, de $\mathfrak{a}_1$ nem torlódási pontja a $pr_1\langle E \cap (M_1 \times \{\mathfrak{a}_1\})\rangle$ halmaznak a d_1 metrika szerint, *és* $\mathfrak{a}_2$ nem torlódási pontja a $pr_2\langle E \cap (M_2 \times \{\mathfrak{a}_2\})\rangle$ halmaznak a d_2 metrika szerint.

2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $Dom(f) := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 | x_0 + x_1 \neq 0\}$, és minden $(x_0, x_1) \in Dom(f)$ esetén

$$f(x_0, x_1) := \frac{x_0 - x_1}{x_0 + x_1}.$$

Ekkor $(0, 0)$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és a

$$\lim_{x_0 \to 0} \left(\lim_{x_1 \to 0} f(x_0, x_1) \right); \quad \lim_{x_1 \to 0} \left(\lim_{x_0 \to 0} f(x_0, x_1) \right)$$

kettős határértékek léteznek, de *nem egyenlők*, így f-nek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban.

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $Dom(f) := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 | x_0^2 x_1^2 + (x_0 - x_1)^2 \neq 0\}$, és minden $(x_0, x_1) \in Dom(f)$ esetén

$$f(x_0, x_1) := \frac{x_0^2 x_1^2}{x_0^2 x_1^2 + (x_0 - x_1)^2}.$$

Ekkor $(0, 0)$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és a

$$\lim_{x_0 \to 0} \left(\lim_{x_1 \to 0} f(x_0, x_1) \right); \quad \lim_{x_1 \to 0} \left(\lim_{x_0 \to 0} f(x_0, x_1) \right)$$

kettős határértékek léteznek és *egyenlők*, de f-nek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban.

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $Dom(f) := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 | x_0 \neq 0, x_1 \neq 0\}$, és minden $(x_0, x_1) \in Dom(f)$ esetén

$$f(x_0, x_1) := (x_0 + x_1) sin\left(\frac{1}{x_0}\right) sin\left(\frac{1}{x_1}\right).$$

Ekkor f-nek *létezik* határértéke a $(0, 0)$ pontban és

$$\lim_{x_0 \to 0} \left(\lim_{x_1 \to 0} f(x_0, x_1) \right) = 0 = \lim_{x_1 \to 0} \left(\lim_{x_0 \to 0} f(x_0, x_1) \right).$$

7. Folytonos és egyenletesen folytonos függvények

Definíció. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, valamint $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az* $\mathfrak{a}$ *pontban* (a d és d' metrikák szerint), ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, és az $f(\mathfrak{a})$ minden d' szerinti V' környezetéhez létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan d szerinti V környezete, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$ teljesül, vagyis fennáll a

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a})))(\exists\, V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})) : f\langle V\rangle \subseteq V'$$

kijelentés. Azt mondjuk, hogy f-nek *szakadása van* az $\mathfrak{a}$ pontban, ha f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban. Azt mondjuk, hogy az $f : M \rightarrowtail M'$ függvény *folytonos*, ha f a $Dom(f)$ minden pontjában folytonos.

A környezetek definíciója alapján az f függvény folytonossága az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban ekvivalens a

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in Dom(f))\ \ (d(x, \mathfrak{a}) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(\mathfrak{a})) < \varepsilon)$$

állítással. Ez azt mutatja, hogy egy $f : \mathbb{K} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor folytonos az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi metrika szerint, ha folytonos a III. fejezet 1. pontjában adott definíció szerint. Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy metrikus terek között ható függvény a definíciós tartományának minden *izolált* pontjában folytonos; speciálisan, minden olyan függvény folytonos, amelynek a definíciós tartománya *véges*.

Állítás. (*A folytonosság lokalitása.*) Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f, g : M \rightarrowtail M'$ függvények, $\mathfrak{a} \in Dom(f) \cap Dom(g)$, és tegyük fel, hogy létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan W környezete, amelyre $W \cap Dom(f) = W \cap Dom(g)$, és $f = g$ ezen a halmazon. Ekkor f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha g folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$. Legyen $U \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan, hogy $f\langle U\rangle \subseteq V'$. Ekkor $V := U \cap W \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és a definíciók alapján

$$g\langle V\rangle = f\langle V\rangle \subseteq f\langle U\rangle \subseteq V',$$

ami azt jelenti, hogy g folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Állítás. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$.

a) Ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, akkor minden $E \subseteq Dom(f)$ halmazra, $\mathfrak{a} \in E$ esetén az $f|_E : E \to M'$ leszűkített függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint.

b) Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ és d' metrikák szerint, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint.

c) Ha $F \subseteq M'$ olyan halmaz, hogy $Im(f) \subseteq F$, akkor az f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és $d'|_{F\times F}$ metrikák szerint.

Bizonyítás. a) Ha $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, akkor van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$, hiszen f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint. Ekkor $E \subseteq Dom(f)$ és $\mathfrak{a} \in E$ esetén $V \cap E$ az $\mathfrak{a}$-nak környezete $d|_{E\times E}$ szerint, és $(f|_E)\langle V\rangle \subseteq f\langle V\rangle \subseteq V'$, így $(f|_E)(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a})$ miatt $f|_E$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint.

b) Ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, akkor az a) alapján az f függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ és d' metrikák szerint, hiszen $f = f|_{Dom(f)}$. Megfordítva, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ és d' metrikák szerint, akkor $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ esetén vehetünk olyan $U \in \mathscr{T}_{d|_{Dom(f)\times Dom(f)}}(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle U\rangle \subseteq V'$. Ekkor van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $U = V \cap Dom(f)$, így $f\langle V\rangle = f\langle V \cap Dom(f)\rangle = f\langle U\rangle \subseteq V'$, vagyis f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint.

c) Legyen $F \subseteq M'$ olyan halmaz, hogy $Im(f) \subseteq F$. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint, továbbá $V' \in \mathscr{T}_{d'|_{F\times F}}(f(\mathfrak{a}))$, akkor van olyan $U' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, hogy $V' = U' \cap F$; ekkor létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V\rangle \subseteq U'$, következésképpen $f\langle V\rangle \subseteq U' \cap F = V'$ is teljesül, vagyis f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és $d'|_{F\times F}$ metrikák szerint. Megfordítva, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és $d'|_{F\times F}$ metrikák szerint, és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, akkor $V' \cap F \in \mathscr{T}_{d'|_{F\times F}}(f(\mathfrak{a}))$, így létezik olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V' \cap F \subseteq V'$, vagyis f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint. ■

Az előző állítás szerint a folytonosság szempontjából az általánosságnak semmilyen korlátozását nem jelentené az, ha metrikus terek között csak olyan függvények folytonosságát vizsgálnánk, amelyek definíciós tartománya egyenlő az indulási metrikus tér alaphalmazával, és az értékkészlete egyenlő az érkezési metrikus tér alaphalmazával (vagyis szürjektív). Azonban ez több szempontból célszerűtlen, például a pontbeli folytonosság és a határérték létezésének kapcsolatát illetően.

Állítás. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek. Az f függvény pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor minden $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ esetén van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$; ekkor $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$ még inkább teljesül, tehát f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f = f(\mathfrak{a})$. Megfordítva; ha $f(\mathfrak{a})$ az f függvénynek határértéke $\mathfrak{a}$-ban, akkor $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ esetén van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, hogy $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$; ekkor $f\langle V\rangle = \{f(\mathfrak{a})\} \cup f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$, következésképpen f folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, és $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $\mathfrak{a} \in E$, akkor abból, hogy az $f|_E : E \to M'$ leszűkített függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint *nem következik*, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint. Például, ha $E := \{\mathfrak{a}\}$, akkor $f|_E$ folytonos a $d|_{E\times E}$ és d' metrikák szerint, akár folytonos f az $\mathfrak{a}$-ban, akár nem a d és d' metrikák szerint.

Állítás. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, és tegyük fel, hogy f-nek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban.

Ha $g : M \rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $Dom(g) := Dom(f) \cup \{\mathfrak{a}\}$ és minden $x \in Dom(g)$ esetén

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, ha } x \in Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}, \\ \lim\limits_{\mathfrak{a}} f & \text{, ha } x = \mathfrak{a}, \end{cases}$$

akkor g folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(g(\mathfrak{a}))$ tetszőleges, és $g(\mathfrak{a}) := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ alapján vegyünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V'$. Ekkor a g értelmezése alapján

$$g\langle V\rangle = \{g(\mathfrak{a})\} \cup g\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle := \{\lim_{\mathfrak{a}} f\} \cup f\langle V \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq V',$$

tehát g folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Állítás. (*Átviteli elv folytonosságra.*) Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ függvény, és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$. Az f pontosan akkor folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ha minden $Dom(f)$-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$ esetén az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$ teljesül.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ tetszőleges. Ekkor vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$. A V-hez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in V$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in V \cap Dom(f)$, ezért $f(\boldsymbol{s}(n)) \in f\langle V\rangle \subseteq V'$. Ez azt jelenti, hogy $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozat és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f *nem folytonos* $\mathfrak{a}$-ban. Ekkor

$$(\exists\, V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a})))(\forall\, V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})) : f\langle V\rangle \setminus V' \neq \emptyset.$$

Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ olyan, hogy minden $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ esetén $f\langle V\rangle \setminus V' \neq \emptyset$, vagyis

$$V \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle \neq \emptyset.$$

Legyen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathfrak{a}$ pont környezeteinek olyan sorozata, amely tartalmazás tekintetében monoton fogyó, és rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az $\mathfrak{a}$ minden V környezetéhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $V_n \subseteq V$. Például, ha $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó monoton fogyó zérussorozat, akkor a $(B_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat megfelelő. Ekkor a V' definíciója szerint a

$$\left(V_n \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

halmazsorozat minden tagja nem üres halmaz, így a kiválasztási axióma szerint

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(V_n \cap \overset{-1}{f}\langle M' \setminus V'\rangle\right) \neq \emptyset.$$

Legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in V_n$ és $f(\boldsymbol{s}(n)) \notin V'$.

Ebből következik, hogy $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, ugyanakkor $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$ lehetetlen, mert $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(\boldsymbol{s}(n)) \notin V'$. Ezért vagy $f \circ \boldsymbol{s}$ nem konvergens, vagy konvergens, de nem $f(\mathfrak{a})$ a határértéke. ■

Tétel. (*Az egyenlőségek folytatásának elve.*) Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, és $f, g : M \to M'$ folytonos függvények. Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor minden $\overline{E} \ni x$-re $f(x) = g(x)$ teljesül.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az $\{x \in M | f(x) = g(x)\}$ halmaz *zárt*. Ebből már következik az állítás, hiszen a feltevés szerint $E \subseteq \{x \in M | f(x) = g(x)\}$, tehát ha $\{x \in M | f(x) = g(x)\}$ zárt, akkor $\overline{E} \subseteq \{x \in M | f(x) = g(x)\}$ is teljesül.

Legyen $\mathfrak{a} \in M \setminus \{x \in M | f(x) = g(x)\}$, vagyis $f(\mathfrak{a}) \neq g(\mathfrak{a})$. Vegyünk olyan $V'_f \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ és $V'_g \in \mathscr{T}_{d'}(g(\mathfrak{a}))$ környezeteket, amelyekre $V'_f \cap V'_g = \emptyset$. Az f és g függvény $\mathfrak{a}$-beli folytonossága miatt vehetünk olyan $V_f \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V_g \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezeteket, amelyekre $f\langle V_f \rangle \subseteq V'_f$ és $g\langle V_g \rangle \subseteq V'_g$. Ekkor $V := V_f \cap V_g \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet, amelyre $V \subseteq M \setminus \{x \in M | f(x) = g(x)\}$, tehát az $M \setminus \{x \in M | f(x) = g(x)\}$ halmaz nyílt. ■

Az egyenlőségek folytatásának elvét rendszerint olyan esetben alkalmazzuk, amikor két folytonos függvény egy *sűrű* halmazon megegyezik; ekkor az egyenlőségek folytatásának elve alapján a két függvény egyenlő.

Tétel. (*A folytonos függvények kiterjesztése.*) Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan $\overline{Dom(f)} \to M'$ folytonos függvény, amely az f-nek kiterjesztése, ha minden $Dom(f)$-ben haladó, d szerint konvergens $\boldsymbol{s}$ sorozatra az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens d' szerint. Továbbá, az f-nek legfeljebb egy folytonos kiterjesztése létezik $\overline{Dom(f)}$-ra.

Bizonyítás. Ha $g : \overline{Dom(f)} \to M'$ az f függvénynek folytonos kiterjesztése, akkor az g-re vonatkozó átviteli elv szerint minden $\overline{Dom(f)}$-ben haladó, d szerint konvergens $\boldsymbol{s}$ sorozatra a $g \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens d' szerint, hiszen $\lim(\boldsymbol{s}) \in \overline{Dom(f)}$ és g folytonos a $lim(\boldsymbol{s})$ pontban. Speciálisan, ha $\boldsymbol{s}$ tetszőleges, $Dom(f)$-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, akkor $g \circ \boldsymbol{s} = f \circ \boldsymbol{s}$ miatt az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens d' szerint.

Tegyük fel, hogy minden $Dom(f)$-ben haladó, d szerint konvergens $\boldsymbol{s}$ sorozatra az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens d' szerint. Legyen $\mathfrak{a} \in \overline{Dom(f)}$ rögzített pont. Ha $\boldsymbol{s}_1$ és $\boldsymbol{s}_2$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozatok, amelyek d szerint konvergálnak $\mathfrak{a}$-hoz, akkor az

$$\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \to M; \quad n \mapsto \begin{cases} \boldsymbol{s}_1(k) & ; \text{ha } n = 2k \\ \boldsymbol{s}_2(k) & ; \text{ha } n = 2k+1 \end{cases}$$

sorozat szintén $Dom(f)$-ben halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál d szerint, ezért az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens a d' metrika szerint. Ugyanakkor $f \circ \boldsymbol{s}_1$ és $f \circ \boldsymbol{s}_2$ részsorozata $f \circ \boldsymbol{s}$-nek, ezért $\lim(f \circ \boldsymbol{s}_1) = \lim(f \circ \boldsymbol{s}_2)$. Ebből következik, hogy jól értelmezett az a $g : \overline{Dom(f)} \to M'$ függvény, amely minden $\mathfrak{a} \in \overline{Dom(f)}$ ponthoz a $\lim(f \circ \boldsymbol{s})$ határértéket rendeli, ahol $\boldsymbol{s}$ tetszőleges olyan $Dom(f)$-ben haladó, d szerint konvergens sorozat, amelyre $\mathfrak{a} = \lim(\boldsymbol{s})$. Nyilvánvaló, hogy g kiterjesztése f-nek, hiszen ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $\boldsymbol{s}$ jelöli azt az állandó sorozatot, amelynek értéke $\mathfrak{a}$, akkor $\mathfrak{a} = \lim(\boldsymbol{s})$, tehát $g(\mathfrak{a}) := \lim(f \circ \boldsymbol{s})$, ugyanakkor $f \circ \boldsymbol{s}$ az az állandó sorozat, amelynek értéke $f(\mathfrak{a})$, így $\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = f(\mathfrak{a})$, tehát $g(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a})$.

Most megmutatjuk, hogy

$$(\forall \mathfrak{a} \in \overline{Dom(f)})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+): \ f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')$$

teljesül. Tegyük fel, hogy nem így van, és legyen $\mathfrak{a} \in \overline{Dom(f)}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\delta > 0$ valós számra $f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \nsubseteq B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')$, vagyis

$$(Dom(f) \cap B_\delta(\mathfrak{a}; d)) \setminus \overset{-1}{f}\langle B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle \neq \emptyset.$$

Rögzítsünk egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(Dom(f) \cap B_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d)) \setminus \overset{-1}{f}\langle B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle \neq \emptyset,$$

ezért a kiválasztási axióma alapján vehetünk egy

$$\boldsymbol{s} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \left((Dom(f) \cap B_{\delta_n}(\mathfrak{a}; d)) \setminus \overset{-1}{f}\langle B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle \right)$$

elemet. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál d szerint, mert minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(\boldsymbol{s}(n), \mathfrak{a}) < \delta_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Ezért a g definíciója alapján $lim(f \circ \boldsymbol{s}) = g(\mathfrak{a})$, ami viszont lehetetlen, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{s}(n) \notin \overset{-1}{f}\langle B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')\rangle,$$

vagyis $d'(f(\boldsymbol{s}(n)), g(\mathfrak{a})) \geq \varepsilon$.

Ezután könnyen igazolhatjuk, hogy a g függvény folytonos. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in \overline{Dom(f)}$ rögzített pont, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyen $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ egy rögzített valós szám, és az előző bekezdés alapján vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $f\langle B_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq B_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d')$. Ha $\mathfrak{a}' \in \overline{Dom(f)} \cap B_\delta(\mathfrak{a}; d)$ és $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}'$-höz konvergál, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\boldsymbol{s}(n) \in B_{\delta - d(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})}(\mathfrak{a}'; d)$; ekkor minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in Dom(f) \cap B_\delta(\mathfrak{a}; d)$, így $f(\boldsymbol{s}(n)) \in B_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d')$, ezért

$$g(\mathfrak{a}') := \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{s}(n)) \in \overline{B_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d')} \subseteq \overline{B}_{\varepsilon'}(g(\mathfrak{a}); d') \subseteq B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d').$$

Ez azt jelenti, hogy $g\langle B_\delta(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq B_\varepsilon(g(\mathfrak{a}); d')$, tehát g folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Végül, ha $g' : \overline{Dom(f)} \to M'$ szintén folytonos kiterjesztése f-nek, akkor minden $x \in Dom(f)$ esetén $g(x) = f(x) = g'(x)$, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján minden $\overline{Dom(f)} \ni x$-re $g(x) = g'(x)$, vagyis $g = g'$, tehát f-nek egyetlen folytonos kiterjesztése létezik. ■

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett. Legyenek $f, g : M \rightarrowtail F$ és $\lambda : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvények, valamint $\alpha \in \mathbb{K}$.

a) Ha $\mathfrak{a} \in Dom(f+g)$, továbbá f és g folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor $f+g$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

b) Ha $\mathfrak{a} \in Dom(\lambda.f)$-nek, továbbá λ és f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor $\lambda.f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

c) Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $\|f(\cdot)\| : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ és $\alpha.f : M \rightarrowtail F$ függvények folytonosak $\mathfrak{a}$-ban.

d) Ha λ folytonos $\mathfrak{a}$-ban, akkor az $\overline{\lambda} : M \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény is folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Bizonyítás. a) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f+g)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $f \circ \boldsymbol{s}$ és $g \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozatok, továbbá $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$ és $g(\mathfrak{a}) = \lim(g \circ \boldsymbol{s})$; így az $(f+g) \circ \boldsymbol{s} = (f \circ \boldsymbol{s}) + (g \circ \boldsymbol{s})$ sorozat is konvergens, és

$$\lim((f+g) \circ \boldsymbol{s}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s}) + \lim(g \circ \boldsymbol{s}) = f(\mathfrak{a}) + g(\mathfrak{a}) =: (f+g)(\mathfrak{a}).$$

Ezért az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $f+g$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

b) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(\lambda.f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint $\lambda \circ \boldsymbol{s}$ és $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens sorozatok, továbbá $\lambda(\mathfrak{a}) = \lim(\lambda \circ \boldsymbol{s})$ és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$; így a $(\lambda.f) \circ \boldsymbol{s} = (\lambda \circ \boldsymbol{s}).(f \circ \boldsymbol{s})$ sorozat is konvergens, és

$$\lim((\lambda.f) \circ \boldsymbol{s}) = \lim(\lambda \circ \boldsymbol{s}).\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = \lambda(\mathfrak{a}).f(\mathfrak{a}) =: (\lambda.f)(\mathfrak{a}).$$

Ezért az átviteli elv alapján kapjuk, hogy $\lambda.f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

c) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $f \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, és $f(\mathfrak{a}) = \lim(f \circ \boldsymbol{s})$; így az $\|f(\cdot)\| \circ \boldsymbol{s} = \|(f \circ \boldsymbol{s})(\cdot)\|$ és $(\alpha.f) \circ \boldsymbol{s} = \alpha.(f \circ \boldsymbol{s})$ sorozatok is konvergensek és

$$\lim(\|f(\cdot)\| \circ \boldsymbol{s}) = \|\lim(f \circ \boldsymbol{s})\| = \|(f(\mathfrak{a})\| =: \|f(\cdot)\|(\mathfrak{a})$$
$$\lim((\alpha.f) \circ \boldsymbol{s}) = \alpha.\lim(f \circ \boldsymbol{s}) = \alpha.f(\mathfrak{a}) =: (\alpha.f)(\mathfrak{a}).$$

Az átviteli elv alapján kapjuk, hogy a $\|f(\cdot)\|$ és $\alpha.f$ függvények folytonosak $\mathfrak{a}$-ban.

d) Ha $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(\lambda)$-ban haladó sorozat, amelyre $\lim(\boldsymbol{s}) = \mathfrak{a}$, akkor az átviteli elv szerint az $\lambda \circ \boldsymbol{s}$ sorozat konvergens, és $\lambda(\mathfrak{a}) = \lim(\lambda \circ \boldsymbol{s})$, így az $\overline{\lambda} \circ \boldsymbol{s} = \overline{\lambda \circ \boldsymbol{s}}$ sorozat is konvergens, és

$$\lim(\overline{\lambda} \circ \boldsymbol{s}) = \overline{\lim(\lambda \circ \boldsymbol{s})} = \overline{\lambda(\mathfrak{a})} =: \overline{\lambda}(\mathfrak{a}).$$

Az átviteli elv alapján kapjuk, hogy az $\overline{\lambda}$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Állítás. (*Függvénykompozíció folytonossága.*) Legyenek (M,d), (M',d'), valamint (M'',d'') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$, $g : M' \rightarrowtail M''$ függvények, és $\mathfrak{a} \in Dom(g \circ f)$. Ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban és g folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

Bizonyítás. Vegyünk tetszőleges $V'' \in \mathscr{T}_{d''}(g(f(\mathfrak{a}))$ környezetet. A g folytonos $f(\mathfrak{a})$-ban, ezért vehetünk olyan $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ környezetet, amelyre $g\langle V' \rangle \subseteq V''$. Az f folytonos $\mathfrak{a}$-ban, ezért V'-höz vehetünk olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezetet, amelyre $f\langle V \rangle \subseteq V'$. Ekkor nyilvánvalóan teljesül az, hogy $(g \circ f)\langle V \rangle = g\langle f\langle V \rangle \rangle \subseteq g\langle V' \rangle \subseteq V''$, vagyis $g \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban. ■

Állítás. (*A folytonosság topologikus jellemzése.*) Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek és $f : M \to M'$ függvény. A következő állítások ekvivalensek.

a) Minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$ környezetre $\overset{-1}{f}\langle V' \rangle \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$.

b) Az f függvény folytonos a d és d' metrikák szerint.

c) Minden $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}_d$.

d) Minden $F' \subseteq M'$ halmazra, ha F' zárt a d' metrika szerint, akkor $\overset{-1}{f}\langle F'\rangle \subseteq M$ zárt a d metrika szerint.

e) Minden $E \subseteq M$ halmazra $f\langle\overline{E}\rangle \subseteq \overline{f\langle E\rangle}$.

Bizonyítás. a)⇒b) Legyen $\mathfrak{a} \in M$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$. Az a) szerint $V := \overset{-1}{f}\langle V'\rangle \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, és nyilvánvaló, hogy $f\langle V\rangle \subseteq V'$, tehát f folytonos $\mathfrak{a}$-ban.

b)⇒c) Legyen $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ és $\mathfrak{a} \in \overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$. Ekkor $f(\mathfrak{a}) \in \Omega'$, tehát a környezetek értelmezése alapján $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$. Ezért a b) miatt van olyan $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq \Omega'$. Ekkor $V \subseteq \overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$, következésképpen $\mathfrak{a}$ belső pontja az $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$ halmaznak, vagyis $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$ nyílt halmaz.

c)⇒d) Legyen $F' \subseteq M'$ zárt halmaz. Ekkor $M' \setminus F' \in \mathscr{T}_{d'}$, tehát a c) alapján $\overset{-1}{f}\langle M' \setminus F'\rangle \in \mathscr{T}_d$. Ugyanakkor $\overset{-1}{f}\langle M' \setminus F'\rangle = M \setminus \overset{-1}{f}\langle F'\rangle$, így $\overset{-1}{f}\langle F'\rangle \subseteq M$ zárt halmaz.

d)⇒e) Legyen $E \subseteq M$. Az $\overline{f\langle E\rangle} \subseteq M'$ halmaz zárt, ezért a d) szerint $\overset{-1}{f}\langle\overline{f\langle E\rangle}\rangle \subseteq M$ zárt halmaz, és nyilvánvaló, hogy

$$E \subseteq \overset{-1}{f}\langle f\langle E\rangle\rangle \subseteq \overset{-1}{f}\langle\overline{f\langle E\rangle}\rangle.$$

Ebből következik, hogy $\overline{E} \subseteq \overset{-1}{f}\langle\overline{f\langle E\rangle}\rangle$, ezért

$$f\langle\overline{E}\rangle \subseteq f\langle\overset{-1}{f}\langle\overline{f\langle E\rangle}\rangle\rangle \subseteq \overline{f\langle E\rangle}.$$

e)⇒a) Legyen $\mathfrak{a} \in M$ és $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$; azt kell igazolni, hogy e) teljesülése esetén $\overset{-1}{f}\langle V'\rangle \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, vagy ami ugyanaz: $\mathfrak{a} \in Int(\overset{-1}{f}\langle V'\rangle)$. Ehhez fehasználjuk azt, hogy

$$Int(\overset{-1}{f}\langle V'\rangle) = M \setminus \overline{(M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle)},$$

tehát az $\mathfrak{a} \in Int(\overset{-1}{f}\langle V'\rangle)$ kijelentés ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{a} \notin \overline{M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle}$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\mathfrak{a} \in \overline{M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle}$. Az e) alapján ekkor

$$f(\mathfrak{a}) \in f\langle\overline{M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle}\rangle \subseteq \overline{f\langle M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle\rangle}.$$

A V' halmaz $f(\mathfrak{a})$-nak környezete, ezért

$$V' \cap f\langle M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle\rangle \neq \emptyset.$$

Ugyanakkor halmazelméleti trivialitás az, hogy ez a metszet üres, hiszen ha y eleme neki, akkor van olyan $x \in M \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle$, hogy $y = f(x) \notin V'$ és $y \in V'$, ami ellentmondás. ■

Következmény. Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Az f pontosan akkor folytonos, ha minden $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ halmazhoz létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}_d$, amelyre $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle = \Omega \cap Dom(f)$ teljesül.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy f pontosan akkor folytonos a d és d' metrikák szerint, ha f folytonos a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ és d' metrikák szerint. Az előző állítás szerint az utóbbi tulajdonság ekvivalens azzal, hogy minden $\Omega' \in \mathscr{T}_{d'}$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$ nyílt $Dom(f)$-ben a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ metrika szerint. De az altér-metrika szerint nyílt halmazok jellemzése alapján a $Dom(f)$-nek egy részhalmaza pontosan akkor nyílt a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ metrika szerint, ha az $\Omega \cap Dom(f)$ alakú, ahol $\Omega \subseteq M$ d szerint nyílt halmaz. ■

Állítás. (*A projekciók folytonossága.*) Ha (M,d) az $((M_i,d_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, akkor minden $k \in I$ esetén a $pr_k : M \to M_k$ projekció-függvény folytonos a d és d_k metrikák szerint.

Bizonyítás. Legyen $k \in I$ és $\Omega \in \mathscr{T}_{d_k}$. Nyilvánvaló, hogy $\overset{-1}{pr_k}\langle\Omega\rangle = \prod_{i\in I}\Omega_i$, ahol minden $i \in I$ esetén $\Omega_i := M_i$, ha $i \neq k$, és $\Omega_k := \Omega$. Ezért $\overset{-1}{pr_k}\langle\Omega\rangle$ nyílt halmaz M-ben a d szorzatmetrika szerint, hiszen nyílt halmazok szorzata nyílt. A folytonosság topologikus jellemzése alapján ebből következik, hogy a $pr_k : M \to M_k$ függvény folytonos a d és d_k metrikák szerint. ■

Állítás. Legyen (M,d) metrikus tér, (M',d') az $((M'_i,d'_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Az f pontosan akkor folytonos az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban a d és d' metrikák szerint, ha minden $i \in I$ esetén $pr_i \circ f$ folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d'_i metrikák szerint. Az f pontosan akkor folytonos a d és d' metrikák szerint, ha minden $i \in I$ esetén $pr_i \circ f$ folytonos a d és d'_i metrikák szerint.

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből; legyen tehát $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ rögzített pont.

Ha $i \in I$, akkor az előző állítás alapján a $pr_i : M' \to M'_i$ függvény folytonos az $f(\mathfrak{a})$ pontban a d' és d'_i metrikák szerint, tehát ha f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint, a függvénykompozíció folytonosságának tétele alapján a $pr_i \circ f$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d'_i metrikák szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $pr_i \circ f$ függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d'_i metrikák szerint. Legyen $V' \in \mathscr{T}_{d'}(f(\mathfrak{a}))$, és vegyünk olyan $(V'_i)_{i\in I}$ rendszert, amelyre minden $i \in I$ esetén $V'_i \in \mathscr{T}_{d'_i}(pr_i(f(\mathfrak{a})))$ és $\prod_{i\in I} V'_i \subseteq V'$. Minden $i \in I$ esetén legyen $V_i \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet, amelyre $(pr_i \circ f)\langle V_i\rangle \subseteq V'_i$, továbbá $V := \bigcap_{i\in I} V_i$. Ekkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$, és nyilvánvaló, hogy

$$f\langle V\rangle \subseteq \prod_{i\in I} pr_i\langle f\langle V_i\rangle\rangle = \prod_{i\in I}(pr_i \circ f)\langle V_i\rangle \subseteq \prod_{i\in I} V'_i \subseteq V',$$

vagyis f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban a d és d' metrikák szerint. ■

Állítás. Legyen (M,d) az $((M_i,d_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, (M',d') metrikus tér, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Ha f folytonos az $\mathfrak{a} := ((\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in$

$Dom(f)$ pontban a d és d' metrikák szerint, akkor minden $k \in I$ esetén az $f \circ in_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ parciális függvény folytonos $\mathfrak{a}_k$-ban a d_k és d' metrikák szerint. Ha f folytonos a d és d' metrikák szerint, akkor minden $k \in I$ és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ esetén az $f \circ in_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ parciális függvény folytonos a d_k és d' metrikák szerint.

Bizonyítás. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy $k \in I$ és $\mathfrak{a} \in M$ esetén az $in_{k,\mathfrak{a}} : M_k \to M$ függvény *izometria* a d_k és d metrikák szerint, ezért folytonos és $in_{k,\mathfrak{a}}(a_k) = \mathfrak{a}$, így a folytonos függvények kompozíciójának folytonossága miatt $f \circ in_{k,\mathfrak{a}} : M_k \rightarrowtail M'$ folytonos a d_k és d' metrikák szerint az $\mathfrak{a}_k$ pontban, ha f folytonos $\mathfrak{a}$-ban d és d' szerint. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy az előző állítás feltételei mellett lehetséges az, hogy $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ olyan pont, amelyre minden $k \in I$ esetén $f \circ in_{k,\mathfrak{a}}$ folytonos $\mathfrak{a}_k$-ban a d_k és d' metrikák szerint, de f nem folytonos $\mathfrak{a}$-ban a d és d' metrikák szerint.

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $f, g : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az $\{x \in M | f(x) < g(x)\}$ halmaz nyílt és az $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$ halmaz zárt a d metrika szerint. Ha $f, g : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $E \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor minden $x \in \overline{E}$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül (ez az *egyenlőtlenségek folytatásának elve*).

Bizonyítás. Legyenek $f, g : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $h := g - f$; ekkor $h : M \to \mathbb{R}$ is folytonos függvény.

Az $\mathbb{R}^+$ halmaz nyílt $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint, és $\{x \in M | f(x) < g(x)\} = \overset{-1}{h}\langle \mathbb{R}^+ \rangle$, tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján $\{x \in M | f(x) < g(x)\}$ nyílt a d metrika szerint.

Az $\mathbb{R}_+$ halmaz zárt $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint, és $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\} = \overset{-1}{h}\langle \mathbb{R}_+ \rangle$, tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$ zárt a d metrika szerint.

Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor $E \subseteq \{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$, tehát az $\{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$ halmaz zártsága folytán $\overline{E} \subseteq \{x \in M | f(x) \leq g(x)\}$, vagyis minden $x \in \overline{E}$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül. ■

Jelölés. Ha (M, d), (M', d') metrikus terek, akkor a d és d' metrikák szerint folytonos $M \to M'$ függvények halmazát $\mathscr{C}(M, d; M', d')$ jelöli; vagy ha nyilvánvaló, hogy mely metrikák szerinti folytonosságról van szó, akkor a rövidebb $\mathscr{C}(M; M')$ jelölést alkalmazzuk. Ha (M, d), (M', d') metrikus terek, akkor a d és d' metrikák szerint folytonos és korlátos $M \to M'$ függvények halmazát $\mathscr{C}^b(M, d; M', d')$ jelöli; vagy ha nyilvánvaló, hogy mely metrikák szerinti folytonosságról és korlátosságról van szó, akkor a rövidebb $\mathscr{C}^b(M; M')$ jelölést alkalmazzuk.

Megjegyezzük, hogy a $\mathscr{C}(M, d; M', d')$ függvényhalmaz a d és d' metrikáktól csak az általuk meghatározott topológián keresztül függ, tehát ez *topologikus objektum*. Ugyanakkor a $\mathscr{C}^b(M, d; M', d')$ függvényhalmaz d-től az általa meghatározott topológián keresztül függ, de a d' metrikát vele ekvivalens metrikára cserélve teljesen megváltozhat, hiszen ekkor az M' korlátos halmazai egészen mások lehetnek.

Definíció. Az (M, d) és (M', d') metrikus terek közötti *homeomorfizmusnak* nevezünk minden olyan $f : M \to M'$ bijekciót, amely folytonos a d és d' metrikák szeint, és az f^{-1} inverzfüggvény is folytonos a d' és d metrikák szerint. Az (M, d) és (M', d') metrikus tereket *homeomorfaknak* nevezzük, ha létezik (M, d) és (M', d') között homeomorfizmus.

Vigyázzunk arra, hogy metrikus terek közti folytonos bijekció nem szükségképpen homeomorfizmus, vagyis az inverze nem feltétlenül folytonos (**3**. gyakorlat). Világos, hogy a homeomorfizmusok topologikus objektumok, és a homeomorfia topologikus tulajdonság.

Metrikus terek homeomorfiájának eldöntése lehet egészen nehéz feladat; például az euklidészi metrikákkal ellátott $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ aritmetikai terek homeomorfiájának eldöntésére tett erőfeszítések a matematika új területének, az *algebrai topológiának* létrehozását eredményezték. Később (a komplex függvénytanban) bevezetünk egy homeomorfiánál gyengébb kapcsolatot metrikus terek között: a *homotópiát*.

Definíció. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény.

a) Azt mondjuk, hogy f *egyenletesen folytonos* (a d és d' metrikák szerint), ha

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall (x_1, x_2) \in Dom(f) \times Dom(f)) :$$
$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

teljesül.

b) Azt mondjuk, hogy az f függvény *α-rendű Hölder-függvény*, ha $\alpha \in]0, 1]$ valós szám, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $(x_1, x_2) \in Dom(f) \times Dom(f)$ esetén

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)^\alpha$$

teljesül.

c) Az elsőrendű Hölder-függvényeket *Lipschitz-függvényeknek* nevezzük.

d) Azt mondjuk, hogy f *kontrakció*, ha létezik olyan $C \in [0, 1[$ valós szám, amelyre minden $(x_1, x_2) \in Dom(f) \times Dom(f)$ esetén fennáll a

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2)$$

egyenlőtlenség.

Nyilvánvaló, hogy minden kontrakció Lipschitz-függvény, és minden Lipschitz-függvény Hölder-függvény.

Állítás. Ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, akkor minden $M \rightarrowtail M'$ egyenletesen folytonos függvény folytonos, és minden $M \rightarrowtail M'$ Hölder-függvény egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f : M \rightarrowtail M'$ egyenletesen folytonos függvény, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $(x_1, x_2) \in Dom(f) \times Dom(f)$ esetén, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$

pontra $f\langle B_\delta(\mathfrak{a};d)\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a});d'))$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy f a $Dom(f)$ minden pontjában folytonos.

Tegyük fel, hogy $\alpha \in]0,1]$ és $C > 0$ olyan valós szám, hogy az $f : M \rightarrowtail M'$ függvényre teljesül az, hogy minden $(x_1,x_2) \in Dom(f) \times Dom(f)$ esetén $d'(f(x_1),f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1,x_2)^\alpha$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $C \cdot \delta^\alpha < \varepsilon$; ekkor minden $(x_1,x_2) \in Dom(f) \times Dom(f)$ esetén, ha $d(x_1,x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1),f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1,x_2)^\alpha < C \cdot \delta^\alpha < \varepsilon$, tehát f egyenletesen folytonos függvény. ■

Példák (*egyenletesen folytonos függvényekre*).

1) Ha (M,d) metrikus tér, akkor a $d : M \times M \to \mathbb{R}$ leképezés Lipschitz-függvény a d metrika önmagával vett d' szorzata és az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, hiszen minden $x_1,x_2,x_1',x_2' \in M$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség kétszeres alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|d(x_1,x_2) - d(x_1',x_2')| &\leq d(x_1,x_1') + d(x_2,x_2') \leq \\ &\leq 2 \cdot \max(d(x_1,x_1'),d(x_2,x_2')) =: 2 \cdot d'((x_1,x_2),(x_1',x_2')).\end{aligned}$$

Az itteni első egyenlőtlenséget *négyszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük.

2) Ha $(E,\|\cdot\|)$ normált tér, akkor a $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ leképezés Lipschitz-függvény a $\|\cdot\|$ által generált E feletti metrika és az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, hiszen minden $x_1,x_2 \in E$ vektorra

$$|\|x_1\| - \|x_2\|| \leq \|x_1 - x_2\|$$

teljesül.

3) Ha $(E,\|\cdot\|)$ normált tér, akkor a $+ : E \times E \to E$ összeadás-függvény Lipschitz-függvény a $d_{\|\cdot\|}$ metrika önmagával vett d' szorzata és $d_{\|\cdot\|}$ szerint, hiszen minden $x_1,x_2,x_1',x_2' \in E$ esetén

$$\begin{aligned}d_{\|\cdot\|}(x_1+x_2,x_1'+x_2') &:= \|(x_1+x_2)-(x_1'+x_2')\| = \|(x_1-x_1')+(x_2-x_2')\| \leq \\ &\leq \|x_1-x_1'\| + \|x_2-x_2'\| =: d_{\|\cdot\|}(x_1,x_1') + d_{\|\cdot\|}(x_2,x_2') \leq \\ &\leq 2 \cdot \max(d_{\|\cdot\|}(x_1,x_1'),d_{\|\cdot\|}(x_2,x_2')) =: 2 \cdot d'((x_1,x_2),(x_1',x_2'))\end{aligned}$$

teljesül.

4) Ha $(E,\|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor $\alpha \in \mathbb{K}$ és $\mathfrak{c} \in E$ esetén az $E \to E;\ x \mapsto \alpha.x + \mathfrak{c}$ leképezés Lipschitz-függvény, és ha $\alpha \neq 0$, akkor ez homeomorfizmus a $d_{\|\cdot\|}$ és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint. Valóban, ha $x_1,x_2 \in E$, akkor

$$d_{\|\cdot\|}(\alpha.x_1+\mathfrak{c},\alpha.x_2+\mathfrak{c}) := \|(\alpha.x_1+\mathfrak{c})-(\alpha.x_2+\mathfrak{c})\| = |\alpha|\|x_1-x_2\| =: |\alpha| d_{\|\cdot\|}(x_1,x_2),$$

és ha $\alpha \neq 0$, akkor a szóbanforgó függvény inverze az $E \to E;\ x \mapsto \alpha.x+\mathfrak{c}$ leképezés inverze az $E \to E;\ y \mapsto \alpha^{-1}.y - \alpha^{-1}.\mathfrak{c}$ függvény.

5) Ha $(E,\|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a $\mathbb{K} \times E \to E;\ (\alpha,x) \mapsto \alpha.x$ lekápezés *folytonos* a $\mathbb{K}$ feletti $d_{|\cdot|}$ euklidészi metrika és az E feletti $d_{\|\cdot\|}$ metrika szorzata,

valamint $d_{\|\cdot\|}$ szerint, ami azonnal látható abból, hogy $(\alpha, x), (\alpha_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$ esetén

$$\|\alpha.x - \alpha_0.x_0\| \leq |\alpha - \alpha_0|\|x - x_0\| + |\alpha - \alpha_0|\|x_0\| + |\alpha_0|\|x - x_0\|.$$

Azonban, ha E nem nulla dimenziós, akkor ez a leképezés *nem egyenletesen folytonos* az adott metrikák szerint (**5**. gyakorlat).

6) Normált algebra bekső szorzása folytonos a szorzatnorma szerint, hiszen ha $(A, \|\cdot\|)$ normált algebra és $a, b, a_0, b_0 \in A$, akkor

$$\|ab - a_0b_0\| \leq \|a - a_0\|\|b - b_0\| + \|a - a_0\|\|b_0\| + \|a_0\|\|b - b_0\|.$$

7) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ leképezés olyan, hogy minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén, ha $x_1 \neq x_2$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$, azonban f *nem kontrakció* az euklidészi metrika szerint. Valóban, ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 > x_2$, akkor a Lagrange-középértéktétel alapján van olyan $z \in]x_2, x_1[$, amelyre $f(x_1) - f(x_2) = (Df)(z)(x_1 - x_2)$; ekkor $(Df)(z) = z/\sqrt{1 + z^2} \in]-1, 1[$ miatt $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$. Ugyanakkor minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x},$$

és természetesen

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = 1,$$

ezért nem létezhet olyan $C \in [0, 1[$ szám, amelyre minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén fennáll az $|f(x) - f(0)| \leq C|x - 0|$ egyenlőtlenség, vagyis f nem kontrakció.

8) Az $1/id_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény folytonos, sőt homeomorfimus az eukidészi altérmetrika szerint, azonban *nem egyenletesen folytonos.*

Most azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy metrikus téren létezik-e "elég sok" folytonos, valós értékű függvény?

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$ nem üres halmaz, akkor

$$dist_E : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \inf_{y \in E} d(x, y),$$

és $x \in M$ esetén a $dist_E(x) \geq 0$ valós számot az x pont E *halmaztól mért távolságának* nevezzük (a d metrika szerint).

Lemma. Legyen (M, d) metrikus tér és $E \subseteq M$ nem üres halmaz. A $dist_E : M \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül az, hogy minden $x_1, x_2 \in M$ esetén

$$|dist_E(x_1) - dist_E(x_2)| \leq d(x_1, x_2),$$

tehát $dist_E$ Lipschitz-függvény az M feletti d metrika és az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint. Fennáll továbbá az

$$\overline{E} = \{x \in M | dist_E(x) = 0\}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Ha $x_1, x_2 \in M$ és $y \in E$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$dist_E(x_1) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y),$$

tehát $dist_E(x_1) - d(x_1, x_2) \leq d(x_2, y)$, így $dist_E(x_1) - d(x_1, x_2) \leq dist_E(x_2)$, vagyis $dist_E(x_1) - dist_E(x_2) \leq d(x_1, x_2)$. Ebből az x_1 és x_2 felcserélésével $dist_E(x_2) - dist_E(x_1) \leq d(x_2, x_1)$ adódik, tehát a d szimmetriája következtében $|dist_E(x_1) - dist_E(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$ teljesül.

Az nyilvánvaló, hogy $E \subseteq \{x \in M | dist_E(x) = 0\}$, és a $dist_E$ függvény folytonossága miatt a jobb oldalon zárt halmaz áll, így $\overline{E} \subseteq \{x \in M | dist_E(x) = 0\}$. Legyen $x \in M \setminus \overline{E}$, és vegyünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $B_r(x; d) \cap E = \emptyset$. Ha $y \in E$, akkor $y \notin B_r(x; d)$, vagyis $d(x, y) \geq r$, így $dist_E(x) \geq r > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\{x \in M | dist_E(x) = 0\} \subseteq \overline{E}$ is teljesül. ■

Állítás. Metrikus térben minden zárt halmaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként, és minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, és $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$.

Ha $F \subseteq M$ nem üres zárt halmaz, akkor

$$F = \overline{F} = \{x \in M | dist_F(x) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in M | dist_F(x) < \varepsilon_n\},$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{x \in M | dist_F(x) < \varepsilon_n\}$ nyílt halmaz.

Ha $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz, akkor $M \setminus \Omega$ zárt halmaz, tehát van olyan $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega_n \subseteq M$ nyílt halmaz és $M \setminus \Omega = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$; ekkor $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (M \setminus \Omega_n)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $M \setminus \Omega_n$ zárt halmaz. ■

Tétel. (*A metrikus terek normálisságának tétele.*) Ha (M, d) metrikus tér és $F_1, F_2 \subseteq M$ olyan zárt halmazok, hogy $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, akkor léteznek olyan $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq M$ nyílt halmazok, amelyekre $F_1 \subseteq \Omega_1$, $F_2 \subseteq \Omega_2$ és $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Bizonyítás. A $dist_{F_1} + dist_{F_2} : M \to \mathbb{R}$ függvény mindenütt nullánál nagyobb értéket vesz föl, mert ha az $x \in M$ pontban az értéke nulla volna, akkor $dist_{F_1}(x) = 0 = dist_{F_2}(x)$, és az F_1, F_2 halmazok zártsága miatt $x \in F_1 \cap F_2$ teljesülne. Továbbá, a $dist_{F_1} + dist_{F_2} : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos is, így az

$$f := \frac{dist_{F_1}}{dist_{F_1} + dist_{F_2}} : M \to \mathbb{R}$$

függvény jól értelmezett és folytonos. Nyilvánvaló, hogy

$$F_1 = \{x \in M | dist_{F_1}(x) = 0\} \subseteq \{x \in M | f(x) = 0\}, \quad F_2 \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}.$$

Ezért bármely $r \in]0, 1[$ valós számra az $\Omega_1 := \{x \in M | f(x) < r\}$ és $\Omega_2 := \{x \in M | f(x) > r\}$ halmazok olyan diszjunkt nyílt halmazok M-ben, amelyekre $F_1 \subseteq \Omega_1$ és $F_2 \subseteq \Omega_2$. ■

Tétel. (*Uriszon-tétel metrikus terekre.*) Legyen (M, d) metrikus tér, $F \subseteq M$ zárt halmaz, és $\Omega \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, hogy $F \subseteq \Omega$. Ekkor létezik olyan $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre minden $x \in M$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, $F \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}$, és $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$.

Bizonyítás. Az $F \subseteq \Omega$ hipotézis szerint az F és $M \setminus \Omega$ halmazok diszjunktak és zártak, ezért az előző állítás alapján vehetünk olyan $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq M$ nyílt halmazokat, amelyekre $F \subseteq \Omega_1$, $M \setminus \Omega \subseteq \Omega_2$ és $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Ekkor az F és $M \setminus \Omega_1$ zárt halmazok diszjunktak, ezért a $dist_F + dist_{M \setminus \Omega_1} : M \to \mathbb{R}$ függvény mindenütt nullánál nagyobb értéket vesz föl. Tehát az

$$f := \frac{dist_{M \setminus \Omega_1}}{dist_F + dist_{M \setminus \Omega_1}} : M \to \mathbb{R}$$

függvény jól értelmezett és folytonos. Nyilvánvaló, hogy minden $x \in M$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, $F = \{x \in M | dist_F(x) = 0\} \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}$, valamint

$$\{x \in M | f(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in M | dist_{M \setminus \Omega_1}(x) \neq 0\} \subseteq \Omega_1 \subseteq M \setminus \Omega_2.$$

Az $M \setminus \Omega_2$ halmaz zárt, ezért $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}} \subseteq M \setminus \Omega_2$, ugyanakkor $M \setminus \Omega_2 \subseteq \Omega$, ezért $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$. ■

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér és E vektortér, akkor az $f : M \to E$ függvény *tartójának* nevezzük az $\overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$ halmazt, és ezt $supp(f)$-fel jelöljük.

Tehát ha (M, d) metrikus tér, $F \subseteq M$ zárt halmaz, és $\Omega \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, amelyre $F \subseteq \Omega$, akkor létezik olyan $f \in \mathscr{C}(M; \mathbb{R})$, hogy minden $x \in M$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, $F \subseteq \{x \in M | f(x) = 1\}$, és $supp(f) \subseteq \Omega$. Egy ilyen f függvény a (rendszerint szakadásos) χ_F karakterisztikus függvénynek folytonos "közelítése", mégpedig annál pontosabb közelítés, minél "közelebb" esik az Ω nyílt halmaz az F zárt halmazhoz.

Gyakorlatok

1. Ha (M,d), (M',d') metrikus terek és $f : M \to M'$ folytonos függvény, akkor az M minden pontjának van olyan környezete, amelynek f által létesített képe korlátos halmaz M'-ben. (Az ilyen tulajdonságú függvényeket *lokálisan korlátosaknak* nevezzük; tehát minden folytonos függvény lokálisan korlátos.)

2. Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek és $f : M \to M'$ függvény. Tegyük fel, hogy $(F_i)_{i\in I}$ az M zárt részhalmazainak olyan *lokálisan véges* rendszere (2. pont, **2**. gyakorlat), amelyre teljesül az, hogy minden $i \in I$ esetén az $f|_{F_i}$ leszűkített függvény folytonos a $d|_{F_i\times F_i}$ altérmetrika és a d' metrika szerint. Ha $M = \bigcup\limits_{i\in I} F_i$, akkor f folytonos a d és d' metrikák szerint.

(*Útmutatás.* Minden $H \subseteq M'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle H\rangle = \bigcup\limits_{i\in I} (\overset{-1}{f|_{F_i}})\langle H\rangle$, és ha H zárt, akkor a folytonosság topologikus jellemzése miatt minden $i \in I$ esetén az $(\overset{-1}{f|_{F_i}})\langle H\rangle$ halmaz zárt F_i-ben a $d|_{F_i\times F_i}$ altérmetrika szerint, így zárt M-ben a d metrika szerint is, hiszen F_i zárt d szerint. Ezért elég azt észrevenni, hogy minden $H \subseteq M'$ halmazra az $((\overset{-1}{f|_{F_i}})\langle H\rangle)_{i\in I}$ halmazrendszer lokálisan véges, továbbá fel kell használni azt, hogy zárt halmazok lokálisan véges rendszerének az uniója zárt (2. pont, **2**. gyakorlat). Ezután a folytonosság topologikus jellemzése alapján kapjuk, hogy f folytonos.)

3. Legyen M halmaz, és d, d' olyan nem ekvivalens metrikák M felett, hogy $\mathscr{T}_{d'} \subseteq \mathscr{T}_d$ (például d a diszkrét metrika M felett, és d' olyan M feletti metrika, amelyre $\mathscr{T}_{d'} \neq \mathscr{P}(M)$). Ekkor az $id_M : M \to M$ függvény bijekció, és folyonos a d és d' metrikák szerint, azonban nem folytonos a d' és d metrikák szerint, így *nem homeomorfizmus.*

4. Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek és $f : M \to M'$ függvény. Az f pontosan akkor egyenletesen folytonos a d és d' metrikák szerint, ha minden M-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra: $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} d'(f(x_n),f(y_n)) = 0$ teljesül.

(*Útmutatás.* A feltétel nyilvánvalóan szükséges; az elégségesség indirekt könnyen bizonyítható.)

5. Ha $(E,\|\cdot\|)$ nem nulla dimenziós normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a $\mathbb{K}\times E \to E$; $(\alpha,x) \mapsto \alpha.x$ leképezés *nem egyenletesen* folytonos a $d_{|\cdot|}$ és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák szorzata, és a $d_{\|\cdot\|}$ metrika szerint.

(*Útmutatás.* Jelölje f a szóbanforgó függvényt, valamint d' a $d_{|\cdot|}$ és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák szorzatát. Legyen $(\alpha,x) \in (\mathbb{K}\setminus\{0\})\times(E\setminus\{0\})$ rögzített pont, és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra értelmezzük az $X_n := (\varepsilon_n^{-1}\alpha, \varepsilon_n^{-1}.x)$ és $Y_n := ((\varepsilon_n^{-1}+\varepsilon_n)\alpha, (\varepsilon_n^{-1}+\varepsilon_n).x)$ pontokat. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d'(X_n,Y_n) = \varepsilon_n \max(|\alpha|,\|x\|), \quad d_{\|\cdot\|}(f(X_n),f(Y_n)) = (2+\varepsilon_n^2)|\alpha|\|x\|,$$

amiből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} d'(X_n,Y_n) = 0$, azonban $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\|\cdot\|}(f(X_n),f(Y_n)) = 2|\alpha|\|x\| \neq 0$, így a **4**. gyakorlat szerint f nem egyenletesen folytonos a d' és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint.)

6. Legyen E vektorér $\mathbb{K}$ felett. Egy $C \subseteq E$ halmazt *konvexnek* nevezünk, ha minden $x, y \in C$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén $(1-\alpha).x + \alpha.y \in C$ teljesül. Azt mondjuk, hogy az $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ leképezés *konvex függvény*, ha $Dom(f) \subseteq E$ konvex halmaz, és minden $x, x' \in C$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén $f((1-\alpha).x + \alpha.x') \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x')$ teljesül.

Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, amelyre $Dom(f)$ nem üres nyílt konvex halmaz. Az f függvény pontosan akkor folytonos, ha létezik olyan $U \subseteq Dom(f)$ nem üres nyílt halmaz, amelyre $f\langle U\rangle \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz.

(*Útmutatás.* A feltétel szükséges, mert folytonos függvény lokálisan korlátos (**1**. gyakorlat). Az elégségesség bizonyításához legyen $U \subseteq Dom(f)$ olyan nem üres nyílt halmaz és $C \in \mathbb{R}$ olyan szám, hogy minden $x \in U$ esetén $f(x) \leq C$.

Először megmutatjuk, hogy f az U minden pontjában folytonos. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in U$ rögzített, és vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; d) \subseteq U$ (ahol d-vel jelöltük a $\|\cdot\|$ által generált E feletti metrikát). Ha $x \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor $\mathfrak{e} := (x - \mathfrak{a})/\|x - \mathfrak{a}\|$ olyan vektor, hogy a $t := \|x - \mathfrak{a}\|/r \in]0,1]$ valós számra $x = (1-t).\mathfrak{a} + t.(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e})$ teljesül, továbbá a $t' := \|x - \mathfrak{a}\|/(\|x - \mathfrak{a}\| + r) \in]0,1[$ valós számra $\mathfrak{a} = (1-t')x + t'.(\mathfrak{a} - r.\mathfrak{e})$ teljesül, ezért $\mathfrak{a} \pm r.\mathfrak{e} \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)$, a $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; d)$ gömb konvexitása, valamint az f függvény konvexitása miatt felírhatjuk a következő egyenőtlenségeket:

$$f(x) \leq (1-t)f(\mathfrak{a}) + tf(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}) \leq f(\mathfrak{a}) + \left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|,$$

továbbá

$$f(\mathfrak{a}) \leq (1-t')f(x) + t'f(\mathfrak{a} - r.\mathfrak{e}) \leq f(x) + \left(\frac{C - f(x)}{\|x - \mathfrak{a}\| + r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből átrendezéssel nyerjük, hogy minden $x \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; d) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ vektorra

$$-\left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\| \leq f(x) - f(\mathfrak{a}) \leq \left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|,$$

vagyis

$$|f(x) - f(\mathfrak{a})| \leq \left(\frac{C - f(\mathfrak{a})}{r}\right)\|x - \mathfrak{a}\|.$$

Ebből nyilvánvalóan következik, hogy f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Megmutatjuk, hogy minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontnak van olyan $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete, amelyre $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ebből az előzőek alapján következik, hogy f a $Dom(f)$ minden pontjában folytonos.

Legyen tehát $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és rögzítsünk egy $\mathfrak{c} \in U$ pontot. Az $\mathbb{R} \to E$; $t \mapsto \mathfrak{c} + t.(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})$ függvény folytonos, és az 1-hez $\mathfrak{a}$-t rendeli, továbbá $Dom(f)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, ezért van olyan $\rho > 1$ valós szám, hogy $\mathfrak{c} + \rho(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) \in Dom(f)$. Legyen ρ ilyen szám, és $x_\rho := \mathfrak{c} + \rho.(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})$. A

$$g : E \to E; \quad x \mapsto \frac{1}{\rho}.x_\rho + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right).x$$

függvény *homeomorfizmus* és $g(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$, ezért $g\langle U\rangle$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak. Megmutatjuk, hogy f a $g\langle U\rangle$ halmazon felülről korlátos. Valóban, ha $y \in g\langle U\rangle$, akkor van olyan $x \in U$, hogy $y = g(x) := \rho^{-1}.x_\rho + (1-\rho^{-1}).x$; ekkor $\rho > 1$, valamint $x_\rho, x \in Dom(f)$ és $Dom(f)$ konvexitása miatt $y \in Dom(f)$, ezért az f konvexitásából következik, hogy

$$f(y) \leq \frac{1}{\rho} f(x_\rho) + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) f(x) \leq \frac{1}{\rho} f(x_\rho) + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) C$$

teljesül, vagyis a $\rho^{-1} f(x_\rho) + (1-\rho^{-1})C$ szám felső korlátja f-nek a $g\langle U\rangle$ halmazon.)

7. Legyen E valós vektortér, $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, és tegyük fel, hogy $Dom(f)$ konvex halmaz E-ben (**6**. gyakorlat). Az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra és minden $(x_k)_{k\in n}$ $Dom(f)$-ben haladó rendszerre és minden $(\alpha_k)_{k\in n}$ $[0,1]$-ben haladó rendszerre, ha $\sum_{k\in n} \alpha_k = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{k\in n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k\in n} \alpha_k f(x_k).$$

(*Útmutatás.* Kövessük az $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyítását (III. fejezet, 2. pont).)

8. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, amelyre $Dom(f)$ nyílt halmaz (bármely $\mathbb{R}^n$ feletti norma által generált metrika szerint), akkor f folytonos (bármely $\mathbb{R}^n$ feletti norma által generált metrika szerint).

(*Útmutatás.* Természetesen feltehető, hogy f nem az üres függvény. A **6**. gyakorlat szerint elég azt megmutatni, hogy létezik olyan $U \subseteq Dom(f)$ nem üres nyílt halmaz, amelyen f felülről korlátos.

Legyen $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_k)_{k\in n} \in Dom(f)$ rögzített pont, és $r > 0$ olyan valós szám, amelyre $V := \prod_{k\in n} [\mathfrak{a}_k - r, \mathfrak{a}_k + r] \subseteq Dom(f)$. Legyen $U := \prod_{k\in n} \left]\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k + \frac{r}{n}\right[$; ekkor U nem üres nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, és $U \subseteq V \subseteq Dom(f)$. Megmutatjuk, hogy f felülről korlátos az U halmazon.

Jelölje $(\mathfrak{e}_k)_{k\in n}$ a kanonikus bázist $\mathbb{R}^n$-ben, és legyen $x \in U$ tetszőleges. Ekkor

$$x = \sum_{k\in n} \left(\frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r}\right).(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k) + \left(1 - \sum_{k\in n} \left(\frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r}\right)\right).\mathfrak{a},$$

továbbá minden $k \in n$ esetén $\mathfrak{a}_k < x_k < \mathfrak{a}_k + \frac{r}{n}$, tehát

$$0 < \frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r} < \frac{1}{n} \leq 1,$$

következésképpen

$$0 < \sum_{k\in n} \left(\frac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r}\right) < n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Legyen $k \in n+1$ esetén

$$\alpha_k := \begin{cases} \dfrac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r} & \text{, ha } k < n \\ 1 - \sum\limits_{k \in n} \left(\dfrac{x_k - \mathfrak{a}_k}{r} \right) & \text{, ha } k = n. \end{cases}$$

Ekkor minden $k \in n+1$ esetén $\alpha_k \in [0,1]$ és $\sum\limits_{k \in n+1} \alpha_k = 1$. A V definíciója szerint $k \in n$ esetén $\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k \in V \subseteq Dom(f)$, ezért az f konvexitása és a **6**. gyakorlat szerint

$$f(x) = f\left(\sum_{k \in n} \alpha_k.(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k) + \alpha_n.\mathfrak{a} \right) \leq \sum_{k \in n} \alpha_k f(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k) + \alpha_n f(\mathfrak{a}) \leq C,$$

ahol

$$C := \sum_{k \in n} |f(\mathfrak{a} + r.\mathfrak{e}_k)| + |f(\mathfrak{a})|.$$

Tehát a C szám f-nek felső korlátja az U halmazon.)

9. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $f : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan *folytonos* függvény, amelyre $Dom(f)$ konvex halmaz. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $x, x' \in Dom(f)$ esetén

$$f\left(\frac{x + x'}{2} \right) \leq \frac{f(x) + f(x')}{2}$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Legyen $x, x' \in Dom(f)$ és

$$A := \{\alpha \in [0,1] \mid f((1-\alpha).x + \alpha.x') \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x')\};$$

azt kell igazolni, hogy $A = [0,1]$. Az f folytonosságából következik, hogy A zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben, és a hipotézis alapján $1/2 \in A$. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $k \leq 2^n$, akkor $k/2^n \in A$. Ebből következik, hogy

$$D := \left\{ \frac{k}{2^n} \mid (n \in \mathbb{N}^+) \wedge (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \leq 2^n) \right\} \subseteq A,$$

ugyanakkor D sűrű $[0,1]$-ben az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika szerint, ezért az f folytonossága miatt $A = [0,1]$.)

10. Ha (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ nem üres kompakt halmaz, $F \subseteq M$ nem üres zárt halmaz, és $K \cap F = \emptyset$, akkor

$$\inf_{(x,y) \in K \times F} d(x,y) > 0.$$

Azonban létezik olyan (M, d) metrikus tér, és léteznek olyan $F_1, F_2 \subseteq M$ nem üres zárt halmazok, hogy $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, de

$$\inf_{(x,y) \in F_1 \times F_2} d(x,y) = 0.$$

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy $\inf\limits_{(x,y)\in K\times F} d(x,y) = 0$. Ekkor kiválasztható olyan $K \times F$-ben haladó $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, és a K kompaktsága, valamint a Bolzano-Weierstrass tétel alapján, alkalmas részsorozatra áttérve feltehető, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál egy $x \in K$ ponthoz. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n)$, ezért az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergál x-hez. Az F zártsága miatt $x \in F$, tehát $x \in K \cap F$.

Az euklidészi metrika szerint $F_1 := \{n \in \mathbb{N} | n > 2\}$ és $F_2 := \{n + n^{-1} | n \in \mathbb{N}^+\}$ nem üres diszjunkt zárt halmazok $\mathbb{R}$-ben, de $\inf\limits_{(x,y)\in F_1\times F_2} |x - y| = 0$.)

8. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

Tétel. Ha (M,d), (M',d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $K \subseteq Dom(f)$ kompakt halmazra $f\langle K\rangle \subseteq M'$ kompakt halmaz.

Bizonyítás. Legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ az M' nyílt részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $f\langle K\rangle \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega'_i$. Ekkor $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$, és a folytonosság topologikus jellemzésének következménye alapján minden $i \in I$ esetén az $\overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$ halmazhoz létezik olyan $G_i \subseteq M$ nyílt halmaz, amelyre $G_i \cap Dom(f) = \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$. Legyen $(G_i)_{i\in I}$ ilyen halmazrendszer; ekkor $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, tehát vehetünk olyan $J \subseteq I$ véges halmazt, amelyre $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} G_i$. Világos, hogy

$$f\langle K\rangle \subseteq \bigcup_{i\in J} f\langle G_i\rangle = \bigcup_{i\in J} f\langle G_i \cap Dom(f)\rangle = \bigcup_{i\in J} f\langle \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle\rangle \subseteq \bigcup_{i\in J} \Omega'_i$$

teljesül, ezért $f\langle K\rangle$ kompakt halmaz. ■

Tehát ha (M,d), (M',d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $K \subseteq Dom(f)$ *kompakt* halmazra $f\langle K\rangle \subseteq M'$ *korlátos* és *zárt* halmaz M'-ben, mert minden kompakt halmaz korlátos és zárt. Speciálisan, ha (M,d) kompakt metrikus tér és (M',d') metrikus tér, akkor $\mathscr{C}(M;M') = \mathscr{C}^b(M;M')$. Azonban korlátos (illetve zárt) halmaz folytonos függvény által létesített képe nem szükségképpen korlátos (illetve zárt).

Következmény. Ha (M,d) kompakt metrikus tér, és (M',d') metrikus tér, akkor minden $M \to M'$ folytonos bijekció homeomorfizmus.

Bizonyítás. Ha $f : M \to M'$ folytonos bijekció, akkor a folytonosság topologikus jellemzése alapján az $f^{-1} : M' \to M$ inverzfüggvény folytonossága azzal ekvivalens, hogy minden $F \subseteq M$ zárt halmazra az $(\overset{-1}{f^{-1}})\langle F\rangle = f\langle F\rangle \subseteq M'$ halmaz zárt. Az (M,d) kompaktsága miatt minden $F \subseteq M$ zárt halmaz kompakt, így az előző tétel szerint $f\langle F\rangle$ kompakt M'-ben, ezért zárt is. ■

Tétel. (*Weierstrass-féle maximum-minimum elv.*) Ha (M,d) metrikus tér és $f : M \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $K \subseteq Dom(f)$ nem üres kompakt halmazhoz léteznek olyan $\mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_- \in K$ pontok, amelyekre minden $x \in K$ esetén $f(x) \leq f(\mathfrak{a}_+)$ és $f(x) \geq f(\mathfrak{a}_-)$ (vagyis $\mathfrak{a}_+$-ban *maximuma* és $\mathfrak{a}_-$-ban *minimuma* van f-nek a K halmazon).

Bizonyítás. Az $f\langle K\rangle \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem üres és kompakt, ezért zárt is $\mathbb{R}$-ben, így $sup(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle} = f\langle K\rangle$, és hasonlóan $inf(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle} = f\langle K\rangle$. Ez éppen olyan $\mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_- \in K$ pontok létezését jelenti, amelyekre minden $x \in K$ esetén $f(x) \leq sup(f\langle K\rangle) = f(\mathfrak{a}_+)$ és $f(x) \geq inf(f\langle K\rangle) = f(\mathfrak{a}_-)$. ■

Következmény. Ha (M, d) metrikus tér és $K \subseteq M$ nem üres kompakt halmaz, akkor minden $x \in M$ ponthoz létezik olyan $y \in K$, amelyre $d(x, y) = dist_K(x)$ (vagyis y az x-hez legközelebbi pont K-ban).

Bizonyítás. Ha $x \in M$, akkor a $d(x, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ parciális függvény folytonos, tehát a Weierstrass-féle minimum-elv alapján létezik olyan $y \in K$, amelyre minden $y' \in K$ esetén $d(x, y) \leq d(x, y')$, így $d(x, y) = dist_K(x)$. ■

Tétel. Véges dimenziós normált térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Bizonyítás. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $n \in \mathbb{N}$ olyan szám (az E algebrai dimenziója), amelyhez létezik $u : \mathbb{K}^n \to E$ lineáris bijekció. Legyen K korlátos és zárt halmaz E-ben a $d_{\|\cdot\|}$ metrika szerint, és $\|\cdot\|_u := \|\cdot\| \circ u$. Ekkor $\|\cdot\|_u$ norma $\mathbb{K}^n$ felett, és az u függvény izometria a $(\mathbb{K}^n, d_{\|\cdot\|_u})$ és $(E, d_{\|\cdot\|})$ metrikus terek között. Ezért $\overset{-1}{u}\langle K\rangle$ a $\mathbb{K}^n$-ben korlátos és zárt halmaz a $d_{\|\cdot\|_u}$ metrika szerint. A $\mathbb{K}^n$ felett bármely két norma ekvivalens, ezért $\|\cdot\|_u$ és $\|\cdot\|_\infty$ is ekvivalensek. Ebből következik, hogy az $\overset{-1}{u}\langle K\rangle$ korlátos és zárt a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ metrika szerint is. Korábban igazoltuk, hogy $\mathbb{K}^n$-ben egy halmaz a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ metrika szerint pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Ezért $\overset{-1}{u}\langle K\rangle$ kompakt $d_{\|\cdot\|_\infty}$ szerint, így $d_{\|\cdot\|_u}$ szerint is kompakt. Az u leképezés izometria a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint, ezért folytonos is, és a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ és $d_{\|\cdot\|_u}$ metrikák ekvivalensek, így u folytonos a $d_{\|\cdot\|_\infty}$ és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint. Ezért a $K = u\langle \overset{-1}{u}\langle K\rangle\rangle$ halmaz kompakt E-ben $d_{\|\cdot\|}$ szerint. ■

Most bebizonyítjuk az algebra alaptelét, tehát azt, hogy minden legalább elsőfokú komplex polinomnak létezik komplex gyöke. Ezt előkészítjük három állítással, amelyek közül az első valójában az algebra alaptételének egy speciális esete.

Lemma. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $w \in \mathbb{C}$ számhoz létezik olyan $z \in \mathbb{C}$, amelyre $z^n = w$.

Bizonyítás. A $w \in \mathbb{C}$ számoz léteznek olyan $r \in \mathbb{R}_+$ és $\theta \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre $w = r \cdot Exp(i\theta)$ (III. fejezet, 1. pont, **12**. gyakorlat), ezért $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az Exp függvényre vonatkozó nevezetes egyenlőség alapján $z := \sqrt[n]{r} \cdot Exp(i\theta/n) \in \mathbb{C}$ olyan szám, amelyre $z^n = w$ teljesül. ■

A következő állításra rendszerint úgy hivatkozunk, mint *a polinomiális függvények átrendezésének tétele.*

Lemma. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $(\boldsymbol{a}_k)_{0 \leq k \leq n}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, és $c \in \mathbb{K}$. Minden $c' \in \mathbb{K}$ ponthoz (egyértelműen) létezik olyan $\mathbb{K}$-ban haladó $(\boldsymbol{a}'_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer, amelyre

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}_k (id_{\mathbb{K}} - c)^k = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}'_k (id_{\mathbb{K}} - c')^k$$

teljesül, és itt fennáll az $\boldsymbol{a}'_n = \boldsymbol{a}_n$ egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $c' \in \mathbb{K}$ rögzített. Ha $z \in \mathbb{K}$, akkor a $\mathbb{K}$ testre alkalmazva a binomiális tételt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}_k (z-c)^k = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}_k ((z-c') + (c'-c))^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \boldsymbol{a}_k (z-c')^j (c'-c)^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \boldsymbol{a}_k (c'-c)^{k-j} \right) (z-c')^j,$$

tehát ha minden $j \leq n$ természetes számra

$$\boldsymbol{a}'_j := \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \boldsymbol{a}_k (c'-c)^{k-j},$$

akkor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}_k (z-c)^k = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{a}'_k (z-c')^j$$

teljesül, és az is látható, hogy $\boldsymbol{a}'_n = \boldsymbol{a}_n$. ■

Állítás. Legyen $(E_1, \|\cdot\|_1)$ véges dimenziós normált tér, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, és $f : E_1 \to E_2$ olyan függvény, amelyre teljesülnek a következők:

a) f folytonos;

b) létezik olyan $C > \inf\limits_{x \in E_1} \|f(x)\|_2$ valós szám és olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in E_1$ vektorra, ha $\|x\|_1 > r$, akkor $\|f(x)\|_2 > C$;

c) az $Im(\|f(\cdot)\|) \setminus \{0\}$ halmaznak nincs legkisebb eleme, vagyis

$$(\forall \mathfrak{a} \in E_1)(\ (\|f(\mathfrak{a})\|_2 > 0) \Rightarrow ((\exists x \in E_1) : \|f(x)\|_2 < \|f(\mathfrak{a})\|_2)\ ).$$

Ekkor létezik olyan $\mathfrak{a} \in E_1$, hogy $f(\mathfrak{a}) = 0$ (vagyis f-nek létezik *gyöke*).

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \inf\limits_{x \in E_1} \|f(x)\|_2$, és a b) alapján vegyünk olyan $C > \alpha$, valamint $r > 0$ valós számot, amelyekre minden $x \in E_1 \setminus \overline{B}_r(0, d_{\|\cdot\|_1})$ esetén $\|f(x)\|_2 > C$. Legyen $\alpha_r := \inf\limits_{x \in \overline{B}_r(0, d_{\|\cdot\|_1})} \|f(x)\|_2$; megmutatjuk, hogy $\alpha_r = \alpha$. Valóban, $\alpha < C$ és az α definíciója szerint van olyan $x \in E_1$, hogy $\|f(x)\|_2 < C$; ekkor szükségképpen $\|x\|_1 \leq r$, tehát $\alpha_r \leq \|f(x)\|_2 < C$. Ha most $x \in E_1$ tetszőleges, akkor $\|x\|_1 \leq r$ esetén $\alpha_r \leq \|f(x)\|_2$, míg $\|x\|_1 > r$ esetén $\|f(x)\|_2 > C > \alpha_r$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in E_1$ esetén $\alpha_r \leq \|f(x)\|_2$, tehát $\alpha_r \leq \alpha$, így $\alpha_r = \alpha$.

Az E_1 véges dimenziós, ezért $\overline{B}_r(0, d_{\|\cdot\|_1})$ kompakt halmaz, így az a) és a Weierstrass-féle minimum-elv szerint létezik olyan $\mathfrak{a} \in \overline{B}_r(0, d_{\|\cdot\|_1})$ pont, amelyre $\|f(\mathfrak{a})\|_2 = \inf\limits_{x \in \overline{B}_r(0, d_{\|\cdot\|_1})} \|f(x)\|_2 = \alpha$. Ekkor az $\mathfrak{a}$ pontban $\|f(\cdot)\|_2$-nek minimuma van, ezért a c) miatt $f(\mathfrak{a}) = 0$. ■

Tétel. (*Az algebra alaptétele.*) Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak létezik komplex gyöke.

Bizonyítás. Az előző állítást fogjuk alkalmazni abban a speciális esetben, amikor $(E_1, \|\cdot\|_1) := (E_2, \|\cdot\|_2) := (\mathbb{C}, |\cdot|)$ és $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinomiális függvény, tehát léteznek olyan $n \in \mathbb{N}^+$, $c \in \mathbb{C}$ és $(\boldsymbol{a}_k)_{0\le k\le n}$ rendszer $\mathbb{C}$-ben, hogy $\boldsymbol{a}_n \neq 0$, és

$$f = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}_k (id_{\mathbb{C}} - c)^k.$$

Elegendő az előző állításban megfogalmazott a), b) és c) feltételek teljesülését ellenőrizni f-re. Az f nyilvánvalóan folytonos, tehát elég b)-vel és c)-vel foglalkozni.

Valójában a következő, b)-nél erősebb állítást fogjuk igazolni: *minden* $C > 0$ valós számhoz létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre minden $z \in \mathbb{C}$ elemre, ha $|z| > r$, akkor $|f(z)| > C$. Ehhez először megjegyezzük, hogy minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ pontra

$$f(z) = \boldsymbol{a}_n (z-c)^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{a}_n} (z-c)^{k-n}\right),$$

amiből következik, hogy

$$|f(z)| = |\boldsymbol{a}_n||z-c|^n \left|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{a}_n} (z-c)^{k-n}\right| \ge$$

$$|\boldsymbol{a}_n||z-c|^n \left(1 - \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{a}_n} (z-c)^{k-n}\right|\right) \ge |\boldsymbol{a}_n||z-c|^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{a}_n}\right| |z-c|^{k-n}\right).$$

Ebből látható, hogy ha $z \in \mathbb{C}$ és $q \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $|z-c| > 1/q$, akkor

$$|f(z)| > |\boldsymbol{a}_n||z-c|^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{a}_n}\right| q^{k-n}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{q\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{a}_n}\right| q^{n-k} = 0,$$

ezért rögzíthetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy minden $q \in]0, \delta[$ valós számra

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{\boldsymbol{a}_k}{\boldsymbol{a}_n}\right| q^{n-k} < \frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy ha $q \in]0, \delta[$ és $|z-c| > 1/q$, akkor $|f(z)| > (1/2)|\boldsymbol{a}_n||z-c|^n$. Legyen most $C > 0$ tetszőleges valós szám, és rögzítsünk egy $q \in]0, \min(1/C, \delta)[$ valós számot, valamint értelmezzük az

$$R := \max\left(\frac{1}{q}, \sqrt[n]{\frac{2C}{|\boldsymbol{a}_n|}}\right)$$

számot. Ekkor $|z-c| > R$ esetén az előzőek alapján $|f(z)| > C$. Ezért ha r olyan valós szám, amelyre $r > |c| + R$, akkor minden $z \in \mathbb{C}$ pontra, $|z| > r$ esetén $|z-c| > R$, így $|f(z)| > C$.

Most a következő, c)-nél erősebb kijelentést igazoljuk: az $|f(\cdot)| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\{z \in \mathbb{C} | f(z) \neq 0\}$ halmaz egyetlen pontjában sincs lokális minimuma; vagyis minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ pontra, ha $f(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor a $\mathfrak{a}$-nak minden környezetében van olyan z pont, amelyre $|f(z)| < |f(\mathfrak{a})|$. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelyre $f(\mathfrak{a}) \neq 0$, és $r > 0$ tetszőleges valós szám; belátjuk, hogy létezik $z \in B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$, amelyre $|f(z)| < |f(\mathfrak{a})|$.

A polinomiális függvények átrendezési tétele alapján $\mathfrak{a}$-hoz egyértelműen létezik olyan $(\boldsymbol{a}'_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer $\mathbb{C}$-ben, hogy

$$f = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}'_k (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k,$$

és $\boldsymbol{a}'_n = \boldsymbol{a}_n \neq 0$. Ugyanakkor $n > 0$, hiszen az f polinomiális függvény legalább elsőfokú, így van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $0 < k \leq n$ és $\boldsymbol{a}'_k \neq 0$. Legyen

$$m := \min\{k \in \mathbb{N} | (0 < k \leq n) \wedge (\boldsymbol{a}'_k \neq 0)\}.$$

Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$ pontra

$$f(z) = \boldsymbol{a}'_0 + \sum_{k=m}^{n} \boldsymbol{a}'_k (z-\mathfrak{a})^k = \boldsymbol{a}'_0 \left(1 + \frac{\boldsymbol{a}'_m}{\boldsymbol{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m \sum_{k=m}^{n} \frac{\boldsymbol{a}'_k}{\boldsymbol{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^{k-m}\right) =$$
$$= f(\mathfrak{a}) \left(1 + \frac{\boldsymbol{a}'_m}{\boldsymbol{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m (1 + g(z))\right),$$

ahol definíció szerint:

$$g(z) := \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\boldsymbol{a}'_k}{\boldsymbol{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^{k-m},$$

ha $m < n$, míg $m = n$ esetén $g(z) := 0$. Ebből látható, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ pontra

$$|f(z)| \leq |f(\mathfrak{a})| \left(\left|1 + \frac{\boldsymbol{a}'_m}{\boldsymbol{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m\right| + \left|\frac{\boldsymbol{a}'_m}{\boldsymbol{a}'_0}(z-\mathfrak{a})^m\right| |g(z)|\right).$$

Világos, hogy $\lim_{z \to \mathfrak{a}} g(z) = g(\mathfrak{a}) = 0$, ezért van olyan $r_g > 0$ valós szám, amelyre minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $|z - \mathfrak{a}| < r_g$, akkor $|g(z)| < 1/2$. Most az $r > 0$ valós számhoz válasszunk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre

$$\delta < \min\left(1, r_g \sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}'_m|}{|\boldsymbol{a}'_0|}}, r \sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}'_m|}{|\boldsymbol{a}'_0|}}\right).$$

Legyen továbbá $z_\delta \in \mathbb{C}$ olyan szám, amelyre teljesül a

$$z_\delta^m = -\delta^m \frac{\boldsymbol{a}'_0}{\boldsymbol{a}'_m}$$

egyenlőség. Ekkor a $z := \mathfrak{a} + z_\delta$ számra

$$|z - \mathfrak{a}| = |z_\delta| = \delta \sqrt[m]{\frac{|\boldsymbol{a}'_0|}{|\boldsymbol{a}'_m|}} < \min(r, r_g),$$

tehát $z \in B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ és $|g(z)| < 1/2$; továbbá

$$\frac{\boldsymbol{a}'_m}{\boldsymbol{a}'_0}(z - \mathfrak{a})^m = \frac{\boldsymbol{a}'_m}{\boldsymbol{a}'_0} z_\delta^m = -\delta^m,$$

így $\delta < 1$ miatt

$$\left|1 + \frac{\boldsymbol{a}'_m}{\boldsymbol{a}'_0}(z - \mathfrak{a})^m\right| = 1 - \delta^m$$

is teljesül. Ebből látható, hogy

$$|f(z)| < |f(\mathfrak{a})| \left(1 - \delta^m + \delta^m \frac{1}{2}\right) = |f(\mathfrak{a})| \left(1 - \frac{1}{2}\delta^m\right) < |f(\mathfrak{a})|,$$

tehát az f függvénynek $\mathfrak{a}$-ban nincs lokális minimuma. Ezért f-re az előző állítás c) feltétele is teljesül. ■

Tétel. (*Heine-tétel.*) Ha (M, d), (M', d') metrikus terek, $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény és $Dom(f)$ kompakt halmaz, akkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Az állítás igaz, ha $Dom(f) = \emptyset$ (vagyis f az üres függvény), ezért feltesszük, hogy $Dom(f) \neq \emptyset$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.

Az f minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontban folytonos, ezért kiválasztható olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\delta_\mathfrak{a})_{\mathfrak{a} \in Dom(f)}$ rendszer, amelyre minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ esetén $f\langle B_{\delta_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}; d)\rangle \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(\mathfrak{a}); d')$. Ekkor a $(B_{\delta_\mathfrak{a}/2}(\mathfrak{a}; d))_{\mathfrak{a} \in Dom(f)}$ halmazrendszer nyílvánvalóan nyílt befedése $Dom(f)$-nek, ezért $Dom(f)$ kompaktsága miatt vehetünk olyan $H \subseteq Dom(f)$ véges halmazt, amelyre

$$Dom(f) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a} \in H} B_{\delta_\mathfrak{a}/2}(\mathfrak{a}; d).$$

A $Dom(f) \neq \emptyset$ feltétel miatt $H \neq \emptyset$, így képezhető a $\delta := \min\limits_{\mathfrak{a} \in H} \delta_\mathfrak{a}/2$ valós szám.

Legyenek $x_1, x_2 \in Dom(f)$ olyan pontok, amelyekre $d(x_1, x_2) < \delta$. Ekkor x_1-hez van olyan $\mathfrak{a} \in H$, amelyre $d(x_1, \mathfrak{a}) < \delta_\mathfrak{a}/2$, ugyanakkor $d(x_2, x_1) < \delta \leq \delta_\mathfrak{a}/2$, tehát $d(x_2, \mathfrak{a}) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, \mathfrak{a}) < \delta_\mathfrak{a}$. Ezért $x_1, x_2 \in B_{\delta_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}; d)$, így $d'(f(x_1), f(\mathfrak{a})) < \varepsilon/2$ és $d'(f(x_2), f(\mathfrak{a})) < \varepsilon/2$. Ebből következik, hogy $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, tehát f egyenletesen folytonos. ■

Definíció. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $f : [a, b] \to F$ függvény *n-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük, és $B_n f$-fel jelöljük azt az $\mathbb{R} \to F$ függvényt, amelyre minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$(B_n f)(t) := \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k (b-t)^{n-k}.$$

Állítás. (*Approximáció Bernstein-polinomokkal.*) Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, és legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér. Ha $f : [a, b] \to F$ folytonos függvény, akkor fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \|(B_n f)(t) - f(t)\| \right) = 0$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Először legyen $f : [a, b] \to F$ tetszőleges függvény. Ha $t \in [a, b]$, akkor a binomiális tétel alapján

$$(B_n f)(t) - f(t) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k (b-t)^{n-k} -$$

$$- \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(t)(t-a)^k (b-t)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right)(t-a)^k (b-t)^{n-k},$$

tehát teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\|(B_n f)(t) - f(t)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| (t-a)^k (b-t)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.$$

Tegyük fel, hogy f folytonos, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A Heine-tétel alapján f egyenletesen folytonos, ezért vehetünk olyan $\delta > 0$ valós számot, amelyre minden $t, t' \in [a, b]$ esetén, ha $|t - t'| < \delta$, akkor $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon/2$. Legyen minden $t \in [a, b]$ pontra és $n \in \mathbb{N}^+$ számra:

$$H_{n,\delta}(t) := \left\{ k \in \mathbb{N} \middle| \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| < \delta,\ k \leq n \right\},$$

$$H'_{n,\delta}(t) := \left\{ k \in \mathbb{N} \middle| \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta,\ k \leq n \right\}.$$

Kompakt halmazon folytonos függvény korlátos, ezért f korlátos is. Legyen $C > 0$ olyan valós szám, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| \leq C$. Ekkor minden $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$$\|(B_n f)(t) - f(t)\| \leq$$

$$\leq \sum_{k\in H_{n,\delta}(t)} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k\in H'_{n,\delta}(t)} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in H_{n,\delta}(t)}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}+2C\sum_{k\in H'_{n,\delta}(t)}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}+2C\sum_{k\in H'_{n,\delta}(t)}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+2C\sum_{k\in H'_{n,\delta}(t)}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}.$$

Könnyen látható, hogy ha $t\in[a,b]$ és $n\in\mathbb{N}^+$, akkor minden $k\in H'_{n,\delta}(t)$ számra (a definíció szerint) $(k-nx(t))^2\geq\delta^2n^2/(b-a)^2$, ahol $x(t):=(t-a)/(b-a)$, tehát fennáll az

$$1\leq\frac{(b-a)^2}{\delta^2n^2}(k-nx(t))^2$$

egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy minden $t\in[a,b]$ és $n\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$\|(B_nf)(t)-f(t)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+2C\sum_{k\in H'_{n,\delta}(t)}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx(t))^2x(t)^k(1-x(t))^{n-k}.$$

Most pontosan meghatározzuk tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ és $n\in\mathbb{N}^+$ számra a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}$$

összeg értékét. Ehhez vezessük be a $Q:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ (x,y)\mapsto(x+y)^n$ függvényt. Ekkor minden $y\in\mathbb{R}$ számra a binomiális tétel alapján teljesül, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ számra

$$nx(x+y)^{n-1}=x(DQ(\cdot,y))(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^ky^{n-k},$$

amiből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k}=nx.$$

Továbbá, rögzített $y\in\mathbb{R}$ számra minden $x\in\mathbb{R}$ esetén, ha $n>1$, akkor fennáll az

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=x^2(D^2Q(\cdot,y))(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^ky^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^ky^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^ky^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^ky^{n-k}-nx(x+y)^{n-1}$$

egyenlőség, ezért

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx.$$

Tehát minden $t \in [a,b]$ pontra és $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ számra

$$\|(B_n f)(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nx(t))^2 x(t)^k (1-x(t))^{n-k} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \left(n(n-1)x(t)^2 + nx(t) - 2n^2 x(t)^2 + n^2 x(t)^2\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n} x(t)(1-x(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2}\frac{1}{n}.$$

Ha $N \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy

$$2C\frac{(b-a)^2}{\delta^2}\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor minden $t \in [a,b]$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $\|(B_n f)(t) - f(t)\| < \varepsilon$ teljesül. Tehát minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t \in [a,b]} \|(B_n f)(t) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\left(\sup_{t \in [a,b]} \|(B_n f)(t) - f(t)\|\right)_{n \in \mathbb{N}^+}$ számsorozat zérussorozat. ■

Gyakorlatok

1. Legyen (M, d) metrikus tér, $K \subseteq M$ nem üres kompakt halmaz, $F \subseteq M$ nem üres zárt halmaz, és tegyük fel, hogy $K \cap F = \emptyset$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, amelyre $\{x \in M | dist_K(x) < \varepsilon\}$ és $\{x \in M | dist_F(x) < \varepsilon\}$ *diszjunkt* halmazok.

(*Útmutatás.* Értelmezzük a következő függvényt

$$K \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto dist_F(x).$$

Ez folytonos $M \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $K \neq \emptyset$ kompakt, így a Weierstrass-féle minimumelv alapján van olyan $x_0 \in K$, amelyben e függvénynek minimuma van, vagyis minden $x \in K$ esetén $dist_F(x_0) \leq dist_F(x)$. Tehát ha $x \in K$ és $y \in F$, akkor $dist_F(x_0) \leq d(x, y)$ teljesül. Ugyanakkor $dist_F(x_0) > 0$, különben az F zártsága folytán $x_0 \in \overline{F} = F$ teljesülne és $x_0 \in K$, holott $K \cap F = \emptyset$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $2\varepsilon \leq dist_F(x_0)$, akkor az $\{x \in M | dist_K(x) < \varepsilon\}$ és $\{x \in M | dist_F(x) < \varepsilon\}$ halmazok nem metszik egymást, hiszen ha z közös pontjuk volna, akkor létezne olyan $x \in K$, hogy $d(z, x) < \varepsilon$ és létezne olyan $y \in F$, hogy $d(z, y) < \varepsilon$, tehát ekkor $d(x, y) < 2\varepsilon \leq dist_F(x_0)$, ami lehetetlen.)

2. Ha (M, d) ultrametrikus tér, akkor minden $x \in M$ pontra a $d(\cdot, x) : M \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete olyan *megszámlálható* részhalmaza $\mathbb{R}_+$-nak, amelynek a 0 kivételével minden pontja *izolált pont*, vagyis a $\{d(x', x) | x' \in M \setminus \{x\}\}$ halmaz diszkrét $\mathbb{R}$-ben.

3. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényt *alulról* (illetve *felülről*) *félig folytonosnak* nevezzük, ha minden $\mathbb{R} \ni x$-re az $\{x \in M | f(x) > c\}$ (illetve $\{x \in M | f(x) < c\}$) halmaz nyílt.

a) Egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvény pontosan alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha $-f$ felülről (illetve alulról) félig folytonos.

b) Egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha alulról és felülről félig folytonos.

c) Ha $E \subseteq M$, akkor a χ_E karakterisztikus függvény pontosan akkor alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha E nyílt (illetve zárt) halmaz. Ha $E \subseteq M$, akkor a χ_E karakterisztikus függvény pontosan akkor folytonos, ha E nyílt-zárt halmaz.

d) Ha M kompakt és $f : M \to \mathbb{R}$ alulról (illetve) felülről félig folytonos függvény, akkor $Im(f)$ alulról (illetve felülről) korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben, és ha $M \neq \emptyset$, akkor létezik olyan pont M-ben, amelyben f-nek globális minimuma (illetve maximuma) van.

(*Útmutatás.* Legyen $f : M \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos függvény; megmutatjuk, hogy ha M kompakt, akkor $Im(f)$ alulról korlátos, és ha $M \neq \emptyset$, akkor létezik olyan $\mathfrak{a} \in M$, hogy $f(\mathfrak{a}) = \inf(Im(f))$, tehát f-nek $\mathfrak{a}$-ban globális minimuma van.

Valóban, az f alulról félig folytonossága miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\{x \in M | f(x) \leq -n\}$ *zárt* halmaz, és a $(\{x \in M | f(x) \leq -n\})_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó. Ha f nem korlátos alulról, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathbb{N} \ni n$-re $\{x \in M | f(x) \leq -n\} \neq \emptyset$, ezért M kompaktsága miatt, a Cantor-féle közösrész-tétel alapján kapjuk, hogy $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in M | f(x) \leq -n\} \neq \emptyset$, holott ez a metszethalmaz nyilvánvalóan üres.

Tegyük fel, hogy M kompakt és nem üres, továbbá legyen $\alpha := \inf(Im(f))$. Ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^+$-ban haladó monoton fogyó zérussorozat, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\{x \in M | f(x) \leq \alpha + \varepsilon_n\}$ nem üres zárt halmaz, és a $(\{x \in M | f(x) \leq \alpha+\varepsilon_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó. Ezért M kompaktsága miatt, a Cantor-féle közösrész-tétel alapján kapjuk, hogy $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x \in M | f(x) \leq \alpha + \varepsilon_n\} \neq \emptyset$. E metszethalmaz bármely $\mathfrak{a}$ elemére $f(\mathfrak{a}) = \inf(Im(f))$ teljesül.)

4. Ha (M, d) kompakt metrikus tér, és $f : M \to M$ olyan függvény, hogy minden $x, y \in M$ esetén $d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$, akkor f *izometrikus bijekció.*

(*Útmutatás.* Először megmutatjuk, hogy ha $x \in M$ esetén $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelöli x kezdőpont és az $f : M \to M$ függvény által meghatározott iterációs sorozatot, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre $d(x, x_n) < \varepsilon$. Ha nem így lenne, akkor volna olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $d(x, x_n) \geq \varepsilon$. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m < n$ esetén $d(x_m, x_n) = d(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \geq d(x_{m-1}, x_{n-1})$, amiből látható, hogy $d(x_m, x_n) \geq d(x, x_{n-m}) \geq \varepsilon$. Ezért az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nincs konvergens részsorozata, ami ellentmond a Bolzano-Weierstrass tételnek.

Az előzőekből máris következik, hogy $Im(f)$ sűrű részhalmaza M-nek, ezért ha f folytonos lenne, akkor $Im(f)$ kompaktsága, tehát zártsága miatt f ráképezne M-re.

Legyen most (M', d') az (M, d) metrikus tér önmagával vett szorzata, és

$$f' : M' \to M'; \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y)).$$

Ekkor (M', d') kompakt metrikus tér, és világos, hogy minden $x', y' \in M'$ esetén $d'(f'(x'), f'(y')) \geq d'(x', y')$, tehát ha az $(x, y) \in M'$ párra $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jelöli az (x, y) kezdőpont és az f' függvény által meghatározott iterációs sorozatot, akkor az előzőek alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre $d'((x, y), (x_n, y_n)) < \varepsilon$, azaz $d(x, x_n) < \varepsilon$ és $d(y, y_n) < \varepsilon$. Ugyanakkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (illetve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) sorozat azonos az x (illetve y) kezdőpont és az $f : M \to M$ függvény által meghatározott iterációs sorozattal. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy $d(x, x_n) < \varepsilon$ és $d(y, y_n) < \varepsilon$, akkor

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) = d(x_1, y_1) \leq d(x_n, y_n) \leq \\ \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < d(x, y) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ezért $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, vagyis f izometria.)

5. Az (M, d) metrikus teret *pszeudokompaktnak* nevezzük, ha minden $M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény korlátos. Minden kompakt metrikus tér pszeudokompakt. Ha (M, d) pszeudokompakt metrikus tér, akkor M *teljesen korlátos* halmaz.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy M nem teljesen korlátos halmaz. Igazoljuk olyan $M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény létezését, amely nem korlátos.

Vegyünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre minden $H \subseteq M$ véges halmazra $M \neq \bigcup\limits_{x\in H} B_{\varepsilon/2}(x; d)$. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával előállíthatunk olyan M-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} \notin \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_{\varepsilon/2}(x_k; d)$, és itt az x_0 kezdőpont az M tetszőleges pontja lehet. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon/2$, ezért a $(B_{\varepsilon/2}(x_n; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat

diszjunkt. A kiválasztási axióma alkalmazásával kiválaszthatunk olyan $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $x \in M$ esetén $0 \le f_k(x) \le 1$, $f_k(x_k) = k$ és $supp(f_k) \subseteq B_{\varepsilon/8}(x_k; d)$. A $(B_{\varepsilon/8}(x_n; d))_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat diszjunktsága folytán minden $x \in M$ ponthoz legfeljebb egy olyan $k \in \mathbb{N}$ létezik, hogy $f_k(x) \neq 0$, ezért jól értelmezett az

$$f : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

függvény. Ha $x \in M$, akkor legfeljebb egy olyan $k \in \mathbb{N}$ létezik, amelyre $B_{\varepsilon/8}(x; d) \cap B_{\varepsilon/8}(x_k; d) \neq \emptyset$, ezért vagy $f = 0$ a $B_{\varepsilon/8}(x; d)$ gömbön, vagy valamely $\mathbb{N} \ni k$-ra $f = f_k$ a $B_{\varepsilon/8}(x; d)$ gömbi környezeten. Ezért a folytonosság lokalitása miatt f folytonos, és világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f(x_k) = k$, tehát $\mathbb{N} = \{f(x_k) | k \in \mathbb{N}\} \subseteq Im(f)$, vagyis f nem korlátos.)

6. Mutassuk meg, hogy metrikus tér pontosan akkor kompakt, ha pszeudokompakt. (*Útmutatás.* Indirekt, tegyük fel, hogy az (M, d) metrikus tér pszeudokompakt, de nem kompakt. Ekkor a létezik az M nem üres zárt részhalmazainak olyan sorozata, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $dist_{F_n} : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és $\{x \in M | dist_{F_n}(x) = 0\} = F_n$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n := \inf(dist_{F_n}, 1)$; és vegyünk olyan $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre a $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor konvergens. Ekkor az $f := \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n$ függvény folytonos és minden $x \in M$ esetén $f(x) > 0$. Tehát az $1/f$ reciprok-függvény is folytonos, így az (M, d) pszeudokompaktsága miatt korlátos felülről. Ez azt jelenti, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in M$ esetén $f(x) \ge c$. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tetszőleges. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$0 < c \le f(x_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k f_k(x) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k,$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ sor konvergenciája miatt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = 0$, ami ellentmondás.)

7. Legyen $m \in \mathbb{N}^+$ és értelmezzük az

$$P_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^m - \prod_{j=0}^{m-1} (x - j),$$

pontosan $m-1$-ed fokú, egész együtthatós, homogén polinomiális függvényt, továbbá legyen $(c_{m,j})_{0\le j\le m-1}$ a P_m együttható-rendszere, vagyis minden $\mathbb{R} \ni x$-re

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{m,j} x^j.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| x^m \; - \; B_n\left(id^m_{[0,1]}\right)(x) \right| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|c_{m,j}|}{n^{m-j}}$$

teljesül. Ebből következik, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényre és $a, b \in \mathbb{R}$ valós számra, ha $a < b$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,b]} \left| f(t) - B_n(f|_{[a,b]})(t) \right| \right) = 0$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Rögzített $y \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+; \quad x \mapsto (x+y)^n$$

függvényt m-szer differenciálva x szerint, a binomiális tételt alkalmazva kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$n(n-1)...(n-m+1)(x+y)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)...(k-m+1)x^{k-m}y^{n-k},$$

tehát x^m-mel szorozva és kihasználva a P_m polinom definícióját

$$(n^m - P_m(n))x^m(x+y)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k^m - P_m(k))x^k y^{n-k}.$$

adódik. Ez tehát minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén igaz, így az $x \in]0,1[$ és $y := 1-x$ választással kapjuk, hogy

$$(n^m - P_m(n))x^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k^m - P_m(k))x^k(1-x)^{n-k}.$$

Közvetlenül látható, hogy ez az egyenlőség $x := 0$ és $x := 1$ esetén is teljesül.

Legyen most $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in [0,1]$ is rögzítve. Az előző egyenlőség mindkét oldalát osztjuk n^m-mel, felhasználjuk a Bernstein-polinomok definícióját, majd átrendezzük, így a következőre jutunk:

$$x^m - B_n\left(id^m_{[0,1]}\right)(x) = \frac{P_m(n)}{n^m}x^m - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{P_m(k)}{n^m} x^k(1-x)^{n-k}.$$

A $(c_{m,j})_{0\leq j\leq m-1}$ a P_m együttható-rendszer definíciója alapján a jobb oldal így írható:

$$\frac{P_m(n)}{n^m}x^m - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{P_m(k)}{n^m} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= x^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{n^{m-j}} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\left(\sum_{j=0}^{m-1} c_{m,j} k^j\right)}{n^m} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= x^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{n^{m-j}} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{n^{m-j}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^j x^k (1-x)^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{n^{m-j}} \left(x^m - B_n\left(id_{[0,1]}^j\right)(x) \right).$$

A Bernstein-polinomok definíciója alapján nyilvánvaló, hogy $0 \le j \le m-1$ és $x \in [0,1]$ esetén $0 \le B_n\left(id_{[0,1]}^j\right)(x) \le 1$, és persze $0 \le x^m \le 1$, ezért azt kapjuk, hogy $|x^m - B_n\left(id_{[0,1]}^j\right)(x)| \le 1$, így

$$\left| x^m - B_n\left(id_{[0,1]}^m\right)(x) \right| = \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{m,j}}{n^{m-j}} \left(x^m - B_n\left(id_{[0,1]}^j\right)(x) \right) \right| \le \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|c_{m,j}|}{n^{m-j}}$$

teljesül, és ebből már következik az állítás.)

9. Teljes metrikus terek

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor az M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük (a d metrika szerint), ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) < \varepsilon$.

A Cauchy-sorozatok fogalma metrikus, és nem topologikus fogalom.

Állítás. Metrikus térben minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat, és minden Cauchy-sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, és $\boldsymbol{s}$ konvergens sorozat M-ben. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az $\varepsilon/2$ számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $d(\boldsymbol{s}(n), \lim(\boldsymbol{s})) < \varepsilon/2$. Ha $m > N$ és $n > N$ tetszőleges természetes számok, akkor $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) \leq d(\boldsymbol{s}(m), \lim(\boldsymbol{s})) + d(\lim(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{s}(n)) < \varepsilon$, tehát $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat,

Legyen $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat és rögzítsünk egy $r \in \mathbb{R}^+$ számot. Az r-hez legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m > N$ és $n > N$ természetes számra $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) < r$. Ekkor $\{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \subseteq B_r(\boldsymbol{s}(N+1); d)$, tehát az $\{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\}$ halmaz korlátos, továbbá az $\{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, mert véges, így az $Im(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m > N)\} \cup \{\boldsymbol{s}(m) | (m \in \mathbb{N}) \wedge (m \leq N)\}$ halmaz is korlátos, vagyis $\boldsymbol{s}$ korlátos sorozat. ■

Állítás. Metrikus térben Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, ezért a feltétel *szükséges.* A feltétel *elégségességének* bizonyításához legyen (M, d) metrikus tér, és $\boldsymbol{s}$ M-ben haladó Cauchy-sorozat. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan szigorúan monoton növő függvény, amelyre $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ konvergens sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor $\boldsymbol{s}$-nek a $\lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)$ pont a határértéke.

Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $N' \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m > N'$ és $n > N'$ természetes számra $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) < \varepsilon/2$; ilyen létezik, mert $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat. Legyen továbbá $N'' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N''$ természetes számra $d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n), \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)) < \varepsilon/2$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N', N'')$, akkor $\sigma(n) \geq n > N'$, így $d(\boldsymbol{s}(\sigma(n)), \boldsymbol{s}(n)) < \varepsilon/2$, továbbá $n > N''$ miatt $d(\boldsymbol{s}(\sigma(n)), \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)) < \varepsilon/2$, amiből a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy $d(\boldsymbol{s}(n), \lim(\boldsymbol{s} \circ \sigma)) < \varepsilon$. ■

Állítás. Legyen (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek, és $\boldsymbol{s}$ M'-ben haladó sorozat. Az $\boldsymbol{s}$ pontosan akkor Cauchy-sorozat d' szerint, ha Cauchy-sorozat d szerint.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik a Cauchy-sorozatok definíciójából és abból, hogy $d' := d|_{M' \times M'}$. ■

Állítás. Ha (M, d), (M', d') metrikus terek és $f : M \rightarrowtail M'$ egyenletesen folytonos függvény, akkor minden $Dom(f)$-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, ha $\boldsymbol{s}$ a d szerint Cauchy-sorozat, akkor $f \circ \boldsymbol{s}$ a d' szerint Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az f egyenletes folytonossága miatt vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre minden $x_1, x_2 \in Dom(f)$ pontra, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Legyen $\boldsymbol{s}$ $Dom(f)$-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > N$ esetén $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) < \delta$. Ekkor minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, ha $m, n > N$, akkor $d'(f(\boldsymbol{s}(m)), f(\boldsymbol{s}(n))) < \varepsilon$, tehát $f \circ \boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat a d' metrika szerint. ■

Állítás. Ha (M, d) az $((M_i, d_i))_{i \in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, akkor egy M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat d szerint, ha minden $I \ni i$-re az M_i-ben haladó $pr_i \circ \boldsymbol{s}$ sorozat Cauchy-sorozat d_i szerint.

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{s}$ M-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat, akkor az előző állás szerint minden $I \ni i$-re $pr_i \circ \boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat d_i szerint, mert $pr_i : M \to M_i$ Lipschitz-függvény függvény a d és d_i metrikák szerint, ezért egyenletesen folytonos.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re az M_i-ben haladó $pr_i \circ \boldsymbol{s}$ sorozat Cauchy-sorozat d_i szerint. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és válasszunk ki olyan $(N_i)_{i \in I}$ rendszert $\mathbb{N}$-ben, amelyre minden $I \ni i$-re és $m, n > N_i$ természetes számra $d_i(pr_i(\boldsymbol{s}(m)), pr_i(\boldsymbol{s}(n))) < \varepsilon$. Ekkor $N := \max\limits_{i \in I} N_i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m, n > N$ természetes számra $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) := \max\limits_{i \in I} d_i(pr_i(\boldsymbol{s}(m)), pr_i(\boldsymbol{s}(n))) < \varepsilon$, tehát $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat d szerint. ■

Sok olyan metrikus tér létezik, amelyben nem minden Cauchy-sorozat konvergens. Például, a $\mathbb{Q}$ halmaz az euklidészi metrikával ellátva olyan metrikus altere az euklidészi metrikával ellátott $\mathbb{R}$ metrikus térnek, hogy minden $\mathbb{Q}$-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatra, ha $\boldsymbol{s}$ konvergens $\mathbb{R}$-ben, és a határértéke *irracionális* szám, akkor $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat $\mathbb{Q}$-ban, de nem konvergens $\mathbb{Q}$-ban.

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor az $E \subseteq M$ halmazt *teljesnek* nevezzük (a d metrika szerint), ha minden E-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat konvergens d szerint, és a határértéke eleme E-nek. Az (M, d) metrikus teret *teljesnek* nevezzük, ha M teljes a d metrika szerint, vagyis minden M-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat konvergens d szerint. Az $(E, \|\cdot\|)$ normált teret *teljesnek* nevezzük, ha az $(E, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér teljes. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* is nevezzük.

Metrikus terek teljessége metrikus és nem topologikus tulajdonság.

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér, és $F \subseteq M$, akkor az F halmaz pontosan akkor teljes d szerint, ha az $(F, d|_{F \times F})$ metrikus tér teljes.

Bizonyítás. Ha $\boldsymbol{s}$ olyan F-ben haladó sorozat, amely Cauchy-sorozat $d|_{F \times F}$ szerint, akkor $\boldsymbol{s}$ a d szerint is Cauchy-sorozat, tehát ha az F halmaz teljes a d metrika szerint, akkor $\boldsymbol{s}$ konvergens d szerint és $\lim(\boldsymbol{s}) \in \overline{F} = F$, így $\boldsymbol{s}$ a $d|_{F \times F}$ altérmetrika szerint is konvergens. Tehát ha F halmaz teljes a d metrika szeint, akkor az $(F, d|_{F \times F})$ metrikus tér teljes.

Megfordítva, ha $\boldsymbol{s}$ olyan F-ben haladó sorozat, amely a d szerint Cauchy-sorozat, akkor $\boldsymbol{s}$ a $d|_{F \times F}$ altérmetrika szerint is Cauchy-sorozat, tehát ha $(F, d|_{F \times F})$ teljes metrikus tér, akkor $\boldsymbol{s}$ konvergens $d|_{F \times F}$ szerint, így d szerint is konvergens. Tehát ha $(F, d|_{F \times F})$ teljes metrikus tér, akkor F teljes halmaz a d metrika szerint. ■

Állítás. Ha (M,d) az $((M_i,d_i))_{i\in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, és $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $I \ni i$-re $E_i \subseteq M_i$ teljes halmaz d_i szerint, akkor $\prod\limits_{i\in I} E_i$ teljes halmaz d szerint. Teljes metrikus terek véges rendszerének a szorzata teljes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $I \ni i$-re $E_i \subseteq M_i$ teljes halmaz d_i szerint, és legyen $\boldsymbol{s}$ egy $\prod\limits_{i\in I} E_i$-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat. Ekkor minden $I \ni i$-re $pr_i \circ \boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat d_i szerint, tehát konvergens is ugyanezen metrika szerint és $\lim(pr_i \circ \boldsymbol{s}) \in E_i$. Ezért $\boldsymbol{s}$ konvergens d szerint is, és $\lim(\boldsymbol{s}) = (\lim(pr_i \circ \boldsymbol{s}))_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$. Ez azt jelenti, hogy $\prod\limits_{i\in I} E_i$ teljes halmaz d szerint. ■

Állítás. Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes, és minden teljes halmaz zárt. Teljes metrikus térben a teljes és a zárt halmazok ugyanazok.

Bizonyítás. Legyen (M,d) metrikus tér. Ha $K \subseteq M$ kompakt halmaz, és $\boldsymbol{s}$ egy K-ban haladó Cauchy-sorozat, akkor a Bozano-Weierstrass tétel alapján létezik $\boldsymbol{s}$-nek olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme K-nak; ekkor az $\boldsymbol{s}$ sorozat is konvergens, és a határértéke eleme K-nak, így K teljes halmaz. Ha $E \subseteq M$ teljes halmaz, és $\boldsymbol{s}$ egy E-ben haladó konvergens sorozat, akkor $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat, így az E teljessége miatt $\lim(\boldsymbol{s}) \in E$; ez viszont a zárt halmazok sorozatokkal való jellemzési tétele alapján azt jelenti, hogy E zárt halmaz. Ha M teljes halmaz, és $F \subseteq M$ zárt halmaz, továbbá $\boldsymbol{s}$ egy F-ben haladó Cauchy-sorozat, akkor $\boldsymbol{s}$ konvergens, és $\lim(\boldsymbol{s}) \in \overline{F} = F$, vagyis F teljes halmaz. ■

Állítás. Ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ nem üres halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges halmazrendszer, amelyre $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, és minden $I \ni i$-re $diam(E_i) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen E teljesen korlátos és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\varepsilon' < \varepsilon/2$, és ε'-höz legyen $H \subseteq E$ olyan véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup\limits_{x\in H} B_{\varepsilon'}(x;d)$. Ekkor minden $H \ni x$-re $diam(B_{\varepsilon'}(x;d)) \le 2\varepsilon' < \varepsilon$, tehát a feltétel szükséges.

Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy a feltétel teljesül, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vegyünk olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges halmazrendszert, amelyre $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} E_i$, és minden $I \ni i$-re $diam(E_i) < \varepsilon$. Legyen $I' := \{i \in I | E \cap E_i \neq \emptyset\}$ és $(x_i)_{i\in I'}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I'$ esetén $x_i \in E \cap E_i$. Ha $x \in E$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x \in E_i$; ekkor $i \in I'$, és $d(x,x_i) \le diam(E_i) < \varepsilon$, vagyis $x \in B_\varepsilon(x_i;d)$. Ez azt jelenti, hogy a $H := \{x_i | i \in I'\} \subseteq E$ halmazra fennáll az $E \subseteq \bigcup\limits_{x\in H} B_\varepsilon(x;d)$ összefüggés, tehát E teljesen korlátos. ■

Következmény. Metrikus térben teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza is teljesen korlátos.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

Tétel. (*Hausdorff-tétel.*) Ha (M,d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden E-ben haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E nem teljesen korlátos halmaz. A Bolzano-Weierstrass tételt megelőző állítás *bizonyításában* láttuk, hogy ekkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és olyan E-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $i < n+1$ esetén $\boldsymbol{s}(i) \notin \bigcup_{j \in i} B_\varepsilon(\boldsymbol{s}(j); d)$. Ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, akkor $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ esetén $d(\boldsymbol{s}(\sigma(i)), \boldsymbol{s}(\sigma(j))) \geq \varepsilon$, így $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ nem Cauchy-sorozat. Tehát ha minden E-ben haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat, akkor E teljesen korlátos.

Megfordítva, tegyük fel, hogy E teljesen korlátos, és legyen $\boldsymbol{s}$ tetszőleges E-ben haladó sorozat. Ki fogjuk választani az $\boldsymbol{s}$-nek egy olyan részsorozatát, amely Cauchy-sorozat.

Ehhez legyen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőlegesen rögzített $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat. Először a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával igazoljuk olyan $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben haladó $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és olyan M-ben haladó $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n \subseteq \mathbb{N}$ *végtelen* halmaz, továbbá $N_{n+1} \subseteq N_n$ és $x_{n+1} \in B_{\varepsilon_n}(x_n; d)$, valamint $\boldsymbol{s}\langle N_n \rangle \subseteq B_{\varepsilon_n}(x_n; d)\rangle$.

Az $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ számhoz az E teljes korlátossága folytán létezik olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\varepsilon_0}(x; d)$; ekkor $Im(\boldsymbol{s}) \subseteq E$ miatt $\mathbb{N} = \bigcup_{x \in H} \overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_0}(x; d)\rangle$, következésképpen van olyan $x \in H$, amelyre $\overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_0}(x; d)\rangle$ véges halmaz. Legyen $x \in H$ ilyen pont, és $x_0 := x$, valamint $N_0 := \overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_0}(x; d)\rangle$. Ekkor az $(x_0, N_0) \in M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$ olyan pár, amelyre $N_0 \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, és $\boldsymbol{s}\langle N_0 \rangle \subseteq B_{\varepsilon_0}(x_0; d)$.

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ és $((x_k, N_k))_{0 \leq k \leq n}$ olyan rendszer, amely $M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben halad, és minden $0 \leq k \leq n$ természetes számra $N_k \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, $\boldsymbol{s}\langle N_k \rangle \subseteq B_{\varepsilon_k}(x_k; d)$, valamint $k < n$ esetén $N_{k+1} \subseteq N_k$ és $x_{k+1} \in B_{\varepsilon_k}(x_k; d)$. Ekkor $\boldsymbol{s}\langle N_n \rangle \subseteq E$, és E teljesen korlátos, ezért az előző következmény szerint $\boldsymbol{s}\langle N_n \rangle$ is teljesen korlátos halmaz. Ezért az $\varepsilon_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $H \subseteq \boldsymbol{s}\langle N_n \rangle \subseteq E$ véges halmaz, amelyre $\boldsymbol{s}\langle N_n \rangle \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\varepsilon_{n+1}}(x; d)$. Ekkor $N_n = \bigcup_{x \in H} (N_n \cap \overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_{n+1}}(x; d)\rangle)$, így N_n végtelensége és H végessége miatt vehetünk olyan $x \in H$ pontot, amelyre $N_n \cap \overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_{n+1}}(x; d)\rangle$ végtelen halmaz; legyen $x_{n+1} := x$ és $N_{n+1} := N_n \cap \overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_{n+1}}(x; d)\rangle$. Ekkor $N_{n+1} \subseteq N_n$ és N_{n+1} végtelen halmaz, továbbá

$$\boldsymbol{s}\langle N_{n+1} \rangle \subseteq \boldsymbol{s}\langle \overset{-1}{\boldsymbol{s}}\langle B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}; d)\rangle \subseteq B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}; d),$$

valamint $x_{n+1} \in \boldsymbol{s}\langle N_n \rangle \subseteq B_{\varepsilon_n}(x_n; d)$. Ez azt jelenti, hogy az $((x_k, N_k))_{0 \leq k \leq n+1}$ rendszer $M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben halad, és minden $0 \leq k \leq n+1$ természetes számra $N_k \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, $\boldsymbol{s}\langle N_k \rangle \subseteq B_{\varepsilon_k}(x_k; d)$, valamint $k < n+1$ esetén $N_{k+1} \subseteq N_k$ és $x_{k+1} \in B_{\varepsilon_k}(x_k; d)$.

Most a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával veszünk olyan $M \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$-ben haladó $((x_n, N_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n \subseteq \mathbb{N}$ *végtelen* halmaz, továbbá $N_{n+1} \subseteq N_n$ és $x_{n+1} \in B_{\varepsilon_n}(x_n; d)$, valamint $\boldsymbol{s}\langle N_n \rangle \subseteq B_{\varepsilon_n}(x_n; d)\rangle$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor N_n végtelensége miatt $N_n \cap]n, \to [\neq \emptyset$, ezért jól értelmezett a

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min(N_n \cap]n, \to [)$$

függvény. Jelölje σ a $0 \in \mathbb{N}$ kezdőpont és g függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Ekkor $\sigma(0) = 0$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\sigma(n+1) := g(\sigma(n)) \in N_{\sigma(n)} \cap]\sigma(n), \rightarrow [,$$

vagyis $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ és $\sigma(n+1) \in N_{\sigma(n)}$ miatt $\boldsymbol{s}(\sigma(n+1)) \in B_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)}; d)$, vagyis fennáll a $d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n+1), x_{\sigma(n)}) < \varepsilon_{\sigma(n)}$ egyenlőtlenség.

Most megmutatjuk, hogy ha az $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat. Valóban, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $d(x_{k+1}, x_k) < \varepsilon_k$, ezért ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$, akkor

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) < \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k < \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Ebből következik, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_m, x_n) < \sum_{k=\min(m,n)}^{\infty} \varepsilon_k,$$

ezért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$ sor konvergenciája miatt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat.

Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben; ekkor az előzőek szerint $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ is Cauchy-sorozat. Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $m, n > N_1$ esetén $d(x_m, x_n) < \varepsilon/3$. Az $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat 0-hoz konvergál, ezért vehetünk olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ számot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N_2$ esetén $\varepsilon_n < \varepsilon/3$. Legyen $N := \max(N_1, N_2)$, és legyenek $m, n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $m, n > N + 1$. Ekkor $\sigma(m-1) > \sigma(N) \geq N \geq N_1$, és hasonlóan $\sigma(n-1) > N_1$, így $d(x_{\sigma(m-1)}, x_{\sigma(n-1)}) < \varepsilon/3$. Ugyanakkor $\sigma(m-1) > N_2$ és $\sigma(n-1) > N_2$, ezért $d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(m), x_{\sigma(m-1)}) < \varepsilon_{\sigma(m-1)} < \varepsilon/3$, és hasonlóan $d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n), x_{\sigma(n-1)}) < \varepsilon_{\sigma(n-1)} < \varepsilon/3$. Ebből következik, hogy

$$\begin{gathered} d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(m), (\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n)) \leq \\ \leq d((\boldsymbol{s} \circ \sigma)(m), x_{\sigma(m-1)}) + d(x_{\sigma(m-1)}, x_{\sigma(n-1)}) + d(x_{\sigma(n-1)}, (\boldsymbol{s} \circ \sigma)(n)) < \varepsilon, \end{gathered}$$

vagyis $\boldsymbol{s} \circ \sigma$ Cauchy-sorozat. ■

A Bolzano-Weierstrass tétel és Hausdorff-tétel kombinálásával kapjuk a kompaktság következő *metrikus jellemzését.*

Tétel. (*A kompaktság metrikus jellemzése.*) Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljes és teljesen korlátos.

Bizonyítás. A Bolzano-Weierstrass tétel bizonyítása során láttuk, hogy minden kompakt halmaz teljesen korlátos, továbbá teljes is. Megfordítva, ha (M, d)

metrikus tér, és $K \subseteq M$ teljes és teljesen korlátos halmaz, akkor bármely K-ban haladó $\boldsymbol{s}$ sorozatnak a Hausdorff-tétel szerint létezik olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat, és egy ilyen részsorozat a K teljessége miatt konvergens, és a határértéke $\overline{K}$-nak eleme, vagyis K-nak is eleme, mert teljes halmaz zárt. Ezért a Bolzano-Weierstrass tétel alapján K kompakt halmaz. ■

Az előző tételben az a meghökkentő, hogy mind a teljesség, mind a teljes korlátosság *metrikus tulajdonságok*; ugyanakkor ezek *konjunkciója* a tétel alapján ekvivalens a kompaktsággal, ami viszont *topologikus tulajdonság.*

Állítás. Ha egy metrikus térben minden zárt gömb teljes halmaz, akkor a metrikus tér teljes.

Bizonyítás. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, amelyben minden zárt gömb teljes halmaz, és legyen $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat M-ben. Ekkor $\boldsymbol{s}$ korlátos, ezért van olyan $B \subseteq M$ zárt gömb, amelyre $Im(\boldsymbol{s}) \subseteq B$. A B halmaz teljessége miatt $\boldsymbol{s}$ konvergens, így (M, d) teljes metrikus tér. ■

Tétel. Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.

Bizonyítás. Véges dimenziós normált térben minden zárt gömb korlátos és zárt halmaz, tehát kompakt, így teljes is. Ezért az előző állítás szerint véges dimenziós normált tér teljes. ■

Következmény. Normált tér minden véges dimenziós lineáris altere teljes (ezért zárt) halmaz.

Bizonyítás. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $F \subseteq E$ véges dimenziós lineáris altér, akkor $(F, \|\cdot\||_F)$ véges dimenziós normált tér, tehát az előző állítás szerint teljes, következésképpen F teljes halmaz. ■

Példák (*Banach-terekre.*)

1) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{K}^n$ tetszőleges normával ellátva Banach-tér, hiszen ez véges dimenziós normált tér.

2) Ha $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, vagy $p = \infty$, akkor az $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ sorozattér Banach-tér. Azonban $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ a $\|\cdot\|_p$ normák egyikének leszűkítésével ellátva sem Banach-tér. (A XII. fejezetben majd megmutatjuk, hogy a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ vektortér felett egyáltalán nem létezik olyan, norma, amellyel $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ Banach-tér.)

3) Ha T halmaz, akkor a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T; \mathbb{K})$ vektortere a sup-normával ellátva Banach-tér. Ezt a 11. pontban még általánosabb feltételek mellett is bizonyítani fogjuk.

Most megadjuk a normált terek teljességének sorokkal való jellemzését.

Lemma. Legyen (M, d) metrikus tér és $\boldsymbol{s}$ egy M-ben haladó Cauchy-sorozat. Ekkor minden $\mathbb{R}^+$-ban haladó monoton fogyó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozathoz létezik $\boldsymbol{s}$-nek olyan $\boldsymbol{s}'$ részsorozata, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(\boldsymbol{s}'(n), \boldsymbol{s}'(n+1)) < \varepsilon_n$ teljesül.

Bizonyítás. Az $\boldsymbol{s}$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $j, k \in \mathbb{N}$ és $j, k \geq N$ esetén $d(\boldsymbol{s}(j), \boldsymbol{s}(k)) < \varepsilon_n$ teljesül,

továbbá, ha N ilyen, akkor minden N-nél nagyobb-egyenlő természetes szám is ilyen tulajdonságú. Ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $]n, \rightarrow [\cap\{N \in \mathbb{N} | (\forall j \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(((j \geq N) \wedge (k \geq N)) \Rightarrow (d(\boldsymbol{s}(j), \boldsymbol{s}(k)) < \varepsilon_n))\}$ nem üres halmaz; legyen $g(n)$ e halmaz legkisebb eleme. Jelölje σ_1 a 0 kezdőpont és az imént bevezetett $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény által meghatározott iterációs sorozatot. Tehát $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre $\sigma_1(0) := 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma_1(n+1) := g(\sigma_1(n))$, tehát $g(\sigma_1(n)) \in]\sigma_1(n), \rightarrow [$ miatt $\sigma_1(n+1) > \sigma_1(n)$, továbbá $\sigma_1(n+1) \in \{N \in \mathbb{N} | (\forall j \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(((j \geq N) \wedge (k \geq N)) \Rightarrow (d(\boldsymbol{s}(j), \boldsymbol{s}(k)) < \varepsilon_{\sigma_1(n)}))\}$, következésképpen $d(\boldsymbol{s}(\sigma_1(n+1)), \boldsymbol{s}(\sigma_1(n+2))) < \varepsilon_{\sigma_1(n)}$. Legyen $\sigma_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $n \mapsto n+1$; ekkor $\boldsymbol{s}' := \boldsymbol{s} \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2)$ olyan részsorozata $\boldsymbol{s}$-nek, amelyre minden $\mathbb{N} \ni n$-re $d(\boldsymbol{s}'(n), \boldsymbol{s}'(n+1)) = d(\boldsymbol{s}(\sigma_1(n+1)), \boldsymbol{s}(\sigma_1(n+2))) < \varepsilon_{\sigma_1(n)} \leq \varepsilon_n$, hiszen $\sigma_1(n) \geq n$, és $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fogyó sorozat. ■

Tétel. Normált tér pontosan akkor teljes, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\boldsymbol{s}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre a $\sum \boldsymbol{s}$ sor abszolút konvergens a $\|\cdot\|$ szerint. Ekkor $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \|\boldsymbol{s}(k)\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{s}(k)\| - \sum_{k=0}^{N} \|\boldsymbol{s}(k)\| < \varepsilon,$$

tehát minden $m, n > N$, $m \neq n$ természetes számra

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{s}(k) - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k) \right\| \leq \sum_{k=\min(m,n)}^{\max(m,n)} \|\boldsymbol{s}(k)\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\boldsymbol{s}(k)\| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum \boldsymbol{s}$ sor Cauchy-sorozat. Tehát ha $(E, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor minden E-ben haladó abszolút konvergens sor konvergens.

Legyen most $(E, \|\cdot\|)$ olyan normált tér, hogy minden E-ben haladó abszolút konvergens sor konvergens, és legyen $\boldsymbol{s}$ E-ben haladó Cauchy-sorozat. Rögzítsünk olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozatot, amelyre a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Az előző lemma alkalmazásával vegyük az $\boldsymbol{s}$-nek egy olyan $\boldsymbol{s}'$ részsorozatát, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|\boldsymbol{s}'(k) - \boldsymbol{s}'(k+1)\| < \varepsilon_k$ teljesül. Értelmezzük azt az E-ben haladó $\boldsymbol{s}''$ sorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}''(k) := \boldsymbol{s}'(k+1) - \boldsymbol{s}'(k)$. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} \|\boldsymbol{s}''(k)\| \leq \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k,$$

tehát a $\sum \boldsymbol{s}''$ sor abszolút konvergens, így a hipotézis alapján konvergens is. Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{s}'(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}''(k) + \boldsymbol{s}'(0),$$

tehát az $\mathbb{N} \to E$; $n \mapsto \boldsymbol{s}'(n+1)$ függvény *konvergens* részsorozata az $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozatnak, így $\boldsymbol{s}$ is konvergens. Ezért $(E, \|\cdot\|)$ Banach-tér. ■

Tétel. (*Az egyenletesen folytonos függvények kiterjesztése.*) Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Ha f egyenletesen folytonos és (M', d') teljes, akkor egyértelműen létezik f-nek folytonos kiterjesztése $\overline{Dom(f)}$-ra, és ez a kiterjesztés is egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Ha $g_1, g_2 : \overline{Dom(f)} \to M'$ olyan folytonos függvények, amelyek f-nek kiterjesztései, akkor g_1 és g_2 folytonosak a $d'' := d|_{\overline{Dom(f)} \times \overline{Dom(f)}}$ altérmetrika és d' szerint, továbbá $g_1 = g_2$ a $Dom(f)$ halmazon, és $Dom(f)$ sűrű $\overline{Dom(f)}$-ben a d'' metrika szerint. Ezért az egyenlőségek folytatásának elve alapján $g_1 = g_2$.

Legyen $\boldsymbol{s}$ olyan $Dom(f)$-ben haladó sorozat, amely konvergens d szerint. Ekkor $\boldsymbol{s}$ a d metrika szerint Cauchy-sorozat, így az f egyenletes folytonossága miatt $f \circ \boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat a d' metrika szerint. Az (M', d') metrikus tér teljessége következtében $f \circ \boldsymbol{s}$ konvergens a d' metrika szerint. Ezért a folytonos függvények kiterjesztésének tételéből következik, hogy f folytonosan kiterjeszthető $\overline{Dom(f)}$-ra; jelölje g ezt a kiterjesztést.

A g egyenletes folytonosságának bizonyításához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, és rögzítsünk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ valós számot. Az f egyenletes folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $x_1, x_2 \in Dom(f)$ esetén, ha $d(x_1, x_2) < \delta'$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon'$. Legyen $\delta \in]0, \delta'/3]$ tetszőleges valós szám. Megmutatjuk, hogy minden $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in Dom(g)$ esetén, ha $d(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) < \delta$, akkor $d(f(\mathfrak{a}_1), f(\mathfrak{a}_2)) < \varepsilon$. Valóban, legynek $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in Dom(g)$ olyanok, hogy $d(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) < \delta$. Vegyünk olyan $\boldsymbol{s}_1$ és $\boldsymbol{s}_2$ sorozatokat, amelyek $Dom(f)$-ben haladnak, d szerint konvergensek, valamint $\mathfrak{a}_1 = \lim(\boldsymbol{s}_1)$ és $\mathfrak{a}_2 = \lim(\boldsymbol{s}_2)$. Rögzítsünk olyan $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ számokat, amelyekre $n \in \mathbb{N}$, $n > N_1$ esetén $d(\boldsymbol{s}_1(n), \mathfrak{a}_1) < \delta$, és $n \in \mathbb{N}$, $n > N_2$ esetén $d(\boldsymbol{s}_2(n), \mathfrak{a}_2) < \delta$. Tehát az $N := \max(N_1, N_2)$ szám rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n)) \leq d(\boldsymbol{s}_1(n), \mathfrak{a}_1) + d(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) + d(\mathfrak{a}_2, \boldsymbol{s}_2(n)) < 3\delta < \delta',$$

következésképpen $d'(f(\boldsymbol{s}_1(n)), f(\boldsymbol{s}_2(n))) < \varepsilon'$. Ugyanakkor $f \circ \boldsymbol{s}_1 = g \circ \boldsymbol{s}_1$ és $f \circ \boldsymbol{s}_2 = g \circ \boldsymbol{s}_2$, ezért az átviteli elvet alkalmazva kapjuk, hogy $\lim(f \circ \boldsymbol{s}_1) = g(\mathfrak{a}_1)$ és $\lim(f \circ \boldsymbol{s}_2) = g(\mathfrak{a}_2)$. Ebből következik, hogy az

$$\mathbb{N} \to M' \times M'; \quad n \mapsto (f(\boldsymbol{s}_1(n)), f(\boldsymbol{s}_2(n)))$$

sorozat konvergens az (M', d') metrikus tér önmagával vett szorzatában, és a határértéke a $(g(\mathfrak{a}_1), g(\mathfrak{a}_2))$ pont. Ugyanakkor a $d' : M' \times M' \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos a szorzatmetrika szerint (sőt Lipschitz-függvény), ezért ismét az átviteli elvet alkalmazva kapjuk, hogy az

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto d'(f(\boldsymbol{s}_1(n)), f(\boldsymbol{s}_2(n)))$$

valós sorozat konvergens, és a határértéke a $d'(g(\mathfrak{a}_1), g(\mathfrak{a}_2))$ szám. De minden $n > N$ természetes számra $d'(f(\boldsymbol{s}_1(n)), f(\boldsymbol{s}_2(n))) < \varepsilon'$, ezért $d'(g(\mathfrak{a}_1), g(\mathfrak{a}_2)) \leq \varepsilon' < \varepsilon$, és ezt kellett igazolni. ■

A tételt gyakran abban a speciális formában alkalmazzuk, amikor $Dom(f)$ *sűrű* halmaz M-ben; ilyenkor azt mondjuk, hogy f *sűrűn értelmezett.* Tehát metrikus térben sűrűn értelmezett, teljes metrikus térbe ható, egyenletesen folytonos függvény egyértelműen kiterjeszthető az indulási metrikus térre folytonos függvénnyé, és ez a kiterjesztés automatikusan egyenletesen folytonos.

Következmény. Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ függvény. Ha (M', d') teljes és $Dom(f)$ relatív kompakt halmaz, akkor az f függvény pontosan akkor terjeszthető ki folytonosan $\overline{Dom(f)}$-ra, ha f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Az egyenletesen folytonos függvények kiterjesztési tétele alapján a feltétel elégséges (még akkor is, ha $Dom(f)$ nem relatív kompakt halmaz). Ha g az f folytonos kiterjesztése $\overline{Dom(f)}$-ra, akkor a Heine-tétel alapján g egyenletesen folytonos, mert a feltevés szerint $\overline{Dom(f)}$ kompakt, így f is szükségképpen egyenletesen folytonos függvény. ■

Teljes metrikus térnek sok olyan metrikus altere létezhet, amely nem teljes; például minden nem zárt altere ilyen. Felvetődik a kérdés, hogy ha tekintjük a teljes metrikus terek metrikus altereit, akkor izomorfia erejéig megkapjuk-e az *összes* metrikus teret? Ha (M, d) olyan metrikus tér, amely metrikus altere a $(\hat{M}, \hat{d})$ teljes metrikus térnek, akkor az $(\overline{M}, \hat{d}|_{\overline{M}\times\overline{M}})$ metrikus tér szintén teljes, és (M, d) sűrű metrikus altere ennek a térnek. Tehát az a kérdés, hogy vajon metrikus tér kibővíthető-e teljes metrikus térré úgy, hogy annak sűrű metrikus altere legyen?

Másként fogalmazva; ha egy metrikus tér nem teljes, akkor léteznek benne olyan Cauchy-sorozatok, amelyek nem konvergensek, tehát az a probléma, hogy a térhez hozzávehetők-e olyan pontok, és a kibővített halmazon értelmezhető-e olyan metrika, hogy:

- az eredeti metrikus tér metrikus altere legyen a bővítésnek;

- az eredeti tér Cauchy-sorozatainak létezzen határértékük a bővebb térben, csak a limeszpontok esetleg nincsenek benne az eredeti halmazban;

- a térbővítés teljes legyen, tehát az újabb Cauchy-sorozatok (amelyek nem az eredeti halmazban haladnak) szintén konvergensek legyenek a bővebb metrikus térben;

- a bővítés a "lehető legkisebb" legyen, amely eleget tesz az előző feltételeknek, például teljesüljön az, hogy az eredeti metrikus tér sűrű metrikus altere a térbővítésnek.

A metrikus terek előzőekben körvonalazott "teljessé tevéséről" szól a következő tétel.

Tétel. (*Metrikus tér teljesítése.*) Legyen (M, d) metrikus tér.

- Létezik olyan $(\hat{M}, \hat{d})$ teljes metrikus tér, és létezik olyan $j : M \to \hat{M}$ függvény, hogy j izometria a d és $\hat{d}$ metrikák szerint, és $Im(j)$ sűrű részhalmaza $\hat{M}$-nak a $\hat{d}$ metrika szerint.

- Legyenek $((\hat{M}_1, \hat{d}_1), j_1)$ és $((\hat{M}_2, \hat{d}_2), j_2)$ olyan párok, hogy $(\hat{M}_1, \hat{d}_1)$ és $(\hat{M}_2, \hat{d}_2)$ teljes metrikus terek, továbbá $j_1 : M \to \hat{M}_1$ és $j_2 : M \to \hat{M}_2$ izometriák, valamint $Im(j_1) \subseteq \hat{M}_1$ sűrű $\hat{d}_1$ szerint és $Im(j_2) \subseteq \hat{M}_2$ sűrű $\hat{d}_2$ szerint. Ekkor létezik egyetlen

olyan $f : \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ leképezés, amely *izometrikus bijekció* a $\hat{d}_1$ és $\hat{d}_2$ metrikák szerint, és $f \circ j_1 = j_2$ teljesül.

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{M}$ az M-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozatok halmazát. Nevezzünk két M-ben haladó $\boldsymbol{s}_1$ és $\boldsymbol{s}_2$ Cauchy-sorozatot *ekvivalensek* (jelben: $\boldsymbol{s}_1 \approx \boldsymbol{s}_2$), ha az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n))$ számsorozat nullához konvergál. Ez az $\mathfrak{M}$ halmazon értelmezett $\approx$ reláció *ekvivalencia* $\mathfrak{M}$ felett. Valóban, a $\approx$ reláció az (M_I) miatt reflexív $\mathfrak{M}$-en, továbbá az (M_{II}) alapján szimmetrikus, végül a $\approx$ tranzitivitása egyszerűen adódik (M_{III})-ból, és abból, hogy két valós zérussorozat összege is zérussorozat. Legyen $\hat{M} := \mathfrak{M}/\approx$, és jelölje $j : M \to \hat{M}$ azt a függvényt, amely minden $x \in M$ ponthoz az x értékű állandó-sorozat $\approx$ szerinti ekvivalencia-osztályát rendeli.

Megmutatjuk, hogy $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in \mathfrak{M}$ esetén az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n))$ számsorozat konvergens. Valóban, ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor a négyszög-egyenlőtlenség alapján

$$|d(\boldsymbol{s}_1(m), \boldsymbol{s}_2(m)) - d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n))| \le d(\boldsymbol{s}_1(m), \boldsymbol{s}_1(n)) + d(\boldsymbol{s}_2(m), \boldsymbol{s}_2(n)),$$

és az $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ sorozatok Cauchy-sorozatok, ezért az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \mapsto d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n))$ sorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, vagyis konvergens.

Legyenek most $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_1' \in \mathfrak{M}$ és $\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_2' \in \mathfrak{M}$ olyan sorozatok, amelyekre $\boldsymbol{s}_1 \approx \boldsymbol{s}_1'$ és $\boldsymbol{s}_2 \approx \boldsymbol{s}_2'$; megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n)) = \lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1'(n), \boldsymbol{s}_2'(n))$. Valóban, minden $\mathbb{N} \ni n$-re ismét a négyszög-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$|d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n)) - d(\boldsymbol{s}_1'(n), \boldsymbol{s}_2'(n))| \le d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_1'(n)) + d(\boldsymbol{s}_2(n), \boldsymbol{s}_2'(n))$$

adódik, továbbá $\boldsymbol{s}_1 \approx \boldsymbol{s}_1'$ és $\boldsymbol{s}_2 \approx \boldsymbol{s}_2'$ miatt itt a jobb oldalon zérussorozat áll.

Ezért jól értelmezett az a $\hat{d} : \hat{M} \times \hat{M} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $\xi_1, \xi_2 \in \hat{M}$ esetén

$$\hat{d}(\xi_1, \xi_2) := \lim_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n)),$$

ahol $\boldsymbol{s}_1 \in \xi_1$ és $\boldsymbol{s}_2 \in \xi_2$ tetszőleges.

Megmutatjuk, hogy $(\hat{M}, \hat{d})$ metrikus tér. A d szimmetrikussága miatt $\hat{d}$ nyilvánvalóan szimmetrikus, továbbá $\xi \in \hat{M}$ esetén $\hat{d}(\xi, \xi) = 0$ triviálisan teljesül. Ha $\xi_1, \xi_2 \in \hat{M}$ és $\hat{d}(\xi_1, \xi_2) = 0$, akkor bármely $\xi_1 \ni \boldsymbol{s}_1$-re és $\xi_2 \ni \boldsymbol{s}_2$-re $\lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n))$, tehát $\boldsymbol{s}_1 \approx \boldsymbol{s}_2$, így $\xi_1 = \xi_2$. Ha $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \hat{M}$ és $\boldsymbol{s}_1 \in \xi_1$, $\boldsymbol{s}_2 \in \xi_2$, $\boldsymbol{s}_3 \in \xi_3$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség alapján $d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_3(n)) \le d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n)) + d(\boldsymbol{s}_2(n), \boldsymbol{s}_3(n))$, így

$$\hat{d}(\xi_1, \xi_3) := \lim_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_3(n)) \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n)) + \lim_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_2(n), \boldsymbol{s}_3(n)) =: \hat{d}(\xi_1, \xi_2) + \hat{d}(\xi_2, \xi_3),$$

ami azt jelenti, hogy $\hat{d}$-ra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ezzel megmutattuk, hogy $(\hat{M}, \hat{d})$ metrikus tér.

Nyilvánvaló, hogy a $j : M \to \hat{M}$ függvény izometria a d és $\hat{d}$ metrikák szerint, hiszen ha $x_1, x_2 \in M$, akkor $\hat{d}(j(x_1), j(x_2)) := \lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n))$, ahol $\boldsymbol{s}_1$ (illetve $\boldsymbol{s}_2$) az x_1 (illetve x_2) értékű állandó-sorozat, és persze $\lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}_1(n), \boldsymbol{s}_2(n)) = d(x_1, x_2)$.

Most megmutatjuk, hogy az $Im(j) \subseteq \hat{M}$ halmaz sűrű a $\hat{d}$ metrika szerint. Ehhez legyen $\xi \in \hat{M}$, és rögzítsünk egy $\boldsymbol{s} \in \xi$ elemet. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ esetén $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) < \varepsilon$, tehát ha $m \in \mathbb{N}$ és $m > N$, akkor $\hat{d}(j(\boldsymbol{s}(m)), x) = \lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $Im(j) \cap \overline{B}_\varepsilon(x; \hat{d}) \neq \emptyset$, vagyis $Im(j)$ sűrű a $\hat{d}$ metrika szerint.

Bebizonyítjuk az $(\hat{M}, \hat{d})$ metrikus tér teljességét. Legyen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\hat{M}$-ben haladó, $\hat{d}$ szerinti Cauchy-sorozat. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. Az előző bekezdés alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overset{-1}{j}\langle B_{\varepsilon_n}(x_n; \hat{d})\rangle \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk egy

$$\boldsymbol{s} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\langle B_{\varepsilon_n}(x_n; \hat{d})\rangle$$

elemet. Ekkor $\boldsymbol{s}$ olyan M-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\hat{d}(j(\boldsymbol{s}(n)), x_n) < \varepsilon_n$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N_1$ esetén $\hat{d}(x_m, x_n) \leq \varepsilon/3$, továbbá van olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, amelyre $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $\varepsilon_n < \varepsilon/3$; ekkor $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > \max(N_1, N_2)$ esetén

$$d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) = \hat{d}(j(\boldsymbol{s}(m)), j(\boldsymbol{s}(n))) \leq$$
$$\leq \hat{d}(j(\boldsymbol{s}(m)), x_m) + \hat{d}(x_m, x_n) + \hat{d}(x_n, j(\boldsymbol{s}(n))) < \varepsilon_m + \hat{d}(x_m, x_n) + \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat d szerint, vagyis $\boldsymbol{s} \in \mathfrak{M}$. Jelölje ξ az $\boldsymbol{s}$ ekvivalencia-osztályát $\approx$ szerint, tehát $\xi \in \hat{M}$ az a pont, amelyre $\boldsymbol{s} \in \xi$. Megmutatjuk, hogy a $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ξ-hez konvergál $\hat{d}$ szerint. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N_1$ esetén $d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) \leq \varepsilon/2$, továbbá válasszunk olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $m > N_2$ esetén $\varepsilon_m < \varepsilon/2$. Ekkor $m \in \mathbb{N}$, $m > \max(N_1, N_2)$ esetén

$$\hat{d}(x_m, x) \leq \hat{d}(x_m, j(\boldsymbol{s}(m))) + \hat{d}(j(\boldsymbol{s}(m)), x) < \varepsilon_m + \lim_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) \leq \varepsilon_m + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{m\to\infty} \hat{d}(x_m, x) = 0$, tehát a $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\hat{d}$ szerint. Ezért $(\hat{M}, \hat{d})$ teljes metrikus tér.

Legyenek most $((\hat{M}_1, \hat{d}_1), j_1)$ és $((\hat{M}_2, \hat{d}_2), j_2)$ olyan párok, hogy $(\hat{M}_1, \hat{d}_1)$ és $(\hat{M}_2, \hat{d}_2)$ teljes metrikus terek, továbbá $j_1 : M \to \hat{M}_1$ és $j_2 : M \to \hat{M}_2$ izometriák, valamint $Im(j_1) \subseteq \hat{M}_1$ sűrű $\hat{d}_1$ szerint és $Im(j_2) \subseteq \hat{M}_2$ sűrű $\hat{d}_2$ szerint. Ha $f, f' : \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ olyan folytonos függvények, hogy $f \circ j_1 = j_2 = f' \circ j_1$, akkor $f = f'$ az $Im(j_1)$ halmazon, amelys sűrű $\hat{M}_1$-ben $\hat{d}_1$ szerint, továbbá f és f' folytonosak, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján $f = f'$. Tehát legfeljebb egy olyan $f\hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ folytonos függvény létezik, amelyre $f \circ j_1 = j_2$. Ilyen tulajdonságú f függvény létezésének bizonyításához először megjegyezzük, hogy a $j_2 \circ {j_1}^{-1} : \hat{M}_1 \rightarrowtail \hat{M}_2$ függvény izometria (ezért egyenletesen folytonos) a $\hat{d}_1$ és $\hat{d}_2$ metrikák szerint, továbbá $Dom(j_2 \circ {j_1}^{-1}) = Im(j_1)$ a $\hat{d}_1$ szerint sűrű halmaz $\hat{M}_1$-ben, valamint $(\hat{M}_2, \hat{d}_2)$ teljes metrikus tér. Ezért az egyenletesen folytonos függvények kiterjesztési tétele alapján létezik egyetlen olyan $f : \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ folytonos függvény, amely a $j_2 \circ {j_1}^{-1}$-nek kiterjesztése, és ez a kiterjesztés automatikusan

egyenletesen folytonos. Azonban az egyenlőségek folytatásának elve alapján f valójában izometria a $\hat{d}_1$ és $\hat{d}_2$ metrikák szerint. A definíció szerint $f = j_2 \circ {j_1}^{-1}$ az $Im(j_1)$ halmazon, ezért $f \circ j_1 = j_2$. Megcserélve az $(\hat{M}_1, \hat{d}_1)$ és $(\hat{M}_2, \hat{d}_2)$ metrikus terek szerepét, az előző érvelést megismételve a $j_1 \circ {j_2}^{-1}$ függvényre azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $g : \hat{M}_2 \to \hat{M}_1$ folytonos függvény, amely kiterjesztése a $j_1 \circ {j_2}^{-1}$ függvénynek, tehát amelyre $g \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor fennállnak az $(f \circ g) \circ j_2 = f \circ j_1 = j_2$ és $(g \circ f) \circ j_1 = g \circ j_2 = j_1$ egyenlőségek, tehát $f \circ g = id_{\hat{M}_2}$ az $Im(j_2)$ sűrű halmazon, és $g \circ f = id_{\hat{M}_1}$ az $Im(j_1)$ sűrű halmazon. Az egyenlőségek folytatásának elve alapján $f \circ g = id_{\hat{M}_2}$ és $g \circ f = id_{\hat{M}_1}$. Ez azt azt jelenti, hogy f bijekció is (és $f^{-1} = g$). Tehát $f : \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ olyan bijekció, amely izometria a $\hat{d}_1$ és $\hat{d}_2$ metrikák szerint, valamint kielégíti az $f \circ j_1 = j_2$ egyenlőséget. ■

Megjegyezzük, hogy az $(\hat{M}_1, \hat{d}_1)$ és $(\hat{M}_2, \hat{d}_2)$ teljes metrikus terek között sok izometrikus bijekció létezhet; de az $f \circ j_1 = j_2$ feltétel ezek közül kitüntet egyet.

Definíció. Az (M, d) metrikus tér *teljes burkának* (vagy *teljesítésének*) nevezünk minden olyan $((\hat{M}, \hat{d}), j)$ párt, amelyre $(\hat{M}, \hat{d})$ teljes metrikus tér, $j : M \to \hat{M}$ izometria a d és $\hat{d}$ metrikák szerint, valamint $Im(j)$ sűrű $\hat{M}$-ban $\hat{d}$ szerint.

Tehát az imént igazolt tétel szerint minden metrikus térnek *létezik* teljes burka, és bármely két teljes burka kitüntetett módon (*kanonikusan*) *azonosítható*. Speciálisan, minden metrikus tér izomorf egy teljes metrikus tér sűrű metrikus alterével.

Metrikus térnek általában nagyon sok teljes burka létezik. Amikor ezek közül rögzítünk egyet (például azt, amit a tétel bizonyításában előállítottunk), akkor azt mondjuk, hogy a teljes burkot *realizáltuk*, és minden konkrét teljes burkot a teljes burok *realizációjának* nevezünk. A következő állítás egy sűrűn előforduló realizációt mutat be.

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér, (M', d') teljes metrikus tér, és $j : M \to M'$ izometria a d és d' metrikák szerint. Ekkor az $((\overline{Im(j)}, d'|_{\overline{Im(j)} \times \overline{Im(j)}}), j)$ pár az (M, d) metrikus térnek teljes burka.

Bizonyítás. Teljes metrikus térben a zárt halmazok teljesek, ezért

$$(\overline{Im(j)}, d'|_{\overline{Im(j)} \times \overline{Im(j)}})$$

teljes metrikus tér, és $Im(j)$ természetesen sűrű ebben a metrikus térben. ■

Azonban ez az állítás nem helyettesítheti a metrikus terek teljesítéséről szóló tételt, mert eleve nem tudjuk azt, hogy minden metrikus tér *izometrikusan* leképezhető-e egy *teljes* metrikus térbe? Ezzel kapcsolatos még a 11. pont **10**. gyakorlata.

Definíció. Az f függvény *fixpontjának* nevezünk minden olyan $x \in Dom(f)$ elemet, amelyre $f(x) = x$ teljesül.

Definíció. Legyen M halmaz és $f : M \to M$ függvény. Az id_M kezdőpont és az $\mathscr{F}(M; M) \to \mathscr{F}(M; M)$; $h \mapsto f \circ h$ függvény által meghatározott iterációs

sorozat n-edik tagját (ahol természetesen $n \in \mathbb{N}$) az f függvény *n-edik iteráltjának* nevezzük.

Tehát ha M halmaz, $f : M \to M$ függvény, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelöli az id_M kezdőpont és az $\mathscr{F}(M;M) \to \mathscr{F}(M;M)$; $h \mapsto f \circ h$ függvény által meghatározott iterációs sorozatot, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re az f n-edik iteráltja az f_n függvény, és a definíció szerint az f nulladik iteráltja id_M, első iteráltja f, második iteráltja $f \circ f$, harmadik iteráltja $f \circ f \circ f$, s.í.t.

Teljes indukcióval könnyen látható, hogy ha M halmaz, $f : M \to M$ függvény, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az f iteráltjainak sorozata, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f \circ f_n = f_n \circ f$ teljesül. Valóban, ez $n = 0$-ra triviálisan igaz, mert $f_0 := id_M$, és ha az $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, akkor az iteráltak definíciója és az indukciós hipotézis alapján

$$f \circ f_{n+1} := f \circ (f \circ f_n) = f \circ (f_n \circ f) = (f \circ f_n) \circ f =: f_{n+1} \circ f,$$

vagyis az állítás $n + 1$-re is igaz.

Tétel. (*Banach-féle fixponttétel.*) Ha (M, d) nem üres teljes metrikus tér, és $f : M \to M$ olyan függvény, amelynek valamelyik iteráltja kontrakció, akkor f-nek egyértelműen létezik fixpontja.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha az f függvény kontrakció, akkor f-nek egyértelműen létezik fixpontja. Ehhez rögzítünk olyan $C \in [0, 1[$ valós számot, amelyre minden $(x_1, x_2) \in M \times M$ esetén $d(f(x_1), f(x_2)) \le Cd(x_1, x_2)$ teljesül.

Ha x_1 és x_2 az f-nek fixpontjai, akkor $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \le Cd(x_1, x_2)$, ezért $x_1 \ne x_2$, vagyis $d(x_1, x_2) > 0$ esetén $1 \le C$ teljesülne, holott $C < 1$. Ezért f-nek legfeljebb egy fixpontja lehet.

Az f fixpontja létezésének bizonyításához legyen $x_0 \in M$ tetszőlegesen rögzített pont, és jelölje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az x_0 kezdőpont és az f függvény által meghatározott iterációs sorozatot, vagyis minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_{n+1} = f(x_n)$.

Megmutatjuk, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $d(x_k, x_{k+1}) \le C^k d(x_0, x_1))$ teljesül. Valóban, ez $k = 0$ esetén nyilván igaz, és ha a $k \in \mathbb{N}$ számra teljesül, akkor

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(f(x_k), f(x_{k+1})) \le Cd(x_k, x_{k+1}) \le C^{k+1} d(x_0, x_1),$$

tehát az állítás $k + 1$-re is teljesül. Most legyenek $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ tetszőlegesek; ekkor a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \le \sum_{k=m}^{n-1} C^k d(x_0, x_1) =$$

$$= C^m \left(\sum_{k=0}^{n-m-1} C^k \right) d(x_0, x_1) \le C^m \frac{1 - C^{n-m}}{1 - C} d(x_0, x_1) \le C^m \frac{1}{1 - C} d(x_0, x_1).$$

Ebből azonnal következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re

$$d(x_m, x_n) \le \left(\frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} \right) C^{\min(m,n)},$$

amiből látszik, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, hiszen $C \in [0,1[$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} C^n = 0$. Az (M,d) metrikus tér teljessége miatt az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens; legyen $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ekkor x fixpontja f-nek, hiszen az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az f folytonossága és az átviteli elv alapján $f(x)$-hez konvergál, másfelől $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(x_n) = x_{n+1}$, tehát $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *részsorozata* az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, így

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

teljesül.

Ezzel megmutattuk, hogy nem üres teljes metrikus tér minden kontrakciójának egyértelműen létezik fixpontja.

Most tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre az f n-edik iteráltja (amit f_n-nel jelölünk) kontrakció. Az előzőek alapján f_n-nek egyértelműen létezik fixpontja; legyen ez x. Ekkor $f(x) = f(f_n(x)) = f_n(f(x))$, vagyis $f(x)$ szintén fixpontja f_n-nek, így az f_n fixpontjának egyértelműsége miatt $f(x) = x$, vagyis x fixpontja f-nek is. Továbbá, ha x' szintén fixpontja f-nek, akkor teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k(x') = x'$ (ahol $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az f iteráltjainak sorozata), ezért $f_n(x') = x'$ is teljesül, így ismét az f_n fixpontjának egyértelműsége miatt $x' = x$. Tehát f-nek egyértelműen létezik fixpontja. ■

A Banach-féle fixponttétel fenti bizonyítása eljárást is szolgáltat a fixpont meghatározására. Sőt még arra is becslést ad, hogy kontrakció esetében az x fixponthoz konvergáló $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iterációs sorozat milyen *gyorsan* konvergál x-hez; ugyanis $m \in \mathbb{N}$ esetén minden $n \in \mathbb{N}$, $n > m$ számra

$$d(x_m, x_n) \le \left(\frac{d(x_0,x_1)}{1-C}\right) C^m,$$

következésképpen

$$d(x_m, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \le \left(\frac{d(x_0,x_1)}{1-C}\right) C^m.$$

Ez azt mutatja, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iterációs sorozat annál gyorsabban konvergál x-hez, minél kisebb a $d(x_0,x_1) := d(x_0, f(x_0))$ távolság, és minél kisebb a C *kontrakciós együttható.*

Tétel. (*A fixpont paramétertől való folytonos függése.*) Legyen (M,d) nem üres teljes metrikus tér, (Λ, d_Λ) metrikus tér, és $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ olyan rendszer, amelyre minden $\Lambda \ni \lambda$-ra $f_\lambda : M \to M$ függvény, és teljesülnek a következők.

- Létezik olyan $C \in [0,1[$ valós szám, amelyre minden $\lambda \in \Lambda$ és minden $(x_1,x_2) \in M \times M$ esetén $d(f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2)) \le C d(x_1,x_2)$.

- Minden $x \in M$ pontra a $\Lambda \to M$; $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$ függvény folytonos a d_Λ és d metrikák szerint.

Ekkor egyértelműen létezik olyan $\xi : \Lambda \to M$ függvény, amelyre minden $\lambda \in \Lambda$ esetén $f_\lambda(\xi(\lambda)) = \xi(\lambda)$ (vagyis $\xi(\lambda)$ fixpontja f_λ-nak), és a ξ függvény folytonos a d_Λ és d metrikák szerint.

Bizonyítás. A ξ függvény egyértelmű létezése a Banach-féle fixponttételből következik, tehát csak a ξ folytonosságát kell igazolni.

Legyen $C \in [0,1[$ olyan valós szám, amelyre minden $\lambda \in \Lambda$ és minden $(x_1, x_2) \in M \times M$ esetén $d(f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$ teljesül. Ha $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, akkor

$$\begin{aligned} d(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) &= d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda')), f_\lambda(\xi(\lambda))) \leq d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda')), f_{\lambda'}(\xi(\lambda)))+ \\ &+d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))) \leq Cd(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) + d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))), \end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$d(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) \leq \left(\frac{1}{1-C}\right) d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))).$$

Legyen most $\lambda \in \Lambda$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített. A feltevés szerint a $\Lambda \to M$; $\lambda' \mapsto f_{\lambda'}(\xi(\lambda))$ függvény folytonos a λ pontban a d_Λ és d metrikák szerint, ezért az $(1-C)\varepsilon$ valós számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda' \in B_\delta(\lambda; d_\Lambda)$ pontra $d(f_{\lambda'}(\xi(\lambda)), f_\lambda(\xi(\lambda))) < (1-C)\varepsilon$. Ekkor minden $\lambda' \in B_\delta(\lambda; d_\Lambda)$ pontra $d(\xi(\lambda'), \xi(\lambda)) < \varepsilon$ teljesül, tehát

$$\xi\langle B_\delta(\lambda; d_\Lambda)\rangle \subseteq B_\varepsilon(\xi(\lambda); d),$$

vagyis ξ a λ pontban folytonos a d_Λ és d metrikák szerint. ■

Gyakorlatok

1. Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljes és pszeudokompakt (8. pont, **5**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Minden pszeudokompakt halmaz teljesen korlátos (8. pont, **5**. gyakorlat).)

2. Ha (M, d) metrikus tér és létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in M$ pontra a $\overline{B}_r(x; d)$ gömb teljes halmaz, akkor (M, d) teljes.

(*Útmutatás.* Ha r ilyen szám, akkor minden M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozathoz van olyan $x \in M$ és $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) \in \overline{B}_r(x; d)$.)

3. Legyen $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $d(m, n) := 1 + \frac{1}{m+n}$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $d(n, n) := 0$. Ekkor $(\mathbb{N}, d)$ teljes metrikus tér (1. pont, **3**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Ha $\boldsymbol{s}$ egy $\mathbb{N}$-ben haladó, d szerint Cauchy-sorozat, akkor $\boldsymbol{s}$ *stacionárius*, vagyis létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\boldsymbol{s}(n) = \boldsymbol{s}(N)$. Ez abból következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re, $m \neq n$ esetén $d(m, n) > 1$.)

4. Ha (M, d) metrikus tér, akkor minden M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozatra és minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}(n), \boldsymbol{s}(n+k)) = 0$. Ha (M, d) *ultrametrikus* tér, akkor egy M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat d szerint, ha $\lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}(n), \boldsymbol{s}(n+1)) = 0$. Azonban létezik olyan (M, d) metrikus tér, és olyan M-ben haladó $\boldsymbol{s}$ sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}(n), \boldsymbol{s}(n+1)) = 0$, de $\boldsymbol{s}$ nem Cauchy-sorozat d szerint.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy ha (M, d) ultrametrikus tér, és $\boldsymbol{s}$ egy M-ben haladó sorozat, akkor minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re, $m < n$ esetén

$$d(\boldsymbol{s}(m), \boldsymbol{s}(n)) \leq \max_{m \leq k \leq n-1} d(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}(k+1)),$$

így ha $\lim\limits_{n\to\infty} d(\boldsymbol{s}(n), \boldsymbol{s}(n+1)) = 0$, akkor $\boldsymbol{s}$ Cauchy-sorozat d szerint. Ha minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\boldsymbol{s}(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

és $\boldsymbol{s}(0) := 0$, akkor $\boldsymbol{s}$ nem Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint (sőt nem is korlátos), de minden $N \ni n$-re $|\boldsymbol{s}(n) - \boldsymbol{s}(n+1)| = \frac{1}{n+1}$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} |\boldsymbol{s}(n) - \boldsymbol{s}(n+1)| = 0$.)

5. Legyen M az összes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények halmaza, és minden $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in M$ esetén, ha $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'$, akkor

$$\delta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') := min\{n \in \mathbb{N} | \boldsymbol{s}(n) \neq \boldsymbol{s}'(n)\}.$$

Legyen $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in M$ esetén

$$d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') := \begin{cases} \frac{2+\delta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}')}{1+\delta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}')} & ; \text{ ha } \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}', \\ 0 & ; \text{ ha } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'. \end{cases}$$

Ekkor (M, d) *szeparábilis* és *teljes* ultrametrikus tér.

6. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, hogy M korlátos halmaz d szerint. Jelölje $\mathscr{H}$ az M nem üres és zárt részhalmazainak halmazát, továbbá

$$\rho : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+; \quad (E, F) \mapsto \sup_{x \in E} \left(\inf_{y \in F} d(x, y) \right);$$
$$\boldsymbol{d} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+; \quad (E, F) \mapsto \max(\rho(E, F), \rho(F, E)).$$

Ekkor $(\mathscr{H}, \boldsymbol{d})$ teljes metrikus tér.

7. Legyen $((M_k, d_k))_{k \in \mathbb{N}}$ metrikustér-sorozat és $\boldsymbol{c} := (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Legyen

$$d_{\boldsymbol{c}} : \prod_{k \in \mathbb{N}} M_k \times \prod_{k \in \mathbb{N}} M_k \to \mathbb{R}_+; \quad (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}{1 + d_k(\boldsymbol{s}(k), \boldsymbol{s}'(k))}.$$

Ha minden $\mathbb{N} \ni k$-ra (M_k, d_k) teljes metrikus tér, akkor a $\left(\prod_{k \in \mathbb{N}} M_k, d_{\boldsymbol{c}} \right)$ metrikus tér is teljes.

8. Legyen $(E, \| \cdot \|)$ normált tér, és $((\hat{E}, \hat{d}_{\| \cdot \|}), j)$ az $(E, d_{\| \cdot \|})$ metrikus tér teljes burka. Ekkor létezik egyetlen olyan $\hat{+} : \hat{E} \times \hat{E} \to \hat{E}$ függvény, és létezik egyetlen olyan $\hat{\cdot} : \mathbb{K} \times \hat{E} \to \hat{E}$ függvény, valamint létezik egyetlen olyan $\| \hat{\cdot} \| : \hat{E} \to \mathbb{R}_+$ függvény, hogy $(\hat{E}, \hat{+}, \hat{\cdot})$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $(\hat{E}, \| \hat{\cdot} \|)$ *Banach-tér*, továbbá j olyan *lineáris operátor* az E és $\hat{E}$ vektorterek között, amely *norma-tartó*, vagyis minden $E \ni x$-re $\|\hat{j(x)}\| = \|x\|$ teljesül. (Minden ilyen tulajdonságú $((\hat{E}, \hat{d}_{\| \cdot \|}), j)$ párt az $(E, \| \cdot \|)$ *normált tér teljes-burkának* nevezünk. Megjegyezzük, hogy a VI. fejezetben megadjuk a normált terek teljes burkának egészen másféle realizációját.)

9. Legyen $\varepsilon \in [0, 1[$ tetszőleges valós szám.

- Minden $y \in \mathbb{R}$ számra az

$$x - \varepsilon \cdot sin(x) = y$$

ε-paraméterű Kepler-egyenlet egyértelműen megoldható $\mathbb{R}$-ben.

- Ha $y \in \mathbb{R}$ és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy olyan iterációs sorozat, amelyre $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_{n+1} = x_n - \varepsilon \cdot sin(x_n)$, akkor az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és az $x := \lim_{n \to \infty} x_n$ szám megoldása az y jobboldalú Kepler-egyenletnek.

- Legyen $f : [0, 1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $\varepsilon \in [0, 1[$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén $f(\varepsilon, y) \in \mathbb{R}$ az ε-paraméterű Kepler-egyenlet megoldása, vagyis

$$f(\varepsilon, y) - \varepsilon \cdot sin(f(\varepsilon, y)) = y$$

teljesül. Ekkor f *folytonos* függvény.

10. Legyen $M := \mathbb{R}$, d az euklidészi metrika $\mathbb{R}$ felett, $\Lambda := [0, 1[$ és d_Λ az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika leszűkítése $[0, 1[\times [0, 1[$-re. Minden $\lambda \in \Lambda$ paraméterre legyen $f_\lambda : M \to M; x \mapsto \lambda \sqrt{1 + x^2}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $\xi : \Lambda \to M$ függvény,

amelyre minden $\Lambda \ni \lambda$-ra $f_\lambda(\xi(\lambda)) = \xi(\lambda)$, és ez a ξ függvény folytonos a d_Λ és d metrikák szerint, azonban *nem létezik* olyan $C > 0$ valós szám, hogy minden $\Lambda \ni \lambda$-ra és $M \ni x_1, x_2$-re $d(f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$ teljesül.

11. Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) Létezik olyan $x \in E$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy a $\overline{B}_r(x; d_{\|\cdot\|})$ gömb kompakt halmaz.

b) A $0 \in E$ vektornak létezik kompakt környezete.

c) Az E vektortér véges dimenziós.

(*Útmutatás.* Csak a b)⇒c) következtetés nem nyilvánvaló. A b) szerint a 0-nak van olyan V környezete, amely kompakt halmaz. Ekkor a $2.V := \{2.x | x \in V\}$ halmaz szintén kompakt környezete 0-nak, és $2.V \subseteq \bigcup_{x \in 2.V} (x + Int(V))$, ezért létezik olyan $H \subseteq 2.V$ véges halmaz, hogy $2.V \subseteq \bigcup_{x \in H} (x + Int(V))$. Jelölje F a H által generált, szükségképpen véges dimenziós lineáris alteret E-ben. Ekkor $2.V \subseteq F + V$, és $F + 2.V \subseteq F + F + V = F + V$. Ebből kapjuk, hogy

$$F + 4.V = 2.F + 4.V = 2.(F + 2.V) \subseteq 2.(F + V) = 2.F + 2.V = F + 2.V \subseteq F + V.$$

Ezután teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $2^n.V \subseteq F + 2^n.V \subseteq F + V$. Ugyanakkor $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} 2^n.V$ is teljesül, ezért $E = F + V$. Ebből kiindulva megmutatjuk, hogy $E = F$, tehát E véges dimenziós. Ezt indirekt bizonyítjuk, tehát feltesszük egy $x \in E \setminus F$ vektor létezését. Az F altér *zárt*, ezért van a 0-nak olyan B nyílt gömbi környezete, amelyre $x + B \subseteq E \setminus F$, tehát $x \notin F + B$. Ezért minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $r.x \notin r.F + r.B = F + r.B$. A V halmaz korlátos is E-ben, hiszen kompakt, tehát van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $V \subseteq r.B$. Ekkor viszont $r.x \notin F + r.B$ miatt $x \notin F + V$, ami ellentmond annak, hogy $E = F + V$.)

10. Ívszerűen összefüggő és összefüggő metrikus terek

Definíció. Ha M halmaz, akkor M-ben haladó *görbének* nevezünk minden olyan γ függvényt, amelyre $Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $Im(\gamma) \subseteq M$. Ha M halmaz, akkor M-ben haladó *ívnek* nevezünk minden olyan M-ben haladó γ görbét, amelyre $Dom(\gamma)$ nem üres kompakt intervallum $\mathbb{R}$-ben.

Vigyázzunk arra, hogy egy görbét (ami függvény) ne tévesszünk össze annak értékkészletével (ami részhalmaza annak a halmaznak, amelyben a görbe halad)! Ha M halmaz és $C \subseteq M$ legfeljebb kontinuum-számosságú halmaz, akkor nagyon sok olyan M-ben haladó görbe létezhet, amelynek értékkészlete egyenlő C-vel.

Definíció. Ha M halmaz és γ M-ben haladó ív, akkor egyértelműen léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy $a \leq b$ és $Dom(\gamma) = [a, b]$; ekkor a $\gamma(a) \in M$ (illetve $\gamma(b) \in M$) pontot a γ ív *kezdőpontjának* (illetve *végpontjának*) nevezzük; továbbá azt mondjuk, hogy a γ ív *zárt*, ha a γ kezdőpontja egyenlő a végpontjával.

Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy M ben haladó görbe $\mathbb{R} \rightarrowtail M$ függvény, és $\mathbb{R}$-t mindig metrikus térnek tekintjük az euklidészi metrikával ellátva, ezért van értelme az M-ben haladó görbék (speciálisan ívek) *folytonosságáról* beszélni.

Nem szabad fenntartások nélkül megbízni a folytonos ívekről alkotott intuitív képünk helyességében, mert egészen meghökkentő tulajdonságokkal rendelkező folytonos ívek is konstruálhatók. Létezik például olyan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ben haladó folytonos ív, amelynek értékkészlete *egyenlő* a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzettel (V. fejezet, 11. pont, **13**. gyakorlat).

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $C \subseteq M$ halmazt *ívszerűen összefüggőnek* nevezzük (a d metrika szerint), ha minden $x, y \in C$ ponthoz létezik olyan M-ben haladó γ folytonos ív, amelyre $Im(\gamma) \subseteq C$ (vagyis γ a C halmazban halad), továbbá γ kezdőpontja az x és végpontja az y pont (amit úgy fejezünk ki, hogy γ *összeköti* az x és y pontokat). Az (M, d) metrikus teret *ívszerűen összefüggőnek* nevezzük, ha az M halmaz ívszerűen összefüggő a d metrika szerint.

Definíció. Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett.

- Egy $C \subseteq E$ halmazt *konvexnek* nevezünk, ha minden $x, y \in C$ pontra az $[x, y] := \{(1-t).x+t.y | t \in [0, 1]\}$ halmaz (amit x kezdőpontú, y végpontú *szakasznak* nevezünk) részhalmaza C-nek.
- Egy $C \subseteq E$ halmazt *csillaghalmaz* nevezünk, ha létezik olyan $c \in C$, amelyre minden $C \ni x$-re $[c, x] \subseteq C$ (minden ilyen tulajdonságú $c \in C$ pontot a C halmaz *csillagcentrumának* nevezünk).

Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{K}$ feletti vektortérben minden nem üres konvex halmaz olyan csillaghalmaz, amelynek minden pontja csillagcentrum. Azonban léteznek olyan csillaghalmazok, amelyeknek nem minden pontja csillagcentrum; természetesen ezek nem lehetnek konvexek.

Példák 1) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $\mathfrak{a} \in E$ pontra és $r > 0$ valós számra a $B_r(\mathfrak{a}; d_{\|\cdot\|})$ és $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; d_{\|\cdot\|})$ gömbök konvex halmazok, hiszen $x, y \in E$ és $t \in [0,1]$ esetén

$$\|(1-t).x + t.y - \mathfrak{a}\| = \|(1-t).x + t.y - (1-t).\mathfrak{a} - t.\mathfrak{a}\| \leq (1-t)\|x - \mathfrak{a}\| + t.\|y - \mathfrak{a}\|,$$

ezért $\|x-\mathfrak{a}\|, \|y-\mathfrak{a}\| < r$ (illetve $\|x-\mathfrak{a}\|, \|y-\mathfrak{a}\| \leq r$) esetén $\|(1-t).x+t.y-\mathfrak{a}\| < r$ (illetve $\|(1-t).x + t.y - \mathfrak{a}\| \leq r$).

2) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor minden $C \subseteq E$ csillaghalmaz *ívszerűen összefüggő* (természetesen a $d_{\|\cdot\|}$ metrika szerint). Legyen ugyanis $c \in C$ csillagcentruma C-nek, és rögzítsünk $x, y \in C$ pontokat. A $\gamma : [0,1] \to E$ függvényt úgy értelmezzük, hogy minden $[0,1] \ni t$-re

$$\gamma(t) := \begin{cases} (1-2t).x + 2t.c & \text{, ha } t \in [0, 1/2[\\ (2-2t).c + (2t-1).y & \text{, ha } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Ekkor γ olyan E-ben haladó ív, amelyre $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ és $Im(\gamma) = \gamma\langle[0, 1/2[\rangle \cup \gamma\langle[1/2, 1]\rangle = [x, c[\cup[c, y] \subseteq C$. A γ függvény $[0, 1/2]$ és $[1/2, 1]$ intervallumokra vett leszűkítései folytonosak, ezért γ folytonos ív (7. pont, **2**. gyakorlat). Ez azt jelenti, hogy x és y összeköthetők C-ben haladó folytonos ívvel, így C ívszerűen összefüggő.

3) Egy $C \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor konvex, ha intervallum. Ez a konvex halmazok, valamint a rendezés szerinti intervallumok definíciójának nyilvánvaló következménye.

Állítás. Ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $C \subseteq Dom(f)$, d szerint ívszerűen összefüggő halmazra $f\langle C\rangle$ a d' szerint ívszerűen összefüggő.

Bizonyítás. Legyenek $x', y' \in f\langle C\rangle$ tetszőlegesek, és vegyünk olyan $x, y \in C$ pontokat, amelyekre $x' = f(x)$ és $y' = f(y)$. A C halmaz ívszerű összefüggősége miatt vehetünk olyan $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ számokat, és olyan $\gamma : [a, b] \to M$ folytonos ívet, amelyekre $Im(\gamma) \subseteq C$, $x = \gamma(a)$ és $y = \gamma(b)$. A folytonos függvények kompozíciójának folytonossága következtében $f \circ \gamma : [a, b] \to M'$ folytonos függvény, és $Im(f \circ \gamma) = f\langle Im(\gamma)\rangle \subseteq f\langle C\rangle$, valamint $(f \circ \gamma)(a) = x'$ és $(f \circ \gamma)(b) = y'$. Ezért x' és y' összeköthetők $f\langle C\rangle$-ben haladó folytonos ívvel. ■

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $C \subseteq M$ halmazt *összefüggőnek* nevezünk (a d metrika szerint), ha nem léteznek olyan $E, F \subseteq M$ halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Az (M, d) metrikus teret *összefüggőnek* nevezzük, ha M összefüggő halmaz a d metrika szerint.

Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, amely egyszerre nyílt is és zárt is (röviden: *nyílt-zárt*), akkor $E = Int(E)$ és $E = \overline{E}$, ezért $\overline{E} \setminus Int(E) = \emptyset$. Ilyen halmaz például $\emptyset$ és M. Megfordítva, ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $\overline{E} \setminus Int(E) = \emptyset$, akkor $Int(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}$ miatt $E = Int(E)$ és $E = \overline{E}$, vagyis E nyílt-zárt halmaz. Másként fogalmazva: az $E \subseteq M$ halmaz pontosan akkor nyílt-zárt, ha $\overline{E} \setminus Int(E) = \emptyset$. Ugyanakkor metrikus térben sok olyan halmaz létezhet

amely nem nyílt-zárt; ilyen E halmazokra szükségképpen $\overline{E} \setminus Int(E) \neq \emptyset$, vagyis az $\overline{E} \setminus Int(E)$ halmaz *nem triviális.*

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér, akkor egy $E \subseteq M$ halmaz *határának* nevezzük (a d metrika szerint) az $\overline{E} \setminus Int(E)$ halmazt, és ezt a halmazt $Fr(E)$ vagy $\dot{E}$ jelöli.

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

a) (M, d) összefüggő metrikus tér.

b) Minden $E \subseteq M$ nyílt-zárt halmazra: $E = \emptyset$ vagy $E = M$. (Tehát M-nek csak triviális nyílt-zárt részhalmazai vannak.)

c) Minden $E \subseteq M$ halmazra: ha $E \neq \emptyset$ és $E \neq M$, akkor $Fr(E) \neq \emptyset$. (Tehát az M minden nemtriviális részhalmazának a határa is nemtriviális.)

Bizonyítás. a)⇒b) Tegyük fel, hogy b) nem igaz, és legyen $E \subseteq M$ olyan nyílt-zárt halmaz, amelyre $E \neq \emptyset$ és $E \neq M$. Ekkor az $F := M \setminus E$ halmaz olyan, hogy $F \neq \emptyset$ és $F \neq M$, továbbá $M = E \cup F$, és F is nyílt-zárt részhalmaza M-nek, így $\overline{E} \cap F = E \cap F = \emptyset$ és $E \cap \overline{F} = E \cap F = \emptyset$, tehát M nem összefüggő halmaz, így a) nem igaz.

b)⇒c) Tegyük fel, hogy c) nem igaz, és legyen $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $E \neq \emptyset$, $E \neq M$, azonban $Fr(E) = \emptyset$. Ekkor E nyílt-zárt halmaz, és $E \neq \emptyset$, valamint $E \neq M$, tehát b) nem igaz.

c)⇒a) Tegyük fel, hogy a) nem igaz, és legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $M = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Ekkor $E \neq \emptyset$ és $E \neq M$, továbbá $\overline{E} \subseteq M \setminus F = E$ miatt $\overline{E} = E$. Ugyanakkor $\overline{F} \subseteq M \setminus E = F$ miatt $\overline{F} = F$, így $Int(E) = M \setminus \overline{M \setminus E} = M \setminus F = E$. Ezért $Fr(E) = \emptyset$, vagyis c) nem igaz. ■

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$ összefüggő halmaz. Ha $E \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $C \cap E \neq \emptyset$ és $C \cap (M \setminus E) \neq \emptyset$, akkor $C \cap Fr(E) \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $E' := C \cap E$ és $F' := C \cap (M \setminus E)$. A hipotézis szerint $E' \neq \emptyset$ és $F' \neq \emptyset$, továbbá nyilvánvalóan $C = E' \cup F'$. A C halmaz összefüggő, ezért $E' \cap \overline{F'} \neq$ *vagy* $F' \cap \overline{E'} \neq \emptyset$. Ha $x \in E' \cap \overline{F'}$, akkor $x \in E \subseteq \overline{E}$ és $x \in \overline{F'}$ miatt az x minden környezete metszi $M \setminus E$-t, tehát x nem belső pontja E-nek, vagyis $x \notin Int(E)$; ami azt jelenti, hogy $x \in \overline{E} \setminus Int(E) =: Fr(E)$. Ha $x \in \overline{E'} \cap F'$, akkor $x \notin E$, így $x \notin Int(E)$, továbbá $x \in \overline{E'} \subseteq \overline{E}$, vagyis $x \in \overline{E} \setminus Int(E) =: Fr(E)$. Ez azt jelenti, hogy $(\overline{E'} \cap F') \cup (E' \cap \overline{F'}) \subseteq C \cap Fr(E)$, tehát $C \cap Fr(E) \neq \emptyset$. ■

Állítás. Ha (M', d') metrikus altere az (M, d) metrikus térnek, és $C \subseteq M'$, akkor a C halmaz pontosan akkor összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) a d' altér-metrika szerint, ha összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) a d metrika szerint.

Bizonyítás. Először megállapodunk abban, hogy minden $H \subseteq M'$ halmazra $\overline{H}$ jelöli a H lezárját M-ben a d metrika szerint, és $\tilde{H}$ jelöli a H lezártját M'-ben a d' altér-metrika szerint. Tudjuk, hogy $H \subseteq M'$ esetén $\tilde{H} = \overline{H} \cap M'$ teljesül.

Tegyük fel, hogy C nem összefüggő a d' altér-metrika szerint. Ekkor léteznek olyan $E', F' \subseteq C$ halmazok, amelyekre $C = E' \cup F'$, $E' \neq \emptyset \neq F'$, és $\tilde{E'} \cap F' = \emptyset = E' \cap \tilde{F'}$. Ugyanakkor

$$\overline{E'} \cap F' = \overline{E'} \cap (M' \cap F') = (\overline{E'} \cap M') \cap F' = \tilde{E'} \cap F' = \emptyset,$$

és hasonlóan látható, hogy $E' \cap \overline{F'} = \emptyset$, ezért C nem összefüggő M-ben a d metrika szerint. Megfordítva; tegyük fel, hogy C nem összefüggő a d metrika szerint. Ekkor léteznek olyan $E, F \subseteq C$ halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$, és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Világos, hogy ekkor $\tilde{E} \cap F = \emptyset = E \cap \tilde{F}$, így C nem összefüggő a d' altér-metrika szerint.

Az ívszerű összefüggőségre vonatkozó állítás nyilvánvalóan kövtkezik abból, hogy egy C-ben haladó ív pontosan akkor folytonos a d metrika szerint, ha a d' altérmetrika szerint folytonos. ■

Következmény. Ha (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$, akkor a C halmaz pontosan akkor összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) a d metrika szerint, ha a $(C, d|_{C\times C})$ metrikus tér összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő).

Bizonyítás. Az előző állításból azonnal következik, az $(M', d'){:=}(C, d|_{C\times C})$ választással. ■

A következő állítás a Bolzano-tétel általánosítása.

Állítás. Ha (M, d) és (M', d') metrikus terek, és $f : M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény, akkor minden $C \subseteq Dom(f)$, d szerint összefüggő halmazra $f\langle C\rangle$ a d' szerint összefüggő.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $C \subseteq Dom(f)$ olyan halmaz, amelyre $f\langle C\rangle$ nem összefüggő; megmutatjuk, hogy ekkor C sem összefüggő.

A feltevés alapján léteznek olyan $E', F' \subseteq M'$ halmazok, hogy $f\langle C\rangle = E' \cup F'$, $E' \neq \emptyset \neq F'$ és $\overline{E'} \cap F' = \emptyset = E' \cap \overline{F'}$. Legyenek $E := C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle$ és $F := C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle$; ekkor nyilvánvalóan $C = E \cup F$. A folytonosság topologikus jellemzése szerint $\overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle$ és $\overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle$ zárt halmazok a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ altérmetrika szerint, ezért $\overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle \cap Dom(f)} \subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle$, valamint $\overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle \cap Dom(f)} \subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle$, hiszen $\overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle \cap Dom(f)}$ (illetve $\overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle \cap Dom(f)}$) az $\overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle}$ (illetve $\overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle}$) halmaz lezártja a $d|_{Dom(f)\times Dom(f)}$ altérmetrika szerint. Ebből következik, hogy

$$\overline{E} \cap F := \overline{C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap (C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle) \subseteq \overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap Dom(f) \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle \subseteq$$
$$\subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle = \overset{-1}{f}\langle \overline{E'} \cap F'\rangle = \emptyset,$$

és hasonlóan kapjuk, hogy

$$E \cap \overline{F} := (C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle) \cap \overline{C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle} \subseteq \overset{-1}{f}\langle E'\rangle \cap Dom(f) \cap \overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle} \subseteq$$
$$\subseteq \overset{-1}{f}\langle E'\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle = \overset{-1}{f}\langle E' \cap \overline{F'}\rangle = \emptyset,$$

ezért $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$, így C nem összefüggő a d metrika szerint. ■

Most tisztázzuk az összefüggőség és az ívszerű összefüggőség kapcsolatát. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

Lemma. Egy $C \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor összefüggő az euklidészi metrika szerint, ha C konvex.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C nem konvex, és legyenek $a, b \in C$ olyan pontok, hogy $a < b$, és az $[a, b]$ szakasz (ami nem más, mint az $[a, b]$ intervallum) *nem része* C-nek, vagyis van olyan $c \in [a, b]$, amelyre $c \notin C$. Ekkor az $E :=]\leftarrow, c[\cap C$ és $F :=]c, \rightarrow[\cap C$ halmazokra $a \in E$, $b \in F$, $C = E \cup F$ nyilvánvalóan teljesül, továbbá

$$\overline{E} \cap F \subseteq \overline{]\leftarrow, c[}\cap]c, \rightarrow[=]\leftarrow, c]\cap]c, \rightarrow[= \emptyset,$$

valamint

$$E \cap \overline{F} \subseteq]\leftarrow, c[\cap \overline{]c, \rightarrow[} =]\leftarrow, c[\cap [c, \rightarrow[= \emptyset,$$

is nyilvánvalóan igaz, így C nem összefüggő. Tehát ha C összefüggő, akkor konvex. Most tegyük fel, hogy C konvex; megmutatjuk, hogy C összefüggő. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy C konvex, de nem összefüggő. Legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Legyenek $a \in E$ és $b \in F$; az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $a < b$. Ekkor az $E' := [a, b] \cap E$ halmaz nem üres és felülről korlátos, ezért képezhető a $c := \sup(E')$ szám. Világos, hogy $c \in [a, b] \subseteq C$, mert C konvex, így $C = E \cup F$ miatt $c \in E$ vagy $c \in F$. Továbbá $c \in \overline{E'} \subseteq \overline{E}$, ezért $\overline{E} \cap F = \emptyset$ miatt $c \notin F$, vagyis $c \in E$. Ez azt jelenti, hogy $c \in E'$, vagyis c az E' halmaz *legnagyobb* eleme. Ugyanakkor $c \in E$ és $E \cap \overline{F} = \emptyset$ miatt $c \notin \overline{F}$, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $]c - \delta, c + \delta[\cap F = \emptyset$. Világos, hogy $c < b$, hiszen $b \in F$ és $c \notin F$, ezért δ megválasztható úgy, hogy $\delta < b - c$ teljesüljön. Ha $x \in]c, c + \delta[$, akkor $x \in [a, b]$, tehát $x \in E$ vagy $x \in F$; de $]c, c + \delta[\cap F = \emptyset$ miatt $x \notin F$, vagyis $x \in E$. Tehát a $]c, c + \delta[$ intervallum minden eleme E'-ben van és *nagyobb* c-nél, holott c az E' legnagyobb eleme; ez ellentmondás. ■

Állítás. Metrikus térben ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$ ívszerűen összefüggő halmaz; megmutatjuk, hogy C összefüggő. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy C nem összefüggő; legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Rögzítsünk $x \in E$ és $y \in F$ pontokat, és a C ívszerű összefüggőségét kihasználva vegyünk olyan C-ben haladó γ folytonos ívet, amely összeköti az x és y pontokat; legyen $Dom(\gamma) = [a, b]$. Ekkor $[a, b] = \overset{-1}{\gamma}\langle E\rangle \cup \overset{-1}{\gamma}\langle F\rangle$, mivel $Im(\gamma) \subseteq C = E \cup F$. Továbbá, $a \in \overset{-1}{\gamma}\langle E\rangle$, mert $\gamma(a) = x \in E$, és $b \in \overset{-1}{\gamma}\langle F\rangle$, mert $\gamma(b) = y \in F$. A folytonosság topologikus jellemzése alapján $\overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E}\rangle$ és $\overset{-1}{\gamma}\langle \overline{F}\rangle$ zárt halmazok $[a, b]$-ben az euklidészi altérmetrika szerint. De az $[a, b]$ intervallum zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint, így $\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle E\rangle}$ és $\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle F\rangle}$ zárt halmazok $\mathbb{R}$-ben az euklidészi szerint. Ezért $\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle E\rangle} \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E}\rangle$ és $\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle F\rangle} \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{F}\rangle$ teljesül. Ebből következik, hogy

$$\overline{\overset{-1}{\gamma}\langle E\rangle} \cap \overset{-1}{\gamma}\langle F\rangle \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E}\rangle \cap \overset{-1}{\gamma}\langle F\rangle = \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{E} \cap F\rangle = \emptyset$$

$$\overset{-1}{\gamma}\langle E\rangle \cap \overline{\overset{-1}{\gamma}\langle F\rangle} \subseteq \overset{-1}{\gamma}\langle E\rangle \cap \overset{-1}{\gamma}\langle \overline{F}\rangle = \overset{-1}{\gamma}\langle E \cap \overline{F}\rangle = \emptyset.$$

Ez azt jelenti, hogy az $[a, b]$ intervallum nem összefüggő halmaz $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint, ami ellentmond az előző lemmának. ■

Állítás. Metrikus térben összefüggő halmaz lezártja összefüggő.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, és $C \subseteq M$ olyan halmaz, amelyre $\overline{C}$ nem összefüggő; megmutatjuk, hogy ekkor C sem összefüggő.

A feltevés alapján legyenek $E, F \subseteq M$ olyan halmazok, amelyekre $\overline{C} = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Ekkor $C = (C \cap E) \cup (C \cap F)$, továbbá $\overline{C \cap E} \cap (C \cap F) \subseteq \overline{E} \cap F = \emptyset$ és $(C \cap E) \cap \overline{C \cap F} \subseteq E \cap \overline{F} = \emptyset$, tehát a C halmaz nem összefüggő, ha $C \cap E \neq \emptyset$ *és* $C \cap F \neq \emptyset$ teljesül.

Ha $C \cap E = \emptyset$ volna, akkor $C = C \cap F$, azaz $C \subseteq F$, így $\overline{C} \subseteq \overline{F}$ teljesülne. Ekkor $\overline{C} = \overline{C} \cap \overline{F} = (E \cup F) \cap \overline{F} = (E \cap \overline{F}) \cup (F \cap \overline{F}) = F$, hiszen $E \cap \overline{F} = \emptyset$. Ebből $\overline{C} = E \cup F$ miatt $E = \emptyset$ következne, holott $E \neq \emptyset$; ezért $C \cap E \neq \emptyset$.

Ha $C \cap F = \emptyset$ volna, akkor $C = C \cap E$, azaz $C \subseteq E$, így $\overline{C} \subseteq \overline{E}$ teljesülne. Ekkor $\overline{C} = \overline{C} \cap \overline{E} = (E \cup F) \cap \overline{E} = (E \cap \overline{E}) \cup (F \cap \overline{E}) = E$, hiszen $F \cap \overline{E} = \emptyset$. Ebből $\overline{C} = E \cup F$ miatt $F = \emptyset$ következne, holott $F \neq \emptyset$; ezért $C \cap F \neq \emptyset$. ■

Láttuk, hogy összefüggő halmaz lezártja összefüggő, azonban létezik ívszerűen összefüggő halmaz, amelynek a lezártja nem ívszerűen összefüggő, bár összefüggő. Például a $C := [0,1] \times \{(t, sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}^+\}$ halmaz összefüggő, mert az $\mathbb{R}^+$ halmaz összefüggő az euklidészi metrika szerint, és az

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (t, sin(1/t))$$

leképezés az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R}^2$ feletti euklidészi metrikák szerint folytonos, vagyis f $\mathbb{R}^2$-ben haladó folytonos görbe, ezért $Im(f)$ ívszerűen összefüggő halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, így összefüggő is. Ezért $\overline{Im(f)}$ is összefüggő, ugyanakkor $C = \overline{Im(f)}$, vagyis C összefüggő. Azonban igazolható, hogy C nem ívszerűen összefüggő halmaz $\mathbb{R}^2$-ben.

Habár az összefüggőségből általában nem következtethetünk az ívszerű összefüggőségre, létezik egy speciális halmaztípus, amelyre vonatkozóan az összefüggőség ekvivalens az ívszerű összefüggőséggel. Erről szól a következő tétel.

Tétel. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz. A következő állítások ekvivalensek.

a) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz és minden $\Omega \ni x, y$-hoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$.

b) Minden $\Omega \ni x, y$-hoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$.

c) Az Ω halmaz ívszerűen összefüggő.

d) Az Ω halmaz összefüggő.

Bizonyítás. a)⇒b) Triviális.

b)⇒c) Tegyük fel, hogy b) teljesül, és legyenek $x, y \in \Omega$. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan E-ben haladó $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszert, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$. Értelmezzük a $\gamma : [0,1] \to E$ függvény úgy, hogy $\gamma(1) := y$, és minden $t \in [0, 1[$ esetén

$$\gamma(t) := (1 - \{nt\}).z_{[nt]} + \{nt\}.z_{[nt]+1},$$

ahol $\{nt\}$ (illetve $[nt]$) az $nt \in [0, n[$ valós szám törtrésze (illetve egészrésze). Könnyen látható, hogy minden $0 \leq k < n$ természetes számra $\gamma(\frac{k}{n}) = z_k$, és γ leszűkítése a $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ intervallumra folytonos, hiszen $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ esetén

$$\gamma(t) = (1 + k - nt).z_k + (nt - k).z_{k+1}.$$

Ebből következik, hogy γ folytonos függvény (7. pont, **2**. gyakorlat), vagyis γ olyan E-ben haladó folytonos ív, amely összeköti az x és y pontokat. Továbbá nyilvánvaló, hogy minden $0 \leq k < n$ természetes számra $\gamma\langle[k/n, (k+1)/n]\rangle = [z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$, következésképpen

$$Im(\gamma) = \bigcup_{k \in n} \gamma\langle[k/n, (k+1)/n]\rangle \subseteq \Omega,$$

vagyis a γ ív Ω-ban halad. Ez azt jelenti, hogy Ω ívszerűen összefüggő halmaz.

c)$\Rightarrow$d) Ez a következtetés tetszőleges metrikus tér tetszőleges Ω részhalmazára igaz.

d)$\Rightarrow$a) Tegyük fel, hogy Ω nem üres és összefüggő, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Rögzítsünk egy $c \in \Omega$ pontot, és jelölje Ω_c azon $x \in \Omega$ pontok halmazát, amelyekhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$.

Először megmutatjuk, hogy Ω_c nyílt halmaz a $d_{\|\cdot\|}$ metrika szerint. Legyen ugyanis $x \in \Omega_c$, és az Ω nyíltsága alapján vegyünk olyan $r \in]0, \varepsilon[$ valós számot, amelyre $B_r(x, d_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszert E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$. Ha $x' \in B_r(x, d_{\|\cdot\|})$ és $z_{n+1} := x'$, akkor a $B_r(x, d_{\|\cdot\|})$ gömb konvexitása folytán $[z_n, z_{n+1}] = [x, x'] \subseteq B_r(x, d_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$; ezért a $(z_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ rendszer olyan, hogy $z_0 = c$, $z_{n+1} = x'$, és minden $0 \leq k < n+1$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $B_r(x, d_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega_c$, vagyis Ω_c nyílt halmaz.

Megmutatjuk, hogy $\overline{\Omega_c} \cap \Omega = \Omega_c$. Legyen $x \in \overline{\Omega_c} \cap \Omega$ rögzített, és ismét az Ω nyíltsága alapján vegyünk olyan $r \in]0, \varepsilon[$ valós számot, amelyre $B_r(x, d_{\|\cdot\|}) \subseteq \Omega$. Ekkor $x \in \overline{\Omega_c}$ miatt $B_r(x, d_{\|\cdot\|}) \cap \Omega_c \neq \emptyset$; legyen x' eleme ennek a halmaznak. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszert E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x'$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$. Ha $z_{n+1} := x$, akkor a $(z_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ rendszer olyan, hogy $z_0 = c$, $z_{n+1} = x$, és minden $0 \leq k < n+1$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$, tehát $x \in \Omega_c$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{\Omega_c} \cap \Omega \subseteq \Omega_c$, és a fordított tartalmazás nyilvánvaló.

Állítjuk, hogy $\Omega = \Omega_c$. Tegyük fel, hogy nem így van, tehát Ω_c valódi részhalmaza Ω-nak, vagyis $\Omega \setminus \Omega_c \neq \emptyset$. Természetesen $c \in \Omega_c$, így $\Omega_c \neq \emptyset$. Ekkor az előző bekezdés alapján $\overline{\Omega_c} \cap (\Omega \setminus \Omega_c) = (\overline{\Omega_c} \cap \Omega) \setminus \Omega_c = \Omega_c \setminus \Omega_c = \emptyset$. Továbbá, ha $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_c} \cap \Omega_c$, akkor Ω_c nyílt környezete x-nek, ezért $(\Omega \setminus \Omega_c) \cap \Omega_c \neq \emptyset$, holott ez a metszethalmaz nyilvánvalóan üres. Ezért $\overline{\Omega \setminus \Omega_c} \cap \Omega_c = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy az $E := \Omega_c$ és $F := \Omega \setminus \Omega_c$ halmazok olyanok, hogy $\Omega = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$, vagyis Ω nem összefüggő halmaz. Tehát az $\Omega \neq \Omega_c$ hipotézis ellentmond a d) feltételnek.

Végül legyenek $x, y \in \Omega$ tetszőlegesek. Az előző bekezdés szerint $x, y \in \Omega_c$, tehát

- van olyan olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer E-ben, hogy $z_0 = c$, $z_n = x$, és minden $0 \leq k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z_k - z_{k+1}\| < \varepsilon$, valamint

- van olyan olyan $n' \in \mathbb{N}$ és olyan $(z'_k)_{0 \le k \le n'}$ rendszer E-ben, hogy $z'_0 = c$, $z'_{n'} = y$, és minden $0 \le k < n'$ természetes számra $[z'_k, z'_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|z'_k - z'_{k+1}\| < \varepsilon$.
Legyen $(u_k)_{0 \le k \le n+n'}$ az az E-ben haladó rendszer, amelyre minden $0 \le k \le n+n'$ esetén

$$u_k := \begin{cases} z_{n-k} & \text{, ha } 0 \le k \le n \\ z'_{k-n} & \text{, ha } n < k \le n+n' \end{cases}.$$

Ekkor $u_0 = x$, $u_{n+n'} = y$, és minden $0 \le k < n+n'$ természetes számra $[u_k, u_{k+1}] \subseteq \Omega$ és $\|u_k - u_{k+1}\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy Ω-ra a) teljesül. ■

Állítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(C_i)_{i \in I}$ az M összefüggő részhalmazainak tetszőleges rendszere. Ha létezik olyan $x \in M$, amelyre minden $i \in I$ esetén $x \in C_i$, akkor $\bigcup\limits_{i \in I} C_i$ összefüggő halmaz.

Bizonyítás. Ha $I = \emptyset$, akkor $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = \emptyset$, tehát az állítás igaz, így feltehető, hogy $I \neq \emptyset$.
Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\bigcup\limits_{i \in I} C_i$ nem összefüggő, és veszünk olyan $E, F \subseteq M$ halmazokat, amelyekre $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = \overline{F} \cap E$. Ha $i \in I$, akkor nyilvánvalóan $C_i = (C_i \cap E) \cup (C_i \cap F)$ és $\overline{C_i \cap E} \cap (C_i \cap F) \subseteq \overline{E} \cap F = \emptyset$, valamint $(C_i \cap E) \cap \overline{C_i \cap F} \subseteq E \cap \overline{F} = \emptyset$, így C_i összefüggősége miatt $C_i \cap E = \emptyset$ *vagy* $C_i \cap F = \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap\limits_{i \in I} C_i$ rögzített elem. Ekkor $x \in E \cup F$, tehát x az E és F diszjunkt halmazok közül pontosan az egyiknek eleme. Ha $x \in E$, akkor minden $i \in I$ esetén $x \in C_i \cap E$, ezért $C_i \cap F = \emptyset$. Ekkor $F = \bigcup\limits_{i \in I} (C_i \cap F) = \emptyset$, holott $F \neq \emptyset$. Ezért $x \in F$, következésképpen minden $i \in I$ esetén $x \in C_i \cap F$, így $C_i \cap E = \emptyset$. Ekkor viszont $E = \bigcup\limits_{i \in I} (C_i \cap E) = \emptyset$, holott $E \neq \emptyset$, és ez ellentmondás. ■

Állítás. Ha (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$ nem üres összefüggő halmaz, akkor egyértelműen létezik M-nek olyan összefüggő részhalmaza, amely C-t tartalmazza, és amely tartalmazás tekintetében a legnagyobb a C halmazt tartalmazó összefüggő M-beli részhalmazok között.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint a C halmazt tartalmazó M-beli összefüggő részhalmazok *uniója* összefüggő, és természetesen tartalmazza az M minden olyan összefüggő részhalmazát, amely tartalmazza C-t. ■

Definíció. Ha (M, d) metrikus tér és $C \subseteq M$ nem üres összefüggő halmaz, akkor a tartalmazás tekintetében legnagyobb, C-t tartalmazó M-beli összefüggő részhalmazt a C *összefüggő komponensének* nevezzük (a d metrika szerint). Ha (M, d) metrikus tér és $x \in M$, akkor az $\{x\}$ nem üres összefüggő halmaz összefüggő komponensét az x *pont összefüggő komponensének* nevezzük (a d metrika szerint).

Állítás. Metrikus térben nem üres összefüggő halmaz összefüggő komponense zárt halmaz.

Bizonyítás. Egy C nem üres összefüggő halmaz összefüggő komponensének a lezártja összefüggő és tartalmazza a C halmazt, ezért részhalmaza a C összefüggő komponensének. ■

Gyakorlatok

1. Metrikus térben egy véges halmaz pontosan akkor összefüggő, ha legfeljebb egy elemű.

2. Ha (M, d) olyan összefüggő metrikus tér, hogy M nem korlátos halmaz, akkor semmilyen M-beli gömbfelület nem üres halmaz.

(*Útmutatás.* Ha $\mathfrak{a} \in M$, akkor a $d(\mathfrak{a}, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ (egyenletesen) folytonos függvény értékkészlete, a Bolzano-tétel alapján, egyenlő az $\mathbb{R}_+$ intervallummal.)

3. Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $x \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor legyen $E(x, \varepsilon)$ azon $y \in M$ pontok halmaza, amelyekhez van olyan $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan M-ben haladó $(x_k)_{0 \le k \le n}$ rendszer, amelyre $x_0 = x$, $x_n = y$ és minden $k < n$ természetes számra $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$.

a) Minden $M \ni x$-re és $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra az $E(x, \varepsilon)$ halmaz nyílt-zárt.

b) Ha (M, d) kompakt, akkor minden $x \in M$ pontra a $\bigcap\limits_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} E(x, \varepsilon)$ halmaz megegyezik az x pont nyílt-zárt környezeteinek a metszetével.

4. Legyen (M, d) olyan kompakt metrikus tér, amelyre minden $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $\overline{B}_r(x; d) = \overline{B_r(x; d)}$ teljesül. Ekkor M-ben minden gömb összefüggő halmaz.

(*Útmutatás.* Legyenek $x, y \in M$, $x \neq y$ és $B := B_{d(y,x)}(x; d)$. Ekkor minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra fennáll a

$$\{z \in M | d(z, x) < d(y, z)\} \subseteq E(y, \varepsilon)$$

tartalmazás (**3**. gyakorlat). Ebből a Weierstrass-féle maximum-minimum elv alkalmazásával, indirekt bizonyítással kapjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra $x \in E(y, \varepsilon)$, és ebből következik az állítás.)

5. Legalább kétdimenziós normált térben minden gömbfelület ívszerűen összefüggő halmaz.

6. Összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) halmazok véges rendszerének a szorzata a szorzatmetrika szerint összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő).

7. Ha (M, d) metrikus tér, és $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az M összefüggő részhalmazainak olyan sorozata, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$, akkor $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$ összefüggő halmaz.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $B_n := \bigcup\limits_{k=0}^{n} C_k$ halmaz összefüggő, és a $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat metszete egyenlő C_0-lal, amely nem üres, így $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$ összefüggő. Továbbá nyilvánvaló, hogy $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$.)

11. Függvénysorozatok és függvénysorok határértéke

Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Im(f_n) \subseteq M$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *pontonkénti limeszfüggvényének* nevezzük (a d metrika szerint) és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$-nel jelöljük azt a függvényt, amelyre

$$Dom\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) :=$$
$$:= \{x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Dom(f_n) | \text{"az } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ sorozat konvergens a } d \text{ metrika szerint"}\},$$

és minden $x \in Dom\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ esetén

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Definíció. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $Im(f_k) \subseteq E$. Az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *pontonkénti összegfüggvényének* nevezzük (a $\|\cdot\|$ norma szerint) és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$-val jelöljük azt a függvényt, amelyre

$$Dom\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right) :=$$
$$:= \{x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Dom(f_k) | \text{"a } \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \text{ sor konvergens a } d_{\|\cdot\|} \text{ metrika szerint"}\},$$

és minden $x \in Dom\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\right)$ esetén

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Nyilvánvaló, hogy egy függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvénye, illetve pontonkénti összegfüggvénye lehet az *üres függvény*. Világos, hogy a pontonkénti limeszfüggvény, illetve pontonkénti összegfüggvény fogalma *topologikus fogalom*, hiszen a sorozatok, illetve sorok konvergenciájának fogalma is az.

Példák 1) Legyen (M, d) metrikus tér és $F \subseteq M$ zárt halmaz. Van olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tartalmazás tekintetében monoton fogyó nyílt halmazsorozat, hogy

$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Kiválaszthatunk olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : M \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy minden $M \ni x$-re $0 \le f(x) \le 1$, és $supp(f_n) \subseteq \Omega_n$, valamint $F \subseteq \{x \in M | f_n(x) = 1\}$. Ekkor fennáll a $\chi_F = \lim_{n\to\infty} f_n$ egyenőség, ugyanis $x \in F$ esetén $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ az 1 értékű állandó sorozat, tehát $\chi_F(x) = 1 = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, továbbá $x \in M \setminus F$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $x \notin \Omega_n$; ekkor minden $n > N$ természetes számra $f_n(x) = 0$, tehát $\chi_F(x) = 0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ez azt jelenti, hogy a χ_F függvény előáll folytonos függvények pontonkénti limeszfüggvényeként, holott χ_F nem folytonos függvény, ha F nem nyílt-zárt halmaz.

2) Legyen $\boldsymbol{a}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, $c \in \mathbb{K}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{a}(k)(id_{\mathbb{K}} - c)^k.$$

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ függvény, és a definíció szerint ez a függvénysorozat *egyenlő* a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysorral, továbbá a $\lim_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény *egyenlő* a $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ összegfüggvénnyel, ami viszont a definíció alapján egyenlő a $P_{\boldsymbol{a},c}$ hatványfüggvénnyel. Ezért a Cauchy-Hadamard tétel szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k)(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor pontonként konvergens a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c; \mathbb{K})$ gömbön, ahol

$$R_{\boldsymbol{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k}} & \text{, ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}(k)|^{1/k} = 0, \end{cases}$$

és minden $z \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c; \mathbb{K})$ pontra $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(z - c)^k = P_{\boldsymbol{a},c}(z)$, vagyis $P_{\boldsymbol{a},c} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k)(id_{\mathbb{K}} - c)^k$.

Az 1) példa szerint metrikus terek között ható folytonos függvények pontonkénti limeszfüggvénye nem feltétlenül folytonos; ezt a tényt úgy is kifejezhetjük, hogy a folytonosság *nem öröklődik* a pontonkénti limeszfüggvényre. Később majd bevezetjük a normált terek között ható függvények differenciálhatóságának fogalmát, majd még később a mértéktéren értelmezett, Banach-térbe ható függvények integrálhatóságának fogalmát, és látni fogjuk, hogy sem a differenciálhatóság, sem az integrálhatóság nem öröklődik automatikusan a pontonkénti limeszfüggvényre.

Ezért felvetődik az a kérdés, hogy milyen konvergencia-fogalmat lehet bevezetni függvénysorozatokra úgy, hogy az erősebb legyen a pontonkénti konvergenciánál,

és az e szerint konvergens függvénysorozatok limeszfüggvényei már örököljék a függvények fent említett analitikus tulajdonságait? Ebből a szempontból fontos bevezetni az *egyenletes konvergencia* fogalmát.

Itt arról van szó, hogy ha (M, d) metrikus tér, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Im(f_n) \subseteq M$, továbbá $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, akkor minden $E \subseteq Dom(f)$ halmazra teljesül az, hogy

$$(\forall t \in E)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon).$$

Tehát minden $t \in E$ ponthoz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan t-től és ε-tól függő $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden N-nél nagyobb n természetes számra az $f_n(t)$ és $f(t)$ pontok d szerinti távolsága kisebb ε-nál. Adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén a legkisebb ilyen tulajdonságú küszöbindexek is a $t \in E$ ponttól lényegesen függenek, és egyáltalán nem biztos az, hogy lehet olyan t-től független $N \in \mathbb{N}$ számot találni, hogy minden N-nél nagyobb n természetes számra és minden $t \in E$ pontra $d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon$ teljesüljön. Vagyis előfordulhat az, hogy a

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(\forall t \in E)(n > N \Rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

kijelentés nem igaz, bár az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az E halmazon. Láthatóan ennek az a *logikai oka*, hogy ha $\boldsymbol{A}$ kijelentés és $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ különböző változók, akkor a $((\forall \boldsymbol{x})(\exists \boldsymbol{y})\boldsymbol{A}) \Rightarrow ((\exists \boldsymbol{y})(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{A})$ kijelentés *nem logikai tétel.*

Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Im(f_n) \subseteq M$ és $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergens az E halmazon* (a d metrika szerint), ha $E \subseteq Dom(f)$ (tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az E halmazon), és

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(\forall t \in E)(n > N \Rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

Definíció. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Dom(f_n) \subseteq M$ és $Im(f_n) \subseteq M'$. Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *lokálisan egyenletesen konvergens az E halmazon* (a d és d' metrikák szerint), ha $E \subseteq Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$, és az E minden pontjának létezik olyan V környezete (a d metrika szerint), hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $V \cap E$ halmazon (a d' metrika szerint).

A definícióból látható, hogy ha egy függvénysorozat egyenletesen (illetve lokálisan egyenletesen) konvergens egy halmazon, akkor annak minden részhalmazán egyenletesen (illetve lokálisan egyenletesen) konvergens. Az is nyilvánvaló, hogy ha egy metrikus térből metrikus térbe vezető függvényekből álló sorozat egyenletesen konvergens egy halmazon, akkor azon lokálisan is egyenletesen konvergens; ennek megfordítása általában nem igaz.

Állítás. Legyen T nem üres halmaz, (M,d) nem üres metrikus tér, és tekintsük a $T \to M$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;M)$ halmazát. Értelmezzük a következő $\mathbf{d}$ leképezést:

$$\mathbf{d} : \mathscr{F}^b(T;M) \times \mathscr{F}^b(T;M) \to \mathbb{R}_+; \quad (f,g) \mapsto \sup_{t\in T} d(f(t),g(t)).$$

Ekkor $\mathbf{d}$ metrika az $\mathscr{F}^b(T;M)$ halmaz felett, és minden $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$ függvényre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ a $\mathbf{d}$ metrika szerint pontosan akkor teljesül, ha $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a T halmazon. Ha az (M,d) metrikus tér teljes, akkor az $(\mathscr{F}^b(T;M),\mathbf{d})$ metrikus tér is teljes.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy ha $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor $\mathbf{d}(f,g)$ *véges*, mert $Im(f)$ és $Im(g)$ korlátossága miatt léteznek olyan $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in M$ pontok és $r,s \in \mathbb{R}^+$ számok hogy $Im(f) \subseteq B_r(\mathfrak{a};d)$ és $Im(g) \subseteq B_s(\mathfrak{b};d)$; ekkor minden $t \in T$ esetén $d(f(t),g(t)) \le d(f(t),\mathfrak{a}) + d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + d(\mathfrak{b},g(t)) < r + d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + s$, így $\mathbf{d}(f,g) \le r + d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + s$.

Ha $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor $\mathbf{d}(f,g) = 0$ esetén minden $t \in T$ esetén $d(f(t),g(t)) \le \mathbf{d}(f,g) = 0$ miatt $d(f(t),g(t)) = 0$, így $f(t) = g(t)$. Ez azt jelenti, hogy $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$ esetén a $\mathbf{d}(f,g) = 0$ és $f = g$ kijelentések ekvivalensek.

Ha $f,g \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor a d szimmetriája miatt $\mathbf{d}(f,g) := \sup\limits_{t\in T} d(f(t),g(t)) = \sup\limits_{t\in T} d(g(t),f(t)) =: \mathbf{d}(g,f)$. Ha $f,g,h \in \mathscr{F}^b(T;M)$, akkor minden $T \ni t$-re fennáll a $d(f(t),g(t)) \le d(f(t),h(t)) + d(h(t),g(t)) \le \mathbf{d}(f,h) + \mathbf{d}(h,g)$ egyenlőtlenség, ezért $\mathbf{d}(f,g) \le \mathbf{d}(f,h) + \mathbf{d}(h,g)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{d}$ metrika a $\mathscr{F}^b(T;M)$ halmaz felett.

Legyen $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó sorozat, amelyre $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ a $\mathbf{d}$ metrika szerint. Ez azt jelenti, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow \mathbf{d}(f_n,f) < \varepsilon)$$

teljesül. Nyilvánvalóan ez matematikailag azzal egyenértékű, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow (\forall t \in T)\ d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon),$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(\forall t \in T)(n > N \Rightarrow d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon).$$

Ebből a kijelentésből *logikailag következik* az, hogy

$$(\forall t \in T)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens a T halmazon és $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Ugyanakkor az utolsó előtti formula azt mutatja, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen is konvergens a T halmazon.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó sorozat, amely egyenletesen konvergens a T halmazon, és legyen $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$ olyan függvény, hogy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Ekkor a definíció szerint

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(\forall t \in T)(n > N \Rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

teljesül, ami *logikailag ekvivalens* azzal, hogy

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow (\forall t \in T)\ d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon).$$

Ez viszont nyilvánvalóan maga után vonja azt, hogy

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow \mathbf{d}(f_n, f) := \sup_{t\in T} d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon),$$

ami azt jelenti, hogy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ a $\mathbf{d}$ metrika szerint.

Tegyük fel, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó sorozat, amely a $\mathbf{d}$ metrika szerint Cauchy-sorozat. Ekkor

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)(((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow \mathbf{d}(f_m, f_n) < \varepsilon)$$

teljesül. Nyilvánvalóan ez matematikailag azzal egyenértékű, hogy

$$\begin{gathered}(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)\\ (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow (\forall t \in T)\ d(f_m(t), f_n(t)) < \varepsilon),\end{gathered}$$

ami logikailag ekvivalens azzal, hogy

$$\begin{gathered}(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)(\forall t \in T)\\ (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow d(f_m(t), f_n(t)) < \varepsilon).\end{gathered}$$

Ebből logikailag következik, hogy

$$\begin{gathered}(\forall t \in T)(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(\forall n \in N)\\ (((m > N) \wedge (n > N)) \Rightarrow d(f_m(t), f_n(t)) < \varepsilon),\end{gathered}$$

ami pontosan azt jelenti, hogy minden $t \in T$ esetén az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a d metrika szerint Cauchy-sorozat M-ben.

Tegyük most fel, hogy (M, d) teljes metrikus tér. Ekkor a fentiek szerint minden $t \in T$ esetén az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens M-ben a d metrika szerint, vagyis a $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens T-n; legyen $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Meg fogjuk mutatni, hogy $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$, és az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\mathbf{d}$ metrika szerint konvergál f-hez.

Az f pontonkénti limeszfüggvény korlátosságának bizonyításához megjegyezzük, hogy az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos a $\mathbf{d}$ metrika szerint (hiszen Cauchy-sorozat $\mathbf{d}$ szerint), ezért vehetünk olyan $h \in \mathscr{F}^b(T;M)$ függvényt és $r \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n \in B_r(h;\mathbf{d})$, így minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ esetén

$d(f_n(t), h(t)) \leq \mathbf{d}(f_n, h) < r$. A h függvény korlátos, tehát van olyan $\mathfrak{a} \in M$ és $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $Im(h) \subseteq B_s(\mathfrak{a}; d)$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ esetén $d(f_n(t), \mathfrak{a}) \leq d(f_n(t), h(t)) + d(h(t), \mathfrak{a}) < r + s$, tehát minden $t \in T$ pontra

$$d(f(t), \mathfrak{a}) := d(\lim_{n\to\infty} f_n(t), \mathfrak{a}) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(t), \mathfrak{a}) \leq r + s,$$

vagyis $Im(f) \subseteq B_{r+s}(\mathfrak{a}; d)$, azaz $f \in \mathscr{F}^b(T; M)$. Láthatóan itt az átviteli elvet alkalmaztuk a $d(\cdot, \mathfrak{a}) : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre.

Azt kell még igazolni, hogy az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\mathbf{d}$ metrika szerint konvergál f-hez. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ valós számot. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, $m > N$ és $n > N$ esetén $\mathbf{d}(f_m, f_n) < \varepsilon'$. Ha $t \in T$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > N$, akkor minden $m > N$ természetes számra $d(f_m(t), f_n(t)) \leq \mathbf{d}(f_m, f_n) < \varepsilon'$, ezért az átviteli elvet alkalmazva a $d(\cdot, f_n(t)) : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre kapjuk, hogy

$$d(f(t), f_n(t)) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(t), f_n(t)) \leq \varepsilon',$$

ezért $\mathbf{d}(f, f_n) := \sup_{t\in T} d(f(t), f_n(t)) \leq \varepsilon' < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\mathbf{d}$ metrika szerint konvergál f-hez. Tehát ha (M, d) teljes metrikus tér, akkor az $(\mathscr{F}^b(T; M), \mathbf{d})$ metrikus tér is teljes. ■

Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) nem üres metrikus tér, és $\mathscr{F}^b(T; M)$ a $T \to M$ korlátos függvények halmaza. Ekkor a

$$\mathscr{F}^b(T; M) \times \mathscr{F}^b(T; M) \to \mathbb{R}_+; \quad (f, g) \mapsto \sup_{t\in T} d(f(t), g(t))$$

leképezést a (d által meghatározott) *sup-metrikának* nevezzük $\mathscr{F}^b(T; M)$ felett. Azt mondjuk, hogy a $\mathscr{F}^b(T; M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *egyenletesen korlátos az $E \subseteq T$ halmazon* (a d metrika szerint), ha az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n\langle E\rangle$ halmaz korlátos M-ben a d metrika szerint.

Könnyen látható, hogy ha T nem üres halmaz és (M, d) nem üres metrikus tér, akkor egy $\mathscr{F}^b(T; M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor egyenletesen korlátos a T halmazon, ha az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Im(f_n)$ halmaz korlátos M-ben a d metrika szerint, ami ekvivalens azzal, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a sup-metrika szerint korlátos.

Állítás. Legyen T nem üres halmaz és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a $T \to F$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T; F)$ vektortere felett a $d_{\|\cdot\|}$ által meghatározott sup-metrika *normálható* a

$$\|\cdot\|_{sup} : \mathscr{F}^b(T; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in T} \|f(t)\|$$

normával, tehát az $(\mathscr{F}^b(T; F), \|\cdot\|_{sup})$ pár olyan normált tér, amelyre $d_{\|\cdot\|_{sup}}$ egyenlő a $d_{\|\cdot\|}$ által meghatározott sup-metrikával. Ha $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor $(\mathscr{F}^b(T; F), \|\cdot\|_{sup})$ is Banach-tér.

Bizonyítás. Triviális. ■

Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(F, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\mathscr{F}^b(T;F)$ a $T \to F$ korlátos függvények vektortere. Ekkor a

$$\mathscr{F}^b(T;F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in T} \|f(t)\|$$

leképezést a ($\|\cdot\|$ által meghatározott) *sup-normának* nevezzük $\mathscr{F}^b(T;F)$ felett.

Állítás. Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $M \rightarrowtail M'$ függvény. Ha $\mathfrak{a} \in Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ olyan pont, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, és létezik olyan W környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmazon, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény is folytonos a $\mathfrak{a}$ pontban.

Bizonyítás. Legyen $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, és V' tetszőleges környezete $f(\mathfrak{a})$-nak M'-ben a d' metrika szerint. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_\varepsilon(f(\mathfrak{a}), d') \subseteq V'$, és válasszunk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon/3[$ valós számot. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap Dom(f)$ halmazon, ezért az ε'-höz vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n > N$ természetes számra, és minden $x \in W \cap Dom(f)$ pontra $d'(f(x), f_n(x)) < \varepsilon'$. Ekkor $\mathfrak{a} \in W \cap Dom(f)$ miatt minden $n > N$ természetes számra $d'(f(\mathfrak{a}), f_n(\mathfrak{a})) < \varepsilon'$ is teljesül. Tehát ha $n > N$ tetszőleges természetes szám, akkor minden $x \in W \cap Dom(f)$ pontra

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(\mathfrak{a})) \le d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(\mathfrak{a})) + d'(f_n(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{a})) < \\ < \varepsilon' + d'(f_n(x), f_n(\mathfrak{a})) + \varepsilon' \end{aligned}$$

teljesül. Rögzítsünk egy $n > N$ természetes számot. Az f_n függvény az $\mathfrak{a}$ pontban folytonos, ezért az ε'-höz van olyan V környezete $\mathfrak{a}$-nak M-ben a d metrika szerint, hogy minden $x \in V \cap Dom(f_n)$ pontra $d'(f_n(x), f_n(\mathfrak{a})) < \varepsilon'$; ekkor az előzőek alapján minden $x \in V \cap W \cap Dom(f)$ pontra $d'(f(x), f(\mathfrak{a})) < 3\varepsilon' < \varepsilon$, így $f\langle V \cap W\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a}), d') \subseteq V'$, ami azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Következmény. Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $M \rightarrowtail M'$ folytonos függvény. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a $Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmazon, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény folytonos.

Bizonyítás. A feltétel szerint minden $\mathfrak{a} \in Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ pontnak létezik olyan W környezete, amelyre az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmazon, ezért az előző állítás alapján a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Speciálisan, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmazon egyenletesen konvergens, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n folytonos, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény folytonos.

Következmény. Legyen (M,d) metrikus tér és $(F,\|\cdot\|)$ normált tér. Az $M \to F$ folytonos és korlátos függvények $\mathscr{C}^b(M;F)$ halmaza a sup-norma szerint *zárt* lineáris altere az $(\mathscr{F}^b(M;F),\|\cdot\|_{sup})$ normált térnek. Ha $(F,\|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor $\mathscr{C}^b(M;F)$ a sup-norma szerint *teljes* halmaz $\mathscr{F}^b(M;F)$-ben.

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{F}^b(M;F)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{C}^b(M;F)$-ben haladó sorozat, amely a sup-norma szerint konvergál f-hez, akkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon, és f egyenlő a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvénnyel, ezért f is folytonos, azaz $f \in \mathscr{C}^b(M;F)$. A zárt halmazok sorozatokkal való jellemzése szerint ez azt jelenti, hogy $\mathscr{C}^b(M;F)$ a sup-norma szerint zárt. Ha $(F,\|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor $(\mathscr{F}^b(M;F),\|\cdot\|_{sup})$ is Banach-tér, ezért ennek minden zárt részhalmaza teljes. ■

Állítás. Legyenek (M,d) és (M',d') metrikus terek, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $M \rightarrowtail M'$ függvény. Legyen $\mathfrak{a}$ torlódási pontja a $Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmaznak, és tegyük fel, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n-nek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban. Ha létezik olyan W környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmazon, akkor $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, és ha ez a sorozat konvergens is, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvénynek létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban és

$$\lim_{\mathfrak{a}}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathfrak{a}} f_n\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és jelölje W az $\mathfrak{a}$-nak olyan környezetét, amelyre az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W \cap Dom(f)$ halmazon.

Először megmutatjuk, hogy a $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a d' metrika szerint Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és válasszunk egy $\varepsilon' \in]0,\varepsilon/4[$ valós számot. A W definíciója alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra és minden $x \in W \cap Dom(f)$ pontra $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon'$. Legyenek $m,n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $m > N$ és $n > N$. Az f_m-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban határértéke, ezért van olyan V_m környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $f_m\langle V_m \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_{\varepsilon'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_m; d')$. Ugyanakkor f_n-nek létezik $\mathfrak{a}$-ban határértéke, ezért van olyan V_n környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $f_n\langle V_n \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle \subseteq B_{\varepsilon'}(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n; d')$. Ekkor $V_m \cap V_n \cap W$ környezete $\mathfrak{a}$-nak, és $\mathfrak{a}$ torlódási pontja $Dom(f)$-nek, ezért rögzíthetünk egy $x \in V_m \cap V_n \cap W$ pontot, amely $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-nek is eleme. Ekkor fennállnak a

$$d'(\lim_{\mathfrak{a}} f_m, f_m(x)) < \varepsilon';$$
$$d'(f_m(x), f_n(x)) \le d'(f_m(x), f(x)) + d'(f(x), f_n(x)) < 2\varepsilon';$$
$$d'(f_n(x), \lim_{\mathfrak{a}} f_n) < \varepsilon'.$$

egyenlőtlenségek, amiket összeadva

$$d'(\lim_{\mathfrak{a}} f_m, \lim_{\mathfrak{a}} f_n) < 4\varepsilon' < \varepsilon$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy a $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a d' metrika szerint Cauchy-sorozat.

Most tegyük fel, hogy az M'-ben haladó $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a d' metrika szerint konvergens; megmutatjuk, hogy ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n\right)$ az f függvénynek határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban.

Ehhez legyen minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\tilde{f}_n{:}M\rightarrowtail M'$ az a függvény, amelyre $Dom(\tilde{f}_n) := Dom(f_n)\cup\{\mathfrak{a}\}$, és $\tilde{f}_n = f_n$ a $Dom(f_n)\setminus\{\mathfrak{a}\}$ halmazon, valamint $\tilde{f}_n(\mathfrak{a}) := \lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n$. Ekkor minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\tilde{f}_n$ folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért az $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvénye az az $\tilde{f} : M \rightarrowtail M'$ függvény, amelyre $Dom(\tilde{f}) := Dom(f)\cup\{\mathfrak{a}\}$, és $\tilde{f} = f$ a $Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\}$ halmazon, továbbá $\tilde{f}(\mathfrak{a}) := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n\right)$. Könnyen látható, hogy az $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $W\cap Dom(\tilde{f})$ halmazon, ezért az $\tilde{f}$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, így $\tilde{f}$-nak létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\lim\limits_{\mathfrak{a}}\tilde{f} = \tilde{f}(\mathfrak{a})$. De $\tilde{f} = f$ a $W\cap(Dom(f)\setminus\{\mathfrak{a}\})$ halmazon, tehát a határérték lokalitása miatt f-nek is létezik határértéke az $\mathfrak{a}$ pontban, és

$$\lim_{\mathfrak{a}}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) =: \lim_{\mathfrak{a}} f = \lim_{\mathfrak{a}}\tilde{f} = \tilde{f}(\mathfrak{a}) := \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathfrak{a}} f_n\right),$$

amivel az állítást bebizonyítottuk. ■

Ha az (M', d') metrikus tér *teljes*, akkor az előző állításban felesleges kikötni (a többi feltétel mellett), hogy a $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Azonban lényeges az, hogy $\mathfrak{a}$ torlódási pontja legyen a $Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmaznak, ugyanis előfordulhat az, hogy a tétel összes többi feltétele teljesül, de $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja a $Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmaznak, így aztán a $\lim\limits_{\mathfrak{a}}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$ határértékről nem is beszélhetünk (**7.** a) gyakorlat). Ha $\mathfrak{a}$ nem torlódási pontja a $Dom(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$ halmaznak, akkor lehetséges az, hogy a tétel többi feltétele teljesül, de $(\lim\limits_{\mathfrak{a}} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nem Cauchy-sorozat* (**7.** b) gyakorlat).

Természetesen szükségtelen külön definíciót adni normált térbe vezető függvények sorozatához asszociált függvénysor egyenletes, illetve lokális egyenletes konvergenciájára, hiszen ezek a függvénysorok speciális függvénysorozatok. Azonban a függvénysorokra bevezethető két olyan konvergencia-fogalom, amely függvénysorozatokra általában értelmetlen.

Definíció. Legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja F-be érkező függvény. Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor az E halmazon *pontonként abszolút konvergens*, ha $E\subseteq\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} Dom(f_k)$, és minden $t\in E$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k(t)$ vektorsor abszolút konvergens F-ben a $\|\cdot\|$ norma szerint (vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\|f_k(t)\|$ numerikus sor konvergens $\mathbb{R}$-ben). Azt

mondjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor az E halmazon *normálisan konvergens*, ha $E \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Dom(f_k)$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\sup_{t\in E} \|f_k(t)\| < +\infty$, továbbá a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{t\in E} \|f_k(t)\|\right)$ numerikus sor konvergens $\mathbb{R}$-ben.

A majoráns kritérium alapján nyilvánvaló, hogy ha egy függvénysor normálisan konvergens egy halmazon, akkor azon pontonként abszolút konvergens is, de ennek a következtetésnek a megfordítása nem igaz.

Állítás. (*Weierstrass tétele a normális konvergenciáról.*) Legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja F-be érkező függvény. Ha E olyan halmaz, amelyen a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor normálisan konvergens, és $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens az E halmazon.

Bizonyítás. Legyen $f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $c_k := \sup_{t\in E} \|f_k(t)\| < +\infty$. A $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor pontonként abszolút konvergens az E halmazon és $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, ezért a függvénysor pontonként is konvergens is az E halmazon, vagyis $E \subseteq Dom(f)$. A feltevés szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sum_{k=N}^{\infty} c_k < \varepsilon$; ekkor minden $n > N$ természetes számra és $t \in E$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} c_k < \varepsilon,$$

tehát a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens az E halmazon. ■

Definíció. Legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $c \in \mathbb{K}$ és $\boldsymbol{a}$ F-ben haladó vektorsorozat. Ekkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$$

függvénysort c centrumú, $\boldsymbol{a}$ együtthatójú *hatványfüggvény-sornak* nevezzük, és az összegfüggvényét c centrumú, $\boldsymbol{a}$ együtthatójú *hatványfüggvénynek* nevezzük.

A hatványfüggvény-sorok konvergenciájára vonatkozik a Cauchy-Hadamard tétel.

Tétel. (*Cauchy-Hadamard tétel.*) Legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $\boldsymbol{a}$ F-ben haladó vektorsorozat és

$$R_{\boldsymbol{a}} := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{a}(k)\|^{1/k}} & \text{, ha } 0 < \limsup\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{a}(k)\|^{1/k} < +\infty, \\ 0 & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{a}(k)\|^{1/k} = +\infty, \\ +\infty & \text{, ha } \limsup\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{a}(k)\|^{1/k} = 0. \end{cases}$$

a) Minden $c\in\mathbb{K}$ pontra és $r \in]0, R_{\boldsymbol{a}}[$ valós számra a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor normálisan konvergens a $\overline{B}_r(c;\mathbb{K})$ gömbön, és a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon pontonként abszolút konvergens.

b) Ha $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor minden $c\in\mathbb{K}$ pontra a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor lokálisan egyenletesen konvergens a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon, és a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ összegfüggvény ezen a halmazon folytonos függvény.

Bizonyítás. Legyen $c \in \mathbb{K}$ rögzített.

Legyen $r \in]0, R_{\boldsymbol{a}}[$ tetszőleges valós szám, és vegyünk egy $r' \in]r, R_{\boldsymbol{a}}[$ valós számot. Ekkor $\limsup\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{a}(k)\|^{1/k} < 1/r'$ teljesül, ezért a lim sup definíciója alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra $\|\boldsymbol{a}(k)\|^{1/k} < 1/r'$. Ezért minden $k > N$ természetes számra és minden $z \in \overline{B}_r(c;\mathbb{K})$ pontra

$$\left\|\boldsymbol{a}(k).(z-c)^k\right\| = \|\boldsymbol{a}(k)\||z-c|^k \le \left(\frac{r}{r'}\right)^k,$$

így $k \in \mathbb{N}$ és $k > N$ esetén

$$\sup_{z\in\overline{B}_r(c;\mathbb{K})} \left\|\boldsymbol{a}(k).(z-c)^k\right\| \le \left(\frac{r}{r'}\right)^k.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \le N$, akkor

$$\sup_{z\in\overline{B}_r(c;\mathbb{K})} \left\|\boldsymbol{a}(k).(z-c)^k\right\| < +\infty,$$

mert az $\boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k : \mathbb{K} \to F$ függvény folytonos és $\overline{B}_r(c;\mathbb{K})$ kompakt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Ebből a majoráns kritérium alapján kapjuk, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{z\in\overline{B}_r(c;\mathbb{K})} \left\|\boldsymbol{a}(k).(z-c)^k\right\| \right)$$

numerikus sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor normálisan konvergens a $\overline{B}_r(c;\mathbb{K})$ halmazon. Ebből az is következik, hogy a

$\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}}-c)^k$ hatványfüggvény-sor pontonként abszolút konvergens a $\overline{B}_r(c;\mathbb{K})$ gömbön.

Ha $z \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ és $r > 0$ olyan valós szám, hogy $r + |z-c| < R_{\boldsymbol{a}}$, akkor az előzőek szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor normálisan konvergens a $\overline{B}_{r+|z-c|}(c;\mathbb{K})$ gömbön, tehát a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k$ sor abszolút konvergens. Ezért a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor pontonként abszolút konvergens a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon. Ezzel a)-t bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér. Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$, továbbá S_0 a $\mathbb{K} \to F$ azonosan 0 függvény. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $S_n : \mathbb{K} \to F$ folytonos függvény és a definíció szerint $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$. Ha $z \in B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ és $r > 0$ olyan valós szám, hogy $r + |z-c| < R_{\boldsymbol{a}}$, akkor előzőek szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor normálisan konvergens a $\overline{B}_{r+|z-c|}(c;\mathbb{K})$ gömbön, és $B_r(z;\mathbb{K}) \subseteq \overline{B}_{r+|z-c|}(c;\mathbb{K})$, tehát a $B_r(z;\mathbb{K})$ gömbön is normálisan konvergens. Ezért az egyenletes konvergencia Weierstrass-kritériuma alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor egyenletesen konvergens a $B_r(z;\mathbb{K})$, ami azt jelenti, hogy ez a függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon, tehát az összegfüggvény folytonos is ezen a halmazon. ■

Azonban sok esetben a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ függvénysor nem egyenletesen konvergens a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazon. Megjegyezzük még, hogy az $R_{\boldsymbol{a}} \in \overline{R}_+$ elemet ismét a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor *konvergencia sugarának*, és a $B_{R_{\boldsymbol{a}}}(c;\mathbb{K})$ halmazt a hatványfüggvény-sor *abszolút konvergencia-tartományának* nevezzük.

Lemma. Legyen $(F, \|\cdot\|)$ normált tér és $\sum_{k\in\mathbb{N}} z_k$ tetszőleges F-ben haladó konvergens sor. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $C_n := \sup_{p\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} z_k \right\| < +\infty$, és a $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat $\mathbb{R}$-ben nullához konvergál.

Bizonyítás. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\geq n} z_k$ sor is konvergens F-ben, ezért a $\left(\sum_{k=n}^{n+p} z_k\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, tehát korlátos is, ami éppen azt jelenti, hogy $C_n < +\infty$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A $\sum_{k\in\mathbb{N}} z_k$ sor konvergens, ezért Cauchy-sorozat, így létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra, ha $m > N$ és $n > N$, akkor

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} z_k - \sum_{k=0}^{n} z_k \right\| < \varepsilon.$$

Ekkor $n, p \in \mathbb{N}$ és $n > N + 1$ esetén

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} z_k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n+p} z_k - \sum_{k=0}^{n-1} z_k \right\| < \varepsilon,$$

következésképpen $C_n \leq \varepsilon$, vagyis $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben. ■

Tétel. (*Abel tétele hatványfüggvény-sor összegfüggvényének radiális folytonosságáról.*) Legyen $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $\boldsymbol{a}$ F-ben haladó sorozat, $c \in \mathbb{K}$ és $f := \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$. Tegyük fel, hogy $0 < R_{\boldsymbol{a}} < +\infty$, és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z - c| = R_{\boldsymbol{a}}$. Ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(z - c)^k$ vektorsor konvergens, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor egyenletesen konvergens a $[c, z]$ szakaszon, és az $f|_{[c,z]}$ leszűkített függvény folytonos a z pontban (a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi metrika $[c, z]$ szakaszra vett leszűkítése szerint), és fennáll a $\lim_z \left(f|_{[c,z]}\right) = f(z)$ egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $x \in [c, z[$ tetszőleges; ekkor $(x - c)/(z - c) \in [0, 1[$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{a}(k).(x - c)^k \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(x - c)^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \boldsymbol{a}(k).(x - c)^k \right\|.$$

Ha $x \in [c, z[$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $m \in \mathbb{N}^+$, akkor felírható a következő Abel-féle átrendezés:

$$\sum_{k=n}^{n+m-1} \boldsymbol{a}(k).(x - c)^k = \sum_{k=n}^{n+m-1} \boldsymbol{a}(k).(z - c)^k \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m-2} \left(\left(\left(\frac{x - c}{z - c}\right)^k - \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^{k+1} \right) \left(\sum_{j=n}^{k} \boldsymbol{a}(j).(z - c)^j \right) \right) +$$

$$+ \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^{n+m-1} . \sum_{k=n}^{n+m-1} \boldsymbol{a}(k).(z - c)^k,$$

ami m szerinti teljes indukcióval könnyen belátható. Ezért $x \in [c, z[$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $m \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \boldsymbol{a}(k).(x - c)^k \right\| \leq \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^n C_n + \left(\frac{x - c}{z - c}\right)^{n+m-1} C_n,$$

ahol $C_n := \sup_{p\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k \right\|$ az előző lemma szerint véges. Ebből következik, hogy minden $x \in [c, z[$ pontra és $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{a}(k).(x-c)^k \right\| \leq \left(\frac{x-c}{z-c}\right)^n C_n \leq C_n,$$

ugyanakkor C_n *definíciója* szerint

$$\left\| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k \right\| \leq$$
$$\leq \sup_{m\in\mathbb{N}^+} \left\| \sum_{k=n}^{n+m-1} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k \right\| =: C_n.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\sup_{x\in[c,z]} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{a}(k).(x-c)^k \right\| \leq C_n.$$

A hipotézis szerint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k$ vektorsor konvergens, ezért az előző lemma alapján $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, következésképpen a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(id_{\mathbb{K}} - c)^k$ hatványfüggvény-sor egyenletesen konvergens a $[c, z]$ szakaszon. Ebből adódik, hogy az $f|_{[c,z]}$ leszűkített függvény folytonos a z pontban, és mivel z torlódási pontja is a $[c, z]$ szakasznak, így $\lim_z \left(f|_{[c,z]}\right) = f(z)$ is teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy az imént bizonyított $\lim_z \left(f|_{[c,z]}\right) = f(z)$ egyenlőséget úgy is szokták írni, hogy

$$\lim_{x\to z,\ x\in[c,z]} \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k.$$

Azonban vigyázzunk arra, hogy mi ennek a pontos értelme, ugyanis lehetséges az, hogy a

$$\lim_{x\to z} \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(x-c)^k$$

határérték *nem létezik*, vagyis a ponntonkénti összegfüggvénynek nincs határértéke z-ben, holott a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k$ vektorsor konvergens, tehát a $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a}(k).(z-c)^k$ vektor *létezik*.

Gyakorlatok

1. Ha T *megszámlálható* halmaz és (M, d) metrikus tér, akkor létezik olyan $\mathbf{d}$ metrika az $\mathscr{F}(T; M)$ függvényhalmaz felett, hogy minden $\mathscr{F}(T; M)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és minden $f \in \mathscr{F}(T; M)$ függvényre az "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez a $\mathbf{d}$ metrika szerint" kijelentés ekvivalens azzal, hogy "az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a T halmazon és $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$".

(*Útmutatás.* Létezik olyan $\mathbf{d}'$ metrika az $\mathscr{F}(\mathbb{N}; M)$ függvényhalmaz felett, hogy minden $\mathscr{F}(\mathbb{N}; M)$-ben haladó $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és minden $\boldsymbol{s} \in \mathscr{F}(\mathbb{N}; M)$ függvényre az "$(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $\boldsymbol{s}$-hez a $\mathbf{d}'$ metrika szerint" kijelentés ekvivalens azzal, hogy "minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(\boldsymbol{s}_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $\boldsymbol{s}(k)$-hoz M-ben a d metrika szerint" (V. fejezet, 4.pont, **2**. gyakorlat). Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to T$ *szürjekció*, és tekintsük az

$$\mathscr{F}(T; M) \to \mathscr{F}(\mathbb{N}; M); \quad f \mapsto f \circ \sigma$$

leképezést. A σ szürjektivitása miatt ez *injekció*, ezért az

$$\mathscr{F}(T; M) \times \mathscr{F}(T; M) \to \mathscr{F}(T; M); \quad (f, g) \mapsto \mathbf{d}'(f \circ \sigma, g \circ \sigma)$$

leképezés metrika $\mathscr{F}(T; M)$ felett, és könnyen látható, hogy ez eleget tesz a követelménynek.)

2. Ha (M, d) metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja M-be érkező függvény, és E olyan *véges* halmaz, amelyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként, konvergens, akkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az E halmazon egyenletesen is konvergens. Megfordítva, ha E *végtelen* halmaz, akkor létezik olyan (M, d) metrikus tér és olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, amelynek minden tagja M-be érkező függvény, és amely pontonként konvergens, de nem egyenletesen konvergens az E halmazon.

3. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, hogy az M minden pontjának létezik kompakt környezete (ilyenkor azt mondjuk, hogy az (M, d) metrikus tér *lokálisan kompakt*). Ha (M', d') metrikus tér, akkor egy $\mathscr{F}(M; M')$-ben haladó függvénysorozat pontosan akkor lokálisan egyenletesen konvergens M-en, ha az M minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.

4. Legyen T halmaz, $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek minden tagja $T \to F$ függvény. Ha az $\mathscr{F}(T; \mathbb{R})$-ben haladó $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(\cdot)\|$ függvénysor egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor is egyenletesen konvergens az E halmazon. Azonban lehetséges, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens egy $E \subseteq T$ halmazon, de a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|f_k(\cdot)\|$ függvénysor nem egyenletesen konvergens E-n.

(*Példa.* A $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k (1 - id_{\mathbb{R}}).id_{\mathbb{R}}^k$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon, de a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (1 - id_{\mathbb{R}}).id_{\mathbb{R}}^k$ függvénysor nem egyenletesen konvergens $[0, 1]$-en.)

5. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1}\chi_{[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}[}$$

függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ intervallumon, de nem normálisan konvergens ezen a halmazon, tehát a Banach-térbe ható függvényekből álló függvénysorokra a normális konvergencia szigorúan erősebb feltétel, mint az egyenletes konvergencia.

6. Ha $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K}\setminus\{0\}$-ban haladó sorozat, amelyre a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{z_k}$$

sor abszolút konvergens $\mathbb{K}$-ban, akkor a $D := \{z_k | k\in\mathbb{N}\}$ halmaz diszkrét és zárt $\mathbb{K}$-ban, továbbá a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{id_{\mathbb{K}} - z_k}$$

függvénysor normálisan konvergens minden olyan $\mathbb{K}$-beli zárt gömbön, amely nem metszi a D halmazt.

7. Legyen $M := [1,\to[\subseteq\mathbb{R}$ és d az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi metrika leszűkítése $M\times M$-re.
a) Minden $\mathbb{N}\ni n$-re legyen $f_n := id^n_{[1,\to[}$. Ekkor az $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvényre $Dom(f) = \{1\}$ teljesül, tehát 1 *nem torlódási pontja* $Dom(f)$-nek, azonban létezik 1-nek olyan V környezete a d metrika szerint, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $V\cap Dom(f)$ halmazon, és minden $\mathbb{N}\ni n$-re f_n-nek létezik határértéke 1-ben (sőt f_n folytonos is 1-ben), továbbá a $(\lim\limits_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben (ugyanakkor a $\lim\limits_1 f$ jel *értelmetlen*, mert 1 nem torlódási pontja $Dom(f)$-nek).
b) Minden $n\in\mathbb{N}$ számra legyen

$$f_n : M\to\mathbb{R};\quad x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x=1 \\ (-1)^n x^n & \text{, ha } x\in]1,2[\\ 0 & \text{, ha } x\in[2,\to[\end{cases}.$$

Ekkor az $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvényre $Dom(f) = \{1\}\cup[2,\to[$ teljesül, tehát 1 *nem torlódási pontja* $Dom(f)$-nek, azonban létezik 1-nek olyan V környezete a d metrika szerint, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $V\cap Dom(f)$ halmazon, és minden $\mathbb{N}\ni n$-re f_n-nek létezik határértéke 1-ben, ugyanakkor a $(\lim\limits_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *nem Cauchy-sorozat* $\mathbb{R}$-ben.

8. (*Dini-tétel.*) Legyen (M,d) kompakt metrikus tér és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{C}(M;\mathbb{R})$-ben haladó sorozat, amelyre minden $M\ni x$-re $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < +\infty$, és minden $\mathbb{N}\ni n$-re $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$ (amit úgy fejezünk ki, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *pontonként felülről korlátos* és *pontonként monoton növő*). Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens M-en, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény *akkor és*

csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens M-en.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy az $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény folytonos, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az $(\{x \in M | f(x) - f_n(x) < \varepsilon\})_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat minden tagja *nyílt* halmaz M-ben, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti monoton növése miatt ez a halmazsorozat tartalmazás tekintetében monoton növő. Ugyanakkor minden $x \in M$ esetén $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$, tehát $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x \in M | f(x) - f_n(x) < \varepsilon\} = M$. Az M halmaz kompaktsága miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $\{x \in M | f(x) - f_N(x) < \varepsilon\} = M$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra $\{x \in M | f(x) - f_n(x) < \varepsilon\} = M$ teljesül, vagyis minden $M \ni x$-re $-\varepsilon < f(x) - f_n(x) < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.)

9. Legyen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a rekurzióval értelmezhető, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló sorozat, amelyre P_0 az azonosan 0 függvény, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P_{n+1} := P_n + \frac{1}{2}.(id_{\mathbb{R}} - P_n^2).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan polinomiális függvény, amelynek szabad tagja 0 (azaz $P_n(0) = 0$), és a $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon pontonként monoton növő, egyenletesen konvergens, és a pontonkénti limeszfüggvénye egyenlő ezen az intervallumon az $\sqrt{id|_{[0,1]}}$ függvénnyel.

(*Útmutatás.* Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $t \in [0,1]$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ számra

$$0 \le \sqrt{t} - P_n(t) \le \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}$$

teljesül. Ebből következik az állítás.)

10. Legyen (M, d) olyan metrikus tér, hogy M korlátos halmaz. Ekkor létezik olyan $(E, \|\cdot\|)$ valós Banach-tér, és létezik olyan $j : M \to E$ leképezés, amely izometria a d és $d_{\|\cdot\|}$ metrikák szerint, vagyis minden korlátos metrikus tér izometrikusan *beágyazható* egy valós Banach-térbe.

(*Útmutatás.* Legyen $E := \mathscr{C}^b(M; \mathbb{R})$, és $j : M \to E$ az a leképezés, amelyre minden $x \in M$ esetén $j(x) := d(x, \cdot)$.)

11. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathscr{F}(M; M')$ függvényhalmaz *ekvifolytonos az* $\mathfrak{a} \in M$ *pontban* (a d és d' metrikák szerint), ha minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezete d szerint, hogy minden $x \in V$ pontra és minden $h \in H$ függvényre $d'(h(x), h(\mathfrak{a})) < \varepsilon$ teljesül, vagyis

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a}))(\forall h \in H) : \ h\langle V\rangle \subseteq B_\varepsilon(h(\mathfrak{a}); d').$$

Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathscr{F}(M; M')$ függvényhalmaz *ekvifolytonos* (a d és d' metrikák szerint), ha H az M minden pontjában ekvifolytonos (a d és d' metrikák szerint). Könnyen látható, hogy ha a $H \subseteq \mathscr{F}(M; M')$ függvényhalmaz ekvifolytonos az $\mathfrak{a} \in M$ pontban, akkor minden $H \ni h$-ra a h függvény folytonos az

$\mathfrak{a}$ pontban. Speciálisan, ha a $H \subseteq \mathscr{F}(M; M')$ függvényhalmaz ekvifolytonos, akkor $H \subseteq \mathscr{C}(M; M')$, vagyis a H minden eleme folytonos függvény.

(*Ascoli-tétel.*) Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek, továbbá legyen $H \subseteq \mathscr{C}^b(M; M')$. Tekintsük a következő kijelentéseket.

a) A H függvényhalmaz teljesen korlátos $\mathscr{C}^b(M; M')$-ben a $\mathbf{d}$ sup-metrika szerint.

b) A H függvényhalmaz ekvifolytonos, és minden $x \in M$ pontra a $H(x) := \{h(x) | h \in H\} \subseteq M'$ halmaz teljesen korlátos.

Ekkor a)⇒b) teljesül, és ha (M, d) *kompakt* metrikus tér, akkor b)⇒a) is igaz, tehát ekkor a) és b) ekvivalensek.

(*Útmutatás.* a)⇒b) Minden $x \in M$ esetén a

$$\mathscr{C}^b(M; M') \to M'; \quad h \mapsto h(x)$$

függvény egyenletesen folytonos a $\mathbf{d}$ és d' metrikák szerint (sőt Lipschitz-függvény), és teljesen korlátos halmaz egyenletesen folytonos függvény által létesített képe teljesen korlátos, ezért ha a) teljesül, akkor minden $x \in M$ pontra a $H(x)$ halmaz teljesen korlátos a d' metrika szerint.

Megmutatjuk, hogy ha a) teljesül, akkor a H függvényhalmaz ekvifolytonos. Legyen $\mathfrak{a} \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Rögzítsünk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon/3[$ valós számot. A H halmaz teljesen korlátos $\mathbf{d}$ szerint, ezért van olyan $H' \subseteq H$ *véges* halmaz, amelyre $H \subseteq \bigcup_{h' \in H'} B_{\varepsilon'}(h'; \mathbf{d})$. Ekkor minden $h \in H$ függvényhez van olyan $h' \in H'$, hogy minden $x \in M$ esetén $d'(h(x), h'(x)) < \varepsilon'$. Ugyanakkor minden $h' \in H'$ függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, ezért van olyan $V_{h'} \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ környezet, amelyre $h'\langle V_{h'} \rangle \subseteq B_{\varepsilon'}(h'(\mathfrak{a}); d')$; legyen $V := \bigcap_{h' \in H'} V_{h'}$ (ha $H' \neq \emptyset$, egyébként $H = \emptyset$, és akkor H nyilvánvalóan ekvifolytonos). Ekkor $V \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ olyan környezet, hogy minden $x \in V$ pontra és minden $h' \in H'$ függvényre $d'(h'(x), h'(\mathfrak{a})) < \varepsilon'$. Ha most $h \in H$ és $h' \in H'$ olyan függvény, amelyre $h \in B_{\varepsilon'}(h'; \mathbf{d})$, akkor $x \in V$ esetén

$$d'(h(x), h'(x)) < \varepsilon', \quad d'(h'(x), h'(\mathfrak{a})) < \varepsilon', \quad d'(h'(\mathfrak{a}), h(\mathfrak{a})) < \varepsilon'$$

egyszerre teljesül, ezért $d'(h(x), h(\mathfrak{a})) < 3\varepsilon' < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $h \in H$ függvényre $h\langle V \rangle \subseteq B_\varepsilon(h(\mathfrak{a}), d')$, tehát H ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

b)⇒a) Tegyük fel, hogy (M, d) kompakt metrikus tér és H-ra b) teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és ismét rögzítsünk egy $\varepsilon' \in]0, \varepsilon/3[$ valós számot. A H ekvifolytonossága alapján, a kiválasztási axióma alkalmazásával előállíthatunk olyan $(V_\mathfrak{a})_{\mathfrak{a} \in M}$ halmazrendszert, hogy minden $M \ni \mathfrak{a}$-ra $V_\mathfrak{a} \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ és $V_\mathfrak{a}$ nyílt a d metrika szerint, továbbá minden $h \in H$ függvényre $h\langle V_\mathfrak{a} \rangle \subseteq B_{\varepsilon'}(h(\mathfrak{a}); d')$. Ekkor természetesen $M = \bigcup_{\mathfrak{a} \in M} V_\mathfrak{a}$, tehát az M kompaktsága miatt létezik olyan $M_0 \subseteq M$ *véges* halmaz, hogy $M = \bigcup_{\mathfrak{a} \in M_0} V_\mathfrak{a}$. A b) alapján minden $\mathfrak{a} \in M$ pontra $H(\mathfrak{a}) := \{h(\mathfrak{a}) | h \in H\}$ teljesen korlátos halmaz az (M', d') metrikus térben. Ebből az $M_0 \subseteq M$ halmaz végessége folytán könnyen kapjuk, hogy a $\{h|_{M_0} | h \in H\} \subseteq \mathscr{F}^b(M_0; M')$ függvényhalmaz teljesen korlátos $\mathscr{F}^b(M_0; M')$-ben a sup-metrika szerint (ez következik az V. fejezet, 5. pont, **3**. gyakorlatból). Ezért van olyan $H' \subseteq H$ *véges* halmaz, hogy minden $h \in H$ függvényhez van olyan $h' \in H'$, amelyre minden $x \in M_0$ esetén $d'(h(x), h'(x)) < \varepsilon'$.

Legyen most $h \in H$ és ehhez legyen $h' \in H'$ olyan függvény, amelyre minden $x \in M_0$ esetén $d'(h(x), h'(x)) < \varepsilon'$. Ha $x \in M$, akkor van olyan $\mathfrak{a} \in M_0$ pont, hogy $x \in V_{\mathfrak{a}}$; ekkor fennállnak a

$$d'(h(x), h(\mathfrak{a})) < \varepsilon', \quad d'(h(\mathfrak{a}), h'(\mathfrak{a})) < \varepsilon', \quad d'(h'(x), h'(\mathfrak{a})) < \varepsilon'$$

egyenlőtlenségek, ezért

$$\mathbf{d}(h, h') := \sup_{x \in M} d'(h(x), h'(x)) \leq 3\varepsilon' < \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $h \in \bigcup_{h' \in H'} B_\varepsilon(h'; \mathbf{d})$, vagyis H teljesen korlátos halmaz a $\mathbf{d}$ metrika szerint.)

12. (*Arzelá-tétel.*) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér, $(F, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér, és $H \subseteq \mathscr{C}(M; F)$ olyan ekvifolytonos függvényhalmaz, hogy minden $M \ni x$-re a $\{h(x) | h \in H\} \subseteq F$ halmaz korlátos a $d_{\|\cdot\|}$ metrika szerint. Ekkor minden H-ban haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely *egyenletesen konvergens* az M halmazon.

(*Útmutatás.* Véges dimenziós normált térben a korlátos halmazok megegyeznek a teljesen korlátos halmazokkal, ezért az Ascoli-tétel (**11**. gyakorlat) alapján a H függvényhalmaz teljesen korlátos $\mathscr{C}(M; F)$-ben a sup-metrika szerint. A teljes korlátosság sorozatokkal való jellemzése (9. pont, Hausdorff-tétel) alkalmazásával kapjuk, hogy minden H-ban haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely a sup-metrika szerint Cauchy-sorozat. Tudjuk, hogy $\mathscr{C}(M; F)$ a sup-metrikával teljes metrikus tér, mert $(F, \|\cdot\|)$ Banach-tér, így minden H-ban haladó sorozatnak létezik olyan részsorozata, amely konvergens a sup-metrika szerint, vagyis egyenletesen konvergens M-en.)

13. Az alábbi lépéseket követve bizonyítsuk be olyan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ben haladó folytonos ív létezését, amelynek értékkészlete *egyenlő* a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzettel.

(*Útmutatás.* a) Minden $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvényre jelölje $T\gamma$ azt a $[0, 1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$(T\gamma)(t) = (1 - pr_1(\gamma(t)), pr_2(\gamma(t))).$$

b) Iterációval értelmezzük azt a $[0, 1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvényekből álló $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $\gamma_0 : [0, 1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ t \mapsto (t, t)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\gamma_{n+1} : [0, 1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $t \in [0, 1]$ esetén

$$\gamma_{n+1}(t) := \begin{cases} \frac{1}{3}\gamma_n(9t) & , \text{ ha } t \in [0, \frac{1}{9}[\\ \frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t - 1) + (0, \frac{1}{3}) & , \text{ ha } t \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t - 2) + (0, \frac{2}{3}) & , \text{ ha } t \in [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}[\\ -\frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t - 3) + (\frac{2}{3}, 1) & , \text{ ha } t \in [\frac{3}{9}, \frac{4}{9}[\\ -\frac{1}{3}\gamma_n(9t - 4) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & , \text{ ha } t \in [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}[\\ -\frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t - 5) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & , \text{ ha } t \in [\frac{5}{9}, \frac{6}{9}[\\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t - 6) + (\frac{2}{3}, 0) & , \text{ ha } t \in [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}[\\ \frac{1}{3}(T\gamma_n)(9t - 7) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & , \text{ ha } t \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\\ \frac{1}{3}\gamma_n(9t - 8) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & , \text{ ha } t \in [\frac{8}{9}, 1] \end{cases}.$$

Rajzoljuk le a γ_1 és γ_2 függvényeket!

c) Minden $\mathbb{N} \ni n$-re γ_n folytonos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ben haladó ív. Ez teljes indukcióval igazolható, felhasználva az V. fejezet, 7. pont, **2**. gyakorlatban megfogalmazott állítást.

d) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Im(\gamma_n) \subseteq [0,1] \times [0,1]$ és $Im(\gamma_n) \subseteq Im(\gamma_{n+1})$. Minden $k < 9$ és $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra, valamint $t \in [\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}]$ pontra

$$\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_\infty = \frac{1}{3}\|\gamma_n(9t-k) - \gamma_{n-1}(9t-k)\|_\infty$$

teljesül.

e) Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sup_{t\in[0,1]} \|\gamma_m(t) - \gamma_n(t)\|_\infty \leq \frac{3/2}{3^{\min(m,n)}}.$$

f) A $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen konvergens; legyen $\gamma := \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.

g) A γ függvény olyan $[0,1] \times [0,1]$-ben haladó folytonos ív, hogy

$$Im(\gamma) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Im(\gamma_n)},$$

és a

$$D := \left\{ \left(\frac{j}{3^m}, \frac{k}{3^m} \right) | j,k,m \in \mathbb{N},\ j,k \leq 3^m \right\}$$

halmaz része $Im(\gamma)$-nak és *sűrű* $[0,1] \times [0,1]$-ben.

h) $Im(\gamma) = [0,1] \times [0,1]$.)

14. Értelmezzük a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \min(x - [x], [x] + 1 - x)$$

függvényt és legyen $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bázissorozat $\mathbb{N}$-ben (II. fejezet, 4. pont, **3**. gyakorlat). A g függvény folytonos, 1 szerint periodikus, és $Im(g) \subseteq [0,1]$, tehát a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{g \circ (d_k.id_\mathbb{R})}{d_k}$$

függvénysor *normálisan konvergens* $\mathbb{R}$-een, továbbá az összegfüggvénye szintén folytonos. Azonban ez az összegfüggvény az $\mathbb{R}$ egyetlen pontjában sem differenciálható.

RIEMANN-INTEGRÁL ÉS PRIMITÍV FÜGGVÉNYEK

Irodalomjegyzék

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle*, Hermann, Paris, 1976.

2. L. Schwartz, *Analyse mathématique*, vol. I, Hermann, Paris, 1967.

3. Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

1. A Riemann-integrál értelmezése

Definíció. Az $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényt *lépcsősfüggvénynek* nevezzünk, ha létezik korlátos intervallumoknak olyan $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges rendszere és olyan $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha}$$

teljesül. A korlátos intervallumok halmazát $S(\mathbb{R})$, és az $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvények halmazát $E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ jelöli.

Az $E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ függvényhalmaz legfontosabb tulajdonságai a korlátos intervallumok $S(\mathbb{R})$ halmazának következő (nyilvánvaló) tulajdonságain múlnak:

(SR_I) $\emptyset \in S(\mathbb{R})$.

(SR_{II}) Minden $I, J \in S(\mathbb{R})$ esetén $I \cap J \in S(\mathbb{R})$.

(SR_{III}) Minden $I, J \in S(\mathbb{R})$ esetén létezik olyan $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges diszjunkt rendszer $S(\mathbb{R})$-ben, amelyre $I \setminus J = \bigcup\limits_{\alpha\in A} K_\alpha$.

Lemma. (*Felbontási lemma.*) Ha $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumok tetszőleges véges rendszere, akkor létezik korlátos intervallumoknak olyan $(J_\beta)_{\beta\in B}$ véges *diszjunkt* rendszere, hogy

$$\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcup_{\beta\in B} J_\beta$$

és minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $B_\alpha \subseteq B$, amelyre

$$I_\alpha = \bigcup_{\beta\in B_\alpha} J_\beta$$

teljesül.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $A \neq \emptyset$, különben az állítás triviálisan igaz. Legyen

$$\Gamma := \{\gamma \subseteq A | \gamma \neq \emptyset\},$$

és értelmezzük a $(K_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ halmazrendszert úgy, hogy minden $\Gamma \ni \gamma$-ra

$$K_\gamma := \begin{cases} \bigcap\limits_{(\alpha,\alpha')\in\gamma\times(A\setminus\gamma)} (I_\alpha \setminus I_{\alpha'}) & \text{, ha } \gamma \neq A; \\ \bigcap\limits_{\alpha\in A} I_\alpha & \text{, ha } \gamma = A. \end{cases}$$

A $(K_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ halmazrendszer diszjunkt. Valóban, legyenek $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ olyanok, hogy $\gamma_0 \neq \gamma_1$. Ekkor $\gamma_0 \setminus \gamma_1 \neq \emptyset$ vagy $\gamma_1 \setminus \gamma_0 \neq \emptyset$; világos, hogy elég az első esetet vizsgálni. Legyen $\alpha' \in \gamma_0$ és $\alpha' \notin \gamma_1$; ekkor $\gamma_1 \neq A$, tehát ha $\alpha \in \gamma_1$, akkor $K_{\gamma_1} \subseteq I_\alpha \setminus I_{\alpha'}$. Ugyanakkor $K_{\gamma_0} \subseteq I_{\alpha'}$, mert ez nyilván igaz, ha $\gamma_0 = A$, míg $\gamma_0 \neq A$ esetén véve egy $\alpha'' \in A \setminus \gamma_0$ elemet kapjuk, hogy $K_{\gamma_0} \subseteq I_{\alpha'} \setminus I_{\alpha''} \subseteq I_{\alpha'}$. Ezért

$$K_{\gamma_0} \cap K_{\gamma_1} \subseteq I_{\alpha'} \cap (I_\alpha \setminus I_{\alpha'}) = \emptyset.$$

Minden $\alpha \in A$ esetén legyen

$$\Gamma_\alpha := \{\gamma \in \Gamma | \alpha \in \gamma\}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $I_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma_\alpha} K_\gamma$ teljesül. Ehhez legyen $\alpha \in A$ rögzítve. Ha $\gamma \in \Gamma_\alpha$, akkor $\alpha \in \gamma$, ezért $\gamma = A$ esetén $K_\gamma \subseteq I_\alpha$ triviálisan igaz, míg $\gamma \neq A$ esetén véve egy $\alpha' \in A \setminus \gamma$ elemet kapjuk, hogy $K_\gamma \subseteq I_\alpha \setminus I_{\alpha'} \subseteq I_\alpha$. Ebből következik, hogy $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma_\alpha} K_\gamma \subseteq I_\alpha$. A fordított tartalmazás bizonyításához legyen $x \in I_\alpha$, és értelmezzük a $\gamma := \{\alpha' \in A | x \in I_{\alpha'}\}$ halmazt. Ekkor $\alpha \in \gamma \subseteq A$, tehát $\gamma \in \Gamma_\alpha$. Ha $\gamma = A$, akkor a γ definícója szerint: minden $\alpha' \in A$ esetén $x \in I_{\alpha'}$, így $x \in K_A = K_\gamma$. Ha $\gamma \neq A$ és $(\alpha', \alpha'') \in \gamma \times (A \setminus \gamma)$, akkor ismét a γ definícója szerint: $x \in I_{\alpha'}$ és $x \notin I_{\alpha''}$, tehát $x \in \bigcap\limits_{(\alpha', \alpha'') \in \gamma \times (A \setminus \gamma)} (I_{\alpha'} \setminus I_{\alpha''}) =: K_\gamma$. Ebből következik, hogy $I_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma_\alpha} K_\gamma$.

Ezzel megmutattuk, hogy

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_\alpha} K_\gamma \right) = \bigcup_{\gamma \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha} K_\gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$$

is teljesül, mert a definíciók alapján nyilvánvaló, hogy $\Gamma = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$.

Legyen most $\gamma \in \Gamma$ olyan, hogy $\gamma \neq A$. A korlátos intervallumok halmazának (SR_{III}) tulajdonsága alapján, minden $(\alpha, \alpha') \in \gamma \times (A \setminus \gamma)$ párhoz vehetünk olyan $(L_{(\alpha,\alpha'),\delta})_{\delta \in \Delta_{(\alpha,\alpha')}}$ véges diszjunkt rendszert $S(\mathbb{R})$-ben, hogy

$$I_\alpha \setminus I_{\alpha'} = \bigcup_{\delta \in \Delta_{(\alpha,\alpha')}} L_{(\alpha,\alpha'),\delta}.$$

A metszet unióra vonatkozó disztributivitása miatt

$$K_\gamma := \bigcap_{(\alpha,\alpha') \in \gamma \times (A \setminus \gamma)} (I_\alpha \setminus I_{\alpha'}) = \bigcap_{(\alpha,\alpha') \in \gamma \times (A \setminus \gamma)} \left(\bigcup_{\delta \in \Delta_{(\alpha,\alpha')}} L_{(\alpha,\alpha'),\delta} \right) =$$

$$= \bigcup_{f \in P_\gamma} \left(\bigcap_{(\alpha,\alpha') \in \gamma \times (A \setminus \gamma)} L_{(\alpha,\alpha'),f(\alpha,\alpha')} \right),$$

ahol bevezettük a

$$P_\gamma := \prod_{(\alpha,\alpha') \in \gamma \times (A \setminus \gamma)} \Delta_{(\alpha,\alpha')}$$

jelölést.

Vezessük be a

$$B := \{A\} \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{A\}} (\{\gamma\} \times P_\gamma)$$

halmazt, és minden $\beta \in B$ esetén értelmezzük a J_β korlátos intervallumot úgy, hogy $J_A := K_A$, valamint $\gamma \in \Gamma \setminus \{A\}$ és $f \in P_\gamma$ esetén

$$J_{(\gamma,f)} := \bigcap_{(\alpha,\alpha')\in\gamma\times(A\setminus\gamma)} L_{(\alpha,\alpha'),f(\alpha,\alpha')}.$$

A $(K_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ halmazrendszerre bizonyított tulajdonságokból közvetlenül következik, hogy $(J_\beta)_{\beta\in B}$ olyan halmazrendszer, amelynek a létezését állítottuk. ■

Lemma. Minden $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényhez létezik korlátos intervallumoknak olyan $(J_\beta)_{\beta\in B}$ véges *diszjunkt* rendszere és olyan $(d_\beta)_{\beta\in B}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\beta\in B} d_\beta \chi_{J_\beta}$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumoknak olyan véges rendszere és $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha}.$$

A felbontási lemma alapján vehetünk korlátos intervallumoknak olyan $(J_\beta)_{\beta\in B}$ véges *diszjunkt* rendszerét, hogy

$$\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcup_{\beta\in B} J_\beta$$

és minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $B_\alpha \subseteq B$, amelyre

$$I_\alpha = \bigcup_{\beta\in B_\alpha} J_\beta$$

teljesül. Ekkor minden $\alpha \in A$ esetén a $(J_\beta)_{\beta\in B_\alpha}$ halmazrendszer diszjunktsága miatt

$$\chi_{I_\alpha} = \sum_{\beta\in B_\alpha} \chi_{J_\beta},$$

amiből következik, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \left(\sum_{\beta\in B_\alpha} \chi_{J_\beta} \right) = \sum_{\alpha\in A} \left(\sum_{\beta\in B_\alpha} c_\alpha \chi_{J_\beta} \right).$$

Minden $(\alpha,\beta) \in A \times B$ esetén értelmezzük a $\varphi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényt a következő módon:

$$\varphi_{\alpha,\beta} := \begin{cases} c_\alpha \chi_{J_\beta} & \text{, ha } \beta \in B_\alpha \\ 0 & \text{, ha } \beta \notin B_\alpha. \end{cases}$$

Világos, hogy ekkor

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A}\left(\sum_{\beta\in B}\varphi_{\alpha,\beta}\right) = \sum_{\beta\in B}\left(\sum_{\alpha\in A}\varphi_{\alpha,\beta}\right) =$$

$$= \sum_{\beta\in B}\left(\sum_{\alpha\in A,\ \beta\in B_\alpha} c_\alpha\chi_{J_\beta}\right) = \sum_{\beta\in B}\left(\sum_{\alpha\in A,\ \beta\in B_\alpha} c_\alpha\right)\chi_{J_\beta}$$

teljesül, tehát ha minden $B \ni \beta$-ra

$$d_\beta := \sum_{\alpha\in A,\ \beta\in B_\alpha} c_\alpha,$$

akkor $(d_\beta)_{\beta\in B}$ olyan véges rendszer $\mathbb{K}$-ban és $(J_\beta)_{\beta\in B}$ korlátos intervallumoknak olyan véges diszjunkt rendszere, amelyre

$$\varphi = \sum_{\beta\in B} d_\beta\chi_{J_\beta}$$

teljesül. ■

Állítás. Minden $\varphi, \psi \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\varphi+\psi,\ \varphi\psi,\ \lambda\varphi,\ \overline{\varphi},\ |\varphi| \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ teljesül. Minden $\varphi, \psi \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})$ esetén $\varphi\vee\psi,\ \varphi\wedge\psi,\ \varphi^+,\ \varphi^- \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})$ teljesül.

Bizonyítás. (I) Ha $\varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ és $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumoknak olyan véges rendszere, valamint $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\chi_{I_\alpha},$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\overline{\varphi} = \sum_{\alpha\in A} \overline{c_\alpha}\chi_{I_\alpha},$$

és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\lambda\varphi = \sum_{\alpha\in A}(\lambda c_\alpha)\chi_{I_\alpha},$$

vagyis $\overline{\varphi},\ \lambda\varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$. Az előző lemma alapján az $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer megválasztható úgy, hogy diszjunkt legyen: ekkor

$$|\varphi| = \sum_{\alpha\in A}|c_\alpha|\chi_{I_\alpha},$$

ezért $|\varphi| \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$.

(II) Legyenek $\varphi, \psi \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$, valamint $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(J_\beta)_{\beta\in B}$ korlátos intervallumoknak olyan véges rendszerei, továbbá $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(d_\beta)_{\beta\in B}$ olyan rendszerek $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\chi_{I_\alpha} \qquad \psi = \sum_{\beta\in B} d_\beta\chi_{J_\beta}.$$

Legyen $A \vee B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$, és minden $\gamma \in A \vee B$ esetén

$$C_\gamma := \begin{cases} I_\alpha & \text{, ha } \alpha \in A \text{ és } \gamma = (0, \alpha), \\ J_\beta & \text{, ha } \beta \in B \text{ és } \gamma = (1, \beta) \end{cases},$$

valamint

$$e_\gamma := \begin{cases} c_\alpha & \text{, ha } \alpha \in A \text{ és } \gamma = (0, \alpha), \\ d_\beta & \text{, ha } \beta \in B \text{ és } \gamma = (1, \beta) \end{cases}.$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\sum_{\gamma \in A \vee B} e_\gamma \chi_{C_\gamma} = \sum_{\gamma \in \{0\} \times A} e_\gamma \chi_{C_\gamma} + \sum_{\gamma \in \{1\} \times B} e_\gamma \chi_{C_\gamma} =: \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} + \sum_{\beta \in B} d_\beta \chi_{J_\beta} = \varphi + \psi,$$

tehát $\varphi + \psi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{K})$. Továbbá, nyilvánvaló, hogy

$$\varphi\psi = \left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} \right) \left(\sum_{\beta \in B} d_\beta \chi_{J_\beta} \right) = \sum_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (c_\alpha d_\beta) \chi_{I_\alpha \cap J_\beta},$$

amiből azonnal látható, hogy $\varphi\psi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.
(III) Ha $\varphi, \psi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, akkor

$$\varphi \vee \psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|), \quad \varphi \wedge \psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|), \quad \varphi^+ = \varphi \vee 0, \quad \varphi^- = (-\varphi) \vee 0,$$

így az előzőek alapján $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, φ^+, $\varphi^- \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ teljesül. ■

Definíció. Egy $\theta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ függvényt *additívnak* nevezünk, ha minden $S(\mathbb{R})$-ben haladó $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ véges diszjunkt rendszerre, $\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$ esetén

$$\theta \left(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \right) = \sum_{\alpha \in A} \theta(I_\alpha)$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy a $\theta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ additív függvény *valós* (illetve *pozitív*) ha minden $I \in S(\mathbb{R})$ esetén $\theta(I) \in \mathbb{R}$ (illetve $\theta(I) \in \mathbb{R}_+$).

Az $S(\mathbb{R})$-en értelmezett függvények additivitásának ellenőrzése jelentősen egyszerűsíthető egy olyan állítás alapján, amely az $S(\mathbb{R})$ következő elemi tulajdonságán múlik.

Lemma. Ha $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ tetszőleges véges diszjunkt rendszer $S(\mathbb{R})$-ben és $\emptyset \neq \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$, akkor van olyan $\alpha_* \in A$, amelyre $\bigcup_{\alpha \in A\ ;\alpha \neq \alpha_*} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$ teljesül.

Bizonyítás. Az $\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \neq \emptyset$ feltétel alapján $A \neq \emptyset$, amiből következik olyan $\alpha_* \in A$ létezése, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in I_{\alpha_*}$ és minden $y \in \bigcup_{\alpha \in A\ ;\alpha \neq \alpha_*} I_\alpha$ esetén $x \leq y$ (vagyis az $\mathbb{R}$ természetes rendezése szerint I_{α_*} az összes többi I_α

intervallumhoz képest "balra esik"). Állítjuk, hogy a $J := \bigcup_{\alpha\in A\ ;\alpha\neq\alpha_*} I_\alpha$ halmaz *intervallum*, tehát $J \in S(\mathbb{R})$. Valóban, legyenek $x, y, z \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x < y < z$ és $x, z \in J$: azt kell igazolni, hogy $y \in J$. Ehhez először megjegyezzük, hogy $J \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ miatt $x, z \in \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ teljesül, és a hipotézis alapján $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ intervallum, ezért $y \in \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$, így létezik olyan $\alpha \in A$, amelyre $y \in I_\alpha$. Ha $\alpha = \alpha_*$ teljesülne, akkor az α_* értelmezése alapján $y \leq x$ volna, holott $x < y$. Ez azt jelenti, hogy $\alpha \neq \alpha_*$, így $y \in J$. ■

Állítás. A θ:$S(\mathbb{R})\to\mathbb{K}$ függvény pontosan akkor additív, ha minden $I, J \in S(\mathbb{R})$ halmazra, $I \cap J = \emptyset$ és $I \cup J \in S(\mathbb{R})$ esetén

$$\theta(I \cup J) = \theta(I) + \theta(J)$$

teljesül.

Bizonyítás. A feltétel triviálisan szükséges. Az elégségességének bizonyítását az $S(\mathbb{R})$-ben haladó véges diszjunkt rendszerek indexhalmazának számossága szerinti teljes indukcióval végezzük el, felhasználva az előző lemma eredményét.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq 2$, és minden $S(\mathbb{R})$-ben haladó $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges diszjunkt rendszerre, $Card(A) = n$ és $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$ esetén

$$\theta\left(\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in A} \theta(I_\alpha)$$

teljesül. Legyen $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan $S(\mathbb{R})$-ben haladó véges diszjunkt rendszer, amelyre $Card(A) = n + 1$ és $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$.

Ha $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \emptyset$, akkor minden $A \ni \alpha$-ra $I_\alpha = \emptyset$, ezért $\theta(I_\alpha) = 0$, így fennáll az

$$\theta\left(\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha\right) = \theta(\emptyset) = 0 = \sum_{\alpha\in A} \theta(I_\alpha)$$

egyenlőség.

Ha $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha \neq \emptyset$, akkor az előző lemma szerint van olyan $\alpha_* \in A$, amelyre $\bigcup_{\alpha\in A\ ;\alpha\neq\alpha_*} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$ teljesül. Ekkor $A_{\alpha_*} := A \setminus \{\alpha_*\}$ olyan, hogy $Card(A_{\alpha_*}) = n$ és $(I_\alpha)_{\alpha\in A_{\alpha_*}}$ olyan véges diszjunkt rendszer $S(\mathbb{R})$-ben, hogy $\bigcup_{\alpha\in A_{\alpha_*}} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$, ezért az indukciós hipotézis alapján

$$\theta\left(\bigcup_{\alpha\in A_{\alpha_*}} I_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in A_{\alpha_*}} \theta(I_\alpha)$$

teljesül. Most az állítás feltételét alkalmazzuk az $I := I_{\alpha_*}$ és $J := \bigcup_{\alpha \in A_{\alpha_*}} I_\alpha$ halmazokra, amelyekre nyilvánvalóan $I \cap J = \emptyset$ és $I \cup J = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \in S(\mathbb{R})$ teljesül. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\theta\left(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha\right) = \theta(I \cup J) = \theta(I) + \theta(J) =$$

$$= \theta(I_{\alpha_*}) + \theta\left(\bigcup_{\alpha \in A_{\alpha_*}} I_\alpha\right) = \theta(I_{\alpha_*}) + \sum_{\alpha \in A_{\alpha_*}} \theta(I_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \theta(I_\alpha)$$

teljesül, amit bizonyítani kellett. ■

Definíció. Legyen $S : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tetszőleges függvény. Minden $I \subseteq \mathbb{R}$ korlátos intervallumra legyen

$$\mu_S(I) := \begin{cases} 0 & \text{, ha } I = \emptyset \\ S(\sup(I)) - S(\inf(I)) & \text{, ha } I \neq \emptyset \end{cases}.$$

Ekkor az

$$S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+; \quad I \mapsto \mu_S(I)$$

függvényt az S által meghatározott $\mathbb{R}$ feletti *Stieltjes-mértéknek* nevezzük. A $\mu_{id_\mathbb{R}}$ Stieltjes-mértéket $\mathbb{R}$ feletti *euklidészi mértéknek* nevezzük.

Tehát ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \leq b$, akkor

$$\mu_{id_\mathbb{R}}([a,b]) = \mu_{id_\mathbb{R}}([a,b[) = \mu_{id_\mathbb{R}}(]a,b]) = \mu_{id_\mathbb{R}}(]a,b[) = b - a$$

teljesül. A következő állítás szerint a $\mu_{id_\mathbb{R}}$ euklidészi mérték pozitív *additív* függvény.

Állítás. (*A Stieltjes-mértékek additivitása.*) Ha $S : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény és $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ korlátos intervallumoknak olyan véges diszjunkt rendszere, hogy $\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ intervallum, akkor

$$\mu_S\left(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in A} \mu_S(I_\alpha)$$

teljesül.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján elegendő azt igazolni, hogy minden $I, J \in S(\mathbb{R})$ halmazra, $I \cap J = \emptyset$ és $I \cup J \in S(\mathbb{R})$ esetén

$$\mu_S(I \cup J) = \mu_S(I) + \mu_S(J)$$

teljesül. A $\mu_S(\emptyset) = 0$ egyenlőség miatt nyilvánvalóan csak az $I \neq \emptyset \neq J$ eset érdekes, és nyilvánvalóan feltehető, hogy $\sup(I) \leq \inf(J)$, ezért minden $x \in I$ és $y \in J$ esetén $x \leq \sup(I) \leq \inf(J) \leq y$, tehát $x \leq y$ teljesül.

Először megjegyezzük, hogy az $I \cup J \in S(\mathbb{R})$ feltételből következik, hogy $\sup(I) = \inf(J)$. Tegyük fel indirekt, hogy $\sup(I) < \inf(J)$ teljesül; akkor vehetünk egy $z \in]\sup(I), \inf(J)[$ pontot és $I \neq \emptyset \neq J$ miatt rögzíthetünk $x \in I$ és $y \in J$ pontokat. Ekkor $x, y \in I \cup J$, tehát $z \in]\sup(I), \inf(J)[\subseteq]x, y[\subseteq I \cup J$, mivel $I \cup J$ intervallum. Ezért $z \in I$ vagy $z \in J$ teljesül. Az első esetben $z \leq \sup(I)$ és a második esetben $\inf(J) \leq z$ teljesülne, és mindkettő ellentmond annak, hogy $z \in]\sup(I), \inf(J)[$. Ez azt jelenti, hogy $\sup(I) = \inf(J)$.

Most belátjuk, hogy $\inf(I \cup J) = \inf(I)$. Valóban, ha $x \in I \cup J$, akkor $x \in I$ vagy $x \in J$. Az első esetben $\inf(I) \leq x$, míg a másodikban $\inf(I) \leq \sup(I) \leq \inf(J) \leq x$. Ez azt jelenti, hogy $\inf(I)$ alsó korlátja $I \cup J$-nek, így $\inf(I) \leq \inf(I \cup J)$. Ugyanakkor $\inf(I \cup J) \leq \inf(I)$ triviálisan igaz, ezért $\inf(I \cup J) = \inf(I)$.

Most belátjuk, hogy $\sup(I \cup J) = \sup(J)$. Valóban, ha $x \in I \cup J$, akkor $x \in I$ vagy $x \in J$. Az első esetben $x \leq \sup(I) \leq \inf(J) \leq \sup(J)$, míg a második esetben $x \leq \sup(J)$. Ez azt jelenti, hogy $\sup(J)$ felső korlátja $I \cup J$-nek, így $\sup(I \cup J) \leq \sup(J)$. Ugyanakkor $\sup(J) \leq \sup(I \cup J)$ triviálisan igaz, ezért $\sup(I \cup J) = \sup(J)$.

Ezek után könnyen látható, hogy

$$\mu_S(I \cup J) := S(\sup(I \cup J)) - S(\inf(I \cup J)) = S(\sup(J)) - S(\inf(I)) =$$

$$= (S(\sup(J)) - S(\inf(J))) + (S(\sup(I)) - S(\inf(I))) =: \mu_S(J) + \mu_S(I)$$

teljesül. ■

Példák (*additív függvényekre.*)

1) Az imént láttuk, hogy a Stieltjes-mértékek additív függvények, tehát az euklidészi mérték is additív függvény. Könnyen igazolható, hogy ha $S : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény, akkor a μ_S Stieltjes-mérték

– pontosan akkor valós, ha $Im(S) \subseteq \mathbb{R}$;

– pontosan akkor pozitív, ha $Im(S) \subseteq \mathbb{R}$ és S monoton növő.

Nyilvánvaló továbbá, hogy a μ_S Stieltjes-mérték rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu_S(\{x\}) = S(x) - S(x) = 0$.

2) Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ rögzítve, és minden $I \subseteq \mathbb{R}$ korlátos intervallumra:

$$\delta_{\mathfrak{a}}(I) := \begin{cases} 0 & \text{, ha } \mathfrak{a} \notin I \\ 1 & \text{, ha } \mathfrak{a} \in I. \end{cases}$$

Közvetlenül belátható, hogy $\delta_{\mathfrak{a}}$ pozitív additív halmazfüggvény, amelyet a $\mathfrak{a}$ pontba koncentrált *Dirac-mértéknek* nevezzük. Tekintettel arra, hogy $\delta_{\mathfrak{a}}(\{\mathfrak{a}\}) = 1 \neq 0$, az 1) utolsó állítása alapján mondható, hogy $\delta_{\mathfrak{a}}$ nem egyenlő egyetlen $\mathbb{R}$ feletti Stieltjes-mértékkel sem.

3) Ha $\theta, \theta' : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ additív függvények és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor a

$$\theta + \theta' : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}; \quad I \mapsto \theta(I) + \theta'(I),$$

$$\lambda\theta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}; \quad I \mapsto \lambda\theta(I),$$

$$\overline{\theta} : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}; \quad I \mapsto \overline{\theta(I)},$$

függvények nyilvánvalóan additívak, így a Stieltjes-mértékekből és a Dirac-mértékekből kiindulva sok új additív függvény képezhető. Nyilvánvaló, hogy minden $\theta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ additív függvényre

$$\mathfrak{Re}(\theta) := \frac{1}{2}(\theta + \overline{\theta}), \quad \mathfrak{Im}(\theta) := \frac{1}{2i}(\theta - \overline{\theta})$$

valós additív függvények és fennáll a

$$\theta = \mathfrak{Re}(\theta) + i\mathfrak{Im}(\theta)$$

egyenlőség.

4) Legyen $(\mathfrak{a}_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $K \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmazra $\{\alpha \in A | \mathfrak{a}_\alpha \in K\}$ véges halmaz. (Ez mindig teljesül, ha A véges, de végtelen A esetén is teljesülhet.) Ha $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ tetszőleges rendszer $\mathbb{K}$-ban, akkor jól értelmezett a

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \delta_{\mathfrak{a}_\alpha} : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}; \quad I \mapsto \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \delta_{\mathfrak{a}_\alpha}(I)$$

függvény, és könnyen belátható, hogy ez is additív.

Állítás. Legyenek $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ és $(J_\beta)_{\beta \in B}$ korlátos intervallumoknak olyan véges rendszerei, valamint $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ és $(d_\beta)_{\beta \in B}$ olyan rendszerek $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} = \sum_{\beta \in B} d_\beta \chi_{J_\beta}.$$

Ekkor minden $\theta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ additív függvényre fennáll a

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \theta(I_\alpha) = \sum_{\beta \in B} d_\beta \theta(J_\beta)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy ha $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ korlátos intervallumoknak olyan rendszere és $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} = 0,$$

akkor

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \theta(I_\alpha) = 0$$

teljesül. Valóban, a felbontási lemma szerint vehetünk korlátos intervallumoknak olyan $(J_\beta)_{\beta \in B}$ véges diszjunkt rendszerét, hogy

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} J_\beta$$

és minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $B_\alpha \subseteq B$, amelyre

$$I_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} J_\beta$$

teljesül. Ekkor minden $A \ni \alpha$-ra, a θ additivitása miatt fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \theta\left(I_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \theta\left(\bigcup_{\beta \in B_\alpha} J_\beta\right) =$$

$$= \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \left(\sum_{\beta \in B_\alpha} \theta(J_\beta)\right) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B_\alpha} (c_\alpha \theta(J_\beta))\right).$$

Minden $(\alpha, \beta) \in A \times B$ esetén legyen

$$c_{\alpha,\beta} := \begin{cases} c_\alpha \theta(J_\beta) & \text{, ha } \beta \in B_\alpha; \\ 0 & \text{, ha } \beta \notin B_\alpha. \end{cases}$$

Ekkor az írható, hogy

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \theta(I_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B_\alpha} (c_\alpha \theta(I_\beta)\right) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B} c_{\alpha,\beta}\right) = \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,\beta}\right) =$$

$$= \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A,\ \beta \in B_\alpha} (c_\alpha \theta(J_\beta)\right) = \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A,\ \beta \in B_\alpha} c_\alpha\right) \theta(J_\beta).$$

Ugyanakkor, minden $A \ni \alpha$-ra

$$\chi_{I_\alpha} = \sum_{\beta \in B_\alpha} \chi_{J_\beta}$$

teljesül, ezért a hipotézis alapján írható, hogy

$$0 = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} = \sum_{\alpha \in A} \left(c_\alpha \sum_{\beta \in B_\alpha} \chi_{J_\beta}\right) = \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A,\ \beta \in B_\alpha} c_\alpha\right) \chi_{J_\beta},$$

tehát minden $\beta \in B$ esetén

$$\left(\sum_{\alpha \in A,\ \beta \in B_\alpha} c_\alpha\right) \chi_{J_\beta} = 0.$$

Viszont minden $\beta \in B$ esetén

$$\left(\sum_{\alpha \in A,\ \beta \in B_\alpha} c_\alpha\right) \chi_{J_\beta} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{\alpha \in A,\ \beta \in B_\alpha} c_\alpha = 0\right) \vee (J_\beta = \emptyset) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{\alpha\in A,\ \beta\in B_\alpha} c_\alpha \right) \theta(J_\beta) = 0$$

nyilvánvalóan igaz, ezért fennáll a

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \theta(I_\alpha) = \sum_{\beta\in B} \left(\sum_{\alpha\in A,\ \beta\in B_\alpha} c_\alpha \right) \theta(J_\beta) = 0$$

egyenlőség.

(II) Legyenek most $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(J_\beta)_{\beta\in B}$ korlátos intervallumoknak olyan véges rendszerei, valamint $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(d_\beta)_{\beta\in B}$ olyan rendszerek $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} = \sum_{\beta\in B} d_\beta \chi_{J_\beta}.$$

Legyen $A \vee B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$, és minden $\gamma \in A \vee B$ esetén

$$C_\gamma := \begin{cases} I_\alpha & \text{, ha } \alpha \in A \text{ és } \gamma = (0,\alpha), \\ J_\beta & \text{, ha } \beta \in B \text{ és } \gamma = (1,\beta) \end{cases},$$

valamint

$$e_\gamma := \begin{cases} c_\alpha & \text{, ha } \alpha \in A \text{ és } \gamma = (0,\alpha), \\ -d_\beta & \text{, ha } \beta \in B \text{ és } \gamma = (1,\beta) \end{cases}.$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\sum_{\gamma\in A\vee B} e_\gamma \chi_{C_\gamma} = 0,$$

tehát az (I) alapján

$$0 = \sum_{\gamma\in A\vee B} e_\gamma \theta(C_\gamma) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \theta(I_\alpha) + \sum_{\beta\in B} (-d_\beta)\theta(J_\beta),$$

vagyis

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \theta(I_\alpha) = \sum_{\beta\in B} d_\beta \theta(J_\beta)$$

teljesül. ■

Tétel. Minden $\theta : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ additív függvényhez létezik egyetlen olyan

$$E(\mathbb{R};\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int \varphi \, d\theta$$

$\mathbb{K}$-lineáris leképezés, amelyre minden $I \in S(\mathbb{R})$ esetén

$$\int \chi_I \, d\theta = \theta(I)$$

teljesül.

Bizonyítás. (*Egzisztencia.*) Az előző állítás alapján jól értelmezett az az

$$E(\mathbb{R};\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int \varphi \, d\theta$$

leképezés, amelyre teljesül az, hogy korlátos intervallumok bármely $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges rendszerére, és bármely $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszerre

$$\int \left(\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} \right) d\theta = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \theta(I_\alpha).$$

Az nyilvánvaló, hogy minden $I \in S(\mathbb{R})$ esetén $\int \chi_I \, d\theta = \theta(I)$ teljesül, ezért elegendő igazolni azt, hogy a szóbanforgó leképezés $\mathbb{K}$-lineáris.

Legyen $\varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Legyen $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumok olyan véges rendszere és $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha}.$$

Ekkor természetesen

$$\lambda\varphi = \sum_{\alpha\in A} (\lambda c_\alpha) \chi_{I_\alpha}$$

teljesül, ezért a definíció szerint

$$\int (\lambda\varphi) d\theta := \sum_{\alpha\in A} (\lambda c_\alpha)\theta(I_\alpha) = \lambda \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \theta(I_\alpha) =: \lambda \int \varphi \, d\theta,$$

vagyis a szóbanforgó leképezés $\mathbb{K}$-lineáris.

Legyenek $\varphi,\ \psi \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ és vegyünk korlátos intervallumoknak olyan $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(J_\beta)_{\beta\in B}$ véges rendszereit, valamint olyan $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(d_\beta)_{\beta\in B}$ rendszereket $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha}, \qquad \psi = \sum_{\beta\in B} d_\beta \chi_{J_\beta}.$$

Legyen $A \vee B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$, és minden $\gamma \in A \vee B$ esetén

$$C_\gamma := \begin{cases} I_\alpha & \text{, ha } \alpha \in A \text{ és } \gamma = (0,\alpha), \\ J_\beta & \text{, ha } \beta \in B \text{ és } \gamma = (1,\beta) \end{cases},$$

valamint

$$e_\gamma := \begin{cases} c_\alpha & \text{, ha } \alpha \in A \text{ és } \gamma = (0,\alpha), \\ d_\beta & \text{, ha } \beta \in B \text{ és } \gamma = (1,\beta) \end{cases}.$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\sum_{\gamma\in A\vee B} e_\gamma \chi_{C_\gamma} = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha} + \sum_{\beta\in B} d_\beta \chi_{J_\beta} = \varphi + \psi,$$

tehát a definíció alapján

$$\int(\varphi+\psi)\ d\theta := \sum_{\gamma\in A\vee B} e_\gamma\theta(C_\gamma) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\theta(I_\alpha) + \sum_{\beta\in B} d_\beta\theta(J_\beta) =: \int\varphi\ d\theta + \int\psi\ d\theta,$$

vagyis a szóbanforgó leképezés additív.

(*Unicitás.*) Tegyük fel, hogy $u : E(\mathbb{R};\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ olyan $\mathbb{K}$-lineáris operátor, amelyre minden $I \in S(\mathbb{R})$ esetén $u(\chi_I) = \theta(I)$ teljesül. Ha $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumok véges rendszere, és $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, akkor az u-ra kirótt feltételek alapján

$$u\left(\sum_{\alpha\in A} c_\alpha\chi_{I_\alpha}\right) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha u\left(\chi_{I_\alpha}\right) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\theta(I_\alpha),$$

tehát u szükségképpen egyenlő a bizonyítás egzisztencia-részében bevezetett

$$E(\mathbb{R};\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int\varphi\ d\theta$$

leképezéssel. ■

Definíció. Ha $\theta{:}S(\mathbb{R})\to\mathbb{K}$ additív függvény, akkor az $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvények tere feletti *elemi θ-integrálnak* nevezzük azt az

$$E(\mathbb{R};\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \int\varphi\ d\theta$$

$\mathbb{K}$-lineáris leképezést, amelyre teljesül az, hogy korlátos intervallumok bármely $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges rendszerére, és bármely $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ $\mathbb{K}$-ban haladó rendszerre

$$\int\left(\sum_{\alpha\in A} c_\alpha\chi_{I_\alpha}\right)\ d\theta = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\theta(I_\alpha).$$

Tehát ha $\theta{:}S(\mathbb{R})\to\mathbb{K}$ additív függvény és $\varphi,\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvények, valamint $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\int(\varphi+\psi)\ d\theta = \int\varphi\ d\theta + \int\psi\ d\theta; \qquad \int(\lambda.\varphi)\ d\theta = \lambda\int\varphi\ d\theta$$

teljesül, valamint minden $I \subseteq \mathbb{R}$ korlátos intervallumra

$$\int\chi_I\ d\theta = \theta(I).$$

Továbbá, ha $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumok véges rendszere, és $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, akkor

$$\overline{\sum_{\alpha\in A} c_\alpha\theta(I_\alpha)} = \sum_{\alpha\in A} \overline{c_\alpha}\,\overline{\theta(I_\alpha)} =: \sum_{\alpha\in A} \overline{c_\alpha}\,\overline{\theta}(I_\alpha),$$

ami azt jelenti, hogy minden $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényre

$$\overline{\int \varphi \, d\theta} = \int \overline{\varphi} \, d\overline{\theta}$$

teljesül. Ebből következik, hogy ha θ valós additív függvény, akkor valós lépcsősfüggvény elemi θ-integrálja valós szám.

Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ pozitív additív függvény és $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvény, hogy $\varphi \geq 0$, akkor φ elemi μ-integrálja nemnegatív valós szám. Valóban, ekkor létezik korlátos intervallumoknak olyan $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ véges rendszere és olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ rendszer, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha},$$

így a definíció alapján

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mu(I_\alpha) \geq 0.$$

Speciálisan, ha $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvények és $\varphi \leq \psi$, akkor $\psi - \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvény, hogy $\psi - \varphi \geq 0$, így az előzőek és az elemi μ-integrál linearitása folytán

$$0 \leq \int (\psi - \varphi) \, d\mu = \int \psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu,$$

vagyis

$$\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$$

is teljesül. Ezt a tulajdonságot a pozitív additív függvény szerinti elemi integrál *monotonitásának* nevezzük.

Állítás. Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggény, és I olyan korlátos intervallum $\mathbb{R}$-ben, hogy $[\varphi \neq 0] \subseteq I$, valamint $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy $|\varphi| \leq C$. Ekkor minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvényre

$$\left| \int \varphi \, d\mu \right| \leq \int |\varphi| \, d\mu \leq C\mu(I)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ korlátos intervallumok véges diszjunkt rendszere, és $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó rendszer, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha}.$$

Ekkor

$$|\varphi| = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| \chi_{I_\alpha} \leq C \chi_I$$

is teljesül, ezért a lépcsősfüggvények elemi μ-integráljának értelmezése, valamint az elemi μ-integrál monotonitása miatt fennállnak a következő összefüggések:

$$\left|\int \varphi \, d\mu\right| := \left|\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \mu(I_\alpha)\right| \le \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha|\mu(I_\alpha) =: \int |\varphi| \, d\mu \le \int (C\chi_I) \, d\mu := C\mu(I),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Definíció. Minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvényre és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvényre

$$\int^* f \, d\mu := \inf\left\{\int \varphi \, d\mu \;\middle|\; (\varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})) \wedge (f \le \varphi)\right\},$$

ha létezik olyan $\varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})$, amelyre $f \le \varphi$, és

$$\int^* f \, d\mu := +\infty$$

egyébként. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, akkor az

$$\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}_+) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad f \mapsto \int^* f \, d\mu$$

leképezést *Riemann-féle felső μ-integrálnak* nevezzük.

Állítás. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény és $f : I \to \mathbb{K}$ függvény, akkor

$$\int^* |f| \, d\mu < +\infty$$

pontosan akkor teljesül, ha f korlátos (vagyis az $Im(f)$ halmaz korlátos $\mathbb{K}$-ban) és az $[f \ne 0]$ halmaz korlátos $\mathbb{R}$-ben.

Bizonyítás. A feltétel elégséges, mert ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy $|f| \le C$, valamint $I \subseteq \mathbb{R}$ olyan korlátos intervallum, hogy $[f \ne 0] \subseteq I$, akkor $|f| \le C\chi_I$, és $C\chi_I$ lépcsősfüggvény, így

$$\int^* |f| \, d\mu \le \int (C\chi_I) \, d\mu = C\mu(I) < +\infty.$$

Megfordítva, ha az $|f|$ Riemann-féle felső μ-integrálja véges, akkor szükségképpen létezik olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $|f| \le \varphi$. A φ függvény korlátossága miatt $|f|$ is korlátos, ezért f korlátos. Továbbá: $[f \ne 0] = [|f| \ne 0] \subseteq [\varphi \ne 0]$, és a $[\varphi \ne 0]$ halmaz korlátos, így $[f \ne 0]$ korlátos. ■

Állítás. (*A Riemann-féle felső integrál tulajdonságai.*) Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény.

a) Ha $\varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})$ és $\varphi \ge 0$, akkor

$$\int^* \varphi \, d\mu = \int \varphi \, d\mu.$$

b) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvények, és $f \leq g$, akkor

$$\int^* f \, d\mu \leq \int^* g \, d\mu$$

(a Riemann-féle felső μ-integrál *monoton növő*).

c) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvény és $\lambda \in \mathbb{R}_+$, akkor

$$\int^* (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int^* f \, d\mu$$

(a Riemann-féle felső μ-integrál *pozitív homogén*).

d) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvények, akkor

$$\int^* (f + g) \, d\mu \leq \int^* f \, d\mu + \int^* g \, d\mu$$

(a Riemann-féle felső μ-integrál *szubadditív*).

e) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvény és $I \subseteq \mathbb{R}$ olyan korlátos intervallum, hogy $[f \neq 0] \subseteq I$, és $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy $f \leq C$, akkor

$$\int^* f \, d\mu \leq C\mu(I).$$

Bizonyítás. a) A Riemann-féle felső μ-integrál definíciója alapján

$$\int^* \varphi \, d\mu \leq \int \varphi \, d\mu$$

nyilvánvalóan teljesül. Ha $\psi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ olyan, hogy $\varphi \leq \psi$, akkor a lépcsősfüggvények elemi μ-integráljának monotonitása miatt

$$\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu,$$

amiből következik, hogy

$$\int \varphi \, d\mu \leq \inf \left\{ \int \psi \, d\mu \;\middle|\; \psi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R}),\ \varphi \leq \psi \right\} =: \int^* \varphi \, d\mu$$

is teljesül.

b) Ha $\int^* g = +\infty$, akkor az egyenlőtlenség nyilván igaz, ezért $\int^* g < +\infty$ feltehető. Ha $\varphi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ olyan, hogy $g \leq \varphi$, akkor $f \leq g$ miatt $f \leq \varphi$ is teljesül, ezért a Riemann-féle felső μ-integrál definíciója alapján

$$\int^* f \, d\mu \leq \int \varphi \, d\mu.$$

Ebből következik, hogy

$$\int^* f\ d\mu \le \inf\left\{\int \varphi\ d\mu \ \middle|\ \varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ g \le \varphi\right\} =: \int^* g\ d\mu$$

teljesül.

c) A $0 \cdot (+\infty) := 0$ konvenció miatt az egyenlőség igaz akkor, ha $\lambda = 0$, ezért feltesszük, hogy $\lambda > 0$.

Ha $\int^* f\ d\mu = +\infty$, akkor a $\lambda(+\infty) := +\infty$ konvenció szerint $\lambda \int^* f\ d\mu = +\infty$. Ha létezne olyan $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, amelyre $\lambda f \le \varphi$ teljesülne, akkor $\lambda^{-1}\psi$ olyan lépcsősfüggvény volna, amelyre $f \le \lambda^{-1}\psi$ igaz volna, ami $\int^* f\ d\mu = +\infty$ miatt lehetelen. Ezért ekkor

$$\int^* (\lambda f)\ d\mu = +\infty = \lambda \int^* f\ d\mu$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy elegendő a $\lambda > 0$ és $\int^* f\ d\mu < +\infty$ esetet vizsgálni.

Ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvény, hogy $f \le \varphi$, akkor $\lambda\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvény, hogy $\lambda f \le \lambda\varphi$, így a Riemann-féle felső μ-integrál definíciója és a lépcsősfüggvények elemi μ-integráljának homogenitása folytán

$$\int^* (\lambda f)\ d\mu \le \int (\lambda\varphi)\ d\mu = \lambda \int \varphi\ d\mu$$

tehát fennáll a

$$\lambda^{-1} \int^* (\lambda f)\ d\mu \le \int \varphi\ d\mu$$

egyenlőtlenség. Ismét a Riemann-féle felső μ-integrál definíciója alapján ebből kapjuk, hogy

$$\lambda^{-1} \int^* (\lambda f)\ d\mu \le \inf\left\{\int \varphi\ d\mu \ \middle|\ (\varphi \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})) \wedge (f \le \varphi)\right\} =: \int^* f\ d\mu,$$

tehát

$$\int^* (\lambda f)\ d\mu \le \lambda \int^* f\ d\mu$$

teljesül. Ez *minden* olyan $\lambda \in \mathbb{R}^+$ számra és minden olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvényre igaz, amelyre $\int^* f < +\infty$. Ha λ és f ilyen objektumok, akkor λ és $\lambda^{-1}f$ is ilyenek, ezért

$$\int^* f\ d\mu = \int^* (\lambda(\lambda^{-1}f))\ d\mu \le \lambda \int^* (\lambda^{-1}f)\ d\mu,$$

vagyis

$$\lambda^{-1} \int^* f\ d\mu \le \int^* (\lambda^{-1}f)\ d\mu$$

is teljesül. Ez tehát *minden* olyan $\lambda \in \mathbb{R}^+$ számra és minden olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvényre igaz, amelyre $\int^* f < +\infty$. Ha λ és f ilyen objektumok, akkor λ^{-1} és f is ilyenek, ezért a

$$\lambda \int^* f \, d\mu \leq \int^* (\lambda f) \, d\mu$$

fordított egyenlőtlenség is teljesül.

d) Ha a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán $+\infty$ áll, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Ezért elég arra az esetre bizonyítani, amikor

$$\int^* f < +\infty, \qquad \int^* g < +\infty$$

teljesül. Legyenek $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvények, hogy $f \leq \varphi$ és $g \leq \psi$. Ekkor $\varphi + \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvény, hogy $f + g \leq \varphi + \psi$, így a Riemann-féle felső μ-integrál értelmezése és a lépcsősfüggvények elemi integráljának additivitása alapján

$$\int^* (f + g) \leq \int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$$

teljesül. Ha tehát $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvény, hogy $f \leq \varphi$, akkor minden $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsőfüggvényre, $g \leq \psi$ esetén

$$\int^* (f + g) \, d\mu - \int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$$

teljesül, tehát a Riemann-féle felső integrál definíciója szerint

$$\int^* (f + g) \, d\mu - \int \varphi \, d\mu \leq \inf \left\{ \int \psi \, d\mu \;\middle|\; (\psi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R})) \wedge (g \leq \psi) \right\} =: \int^* g \, d\mu.$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy minden $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvényre, ha $f \leq \varphi$, akkor

$$\int^* (f + g) \, d\mu - \int^* g \, d\mu \leq \int \varphi \, d\mu$$

teljesül, így ismét a Riemann-féle felső μ-integrál definícióját alkalmazva

$$\int^* (f + g) \, d\mu - \int^* g \, d\mu \leq \inf \left\{ \int \varphi \, d\mu \;\middle|\; (\varphi \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R})) \wedge (f \leq \varphi) \right\} =: \int^* f \, d\mu$$

adódik, amiből átrendezéssel kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

e) Nyilvánvaló, mert a hipotézis alapján $f \leq C\chi_I \in E(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ teljesül, így a Riemann-féle felső μ-integrál definíciója szerint

$$\int^* f \, d\mu \leq \int (C\chi_I) \, d\mu = C\mu(I)$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy a Riemann-féle felső integrál csak szubadditív, de *nem additív*, vagyis létezik olyan $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény és léteznek olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvények, hogy

$$\int^* (f+g)\ d\mu < \int^* f\ d\mu + \int^* g\ d\mu$$

teljesül. Ha például $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ és $g := \chi_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]}$, akkor $f+g = \chi_{[0,1]} \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})$, és

$$\int^* (f+g)\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int (f+g)\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = 1,$$

ugyanakkor könnyen igazolható, hogy

$$\int^* f\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = 1 = \int^* g\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}}.$$

Definíció. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, akkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényt *Riemann-integrálhatónak* nevezzük *μ-szerint*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvény, hogy

$$\int^* |f-\varphi|\ d\mu < \varepsilon$$

teljesül.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvény Riemann-integrálható minden $\mu{:}S(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_+$ additív függvény szerint, továbbá, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény, akkor

$$\int^* |f|\ d\mu < +\infty$$

teljesül (ezért f korlátos és $[f \neq 0]$ korlátos), hiszen a definíció alapján van olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvény, hogy

$$\int^* |f-\varphi|\ d\mu < 1,$$

így a Riemann-féle felső integrál szubadditivitása miatt

$$\int^* |f|\ d\mu = \int^* |(f-\varphi)+\varphi|\ d\mu \leq \int^* |f-\varphi|\ d\mu + \int^* |\varphi|\ d\mu < 1 + \int |\varphi|\ d\mu < +\infty$$

teljesül.

Állítás. Legyen $\mu{:}S(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_+$ additív függvény. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) Az f függvény Riemann-integrálható μ-szerint.

(ii) Létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

teljesül.

(iii) Létezik μ-szerint Riemann-integrálható függvényeknek olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n| \, d\mu = 0$$

teljesül.

(iv) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény, hogy

$$\int^* |f - g| \, d\mu < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, akkor az (i) alapján *kiválasztható* $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int^* |f - \varphi_n| \, d\mu < \varepsilon_n$$

teljesül; ekkor nyilvánvalóan fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

egyenlőség.

(ii)⇒(iii) Nyilvánvaló, mert a lépcsősfüggvények Riemann-integrálhatóak μ-szerint.

(iii)⇒(iv) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek mindegyik tagja μ-szerint Riemann-integrálható függvény, és

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n| \, d\mu = 0$$

teljesül, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\int^* |f - f_n| \, d\mu < \varepsilon.$$

(iv)⇒(i) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A (iv) alapján van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény, hogy

$$\int^* |f - g| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A Riemann-integrálhatóság definíciója szerint van olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvény, hogy

$$\int^* |g - \varphi| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitását és szubadditivitását alkalmazva

$$\int^* |f-\varphi|\ d\mu = \int^* |(f-g)+(g-\varphi)|\ d\mu \le \int^* (|f-g|+|g-\varphi|)\ d\mu \le$$

$$\le \int^* |f-g|\ d\mu + \int^* |g-\varphi|\ d\mu < \varepsilon$$

adódik, tehát f Riemann-integrálható μ-szerint. ■

Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényeknek sorozata, akkor a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f-f_n|\ d\mu = 0$$

egyenlőséget úgy fejezzük ki, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *μ-integrálisan approximálja* az f függvényt.

Állítás. Tegyük fel, hogy $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ olyan additív függvény, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(\{x\}) = 0$. (Ilyen például az $\mathbb{R}$ feletti euklidészi mérték.)
a) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, hogy az $[f \neq 0]$ halmaz *véges*, akkor

$$\int^* f\ d\mu = 0.$$

b) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan függvények, hogy az $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz *véges*, akkor

$$\int^* f\ d\mu = \int^* g\ d\mu.$$

c) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ olyan függvények, hogy az $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz *véges*, akkor az f μ-szerinti Riemann-integrálhatósága ekvivalens a g μ-szerinti Riemann-integrálhatóságával.
Bizonyítás. a) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, hogy az $[f \neq 0]$ halmaz véges, akkor

$$f = \sum_{x\in[f\neq 0]} f(x)\chi_{\{x\}},$$

tehát f olyan lépcsősfüggvény, hogy $f \ge 0$, ezért

$$\int^* f\ d\mu = \int f\ d\mu := \sum_{x\in[f\neq 0]} f(x)\mu(\{x\}) = 0.$$

b) Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan függvények, hogy a $H := \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz véges. Ha $H = \emptyset$, akkor $f = g$, így az állítás triviálisan igaz, ezért feltesszük, hogy $H \neq \emptyset$. Világos, hogy a

$$\left(\max_{x\in H} f(x)\right)\chi_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \qquad \left(\max_{x\in H} g(x)\right)\chi_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

olyan függvények, amelyek a H halmazon kívül mindenütt 0 értéket vesznek föl, így az a) alapján

$$\int^* \left(\left(\max_{x \in H} f(x) \right) \chi_H \right) \, d\mu = 0 = \int^* \left(\left(\max_{x \in H} g(x) \right) \chi_H \right) \, d\mu.$$

Továbbá nyilvánvalóan fennálnak a következő függvény-egyenlőtlenségek:

$$f \leq g + \left(\max_{x \in H} f(x) \right) \chi_H, \qquad g \leq f + \left(\max_{x \in H} g(x) \right) \chi_H.$$

Ezeket alkalmazva, a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\int^* f \, d\mu \leq \int^* g \, d\mu + \int^* \left(\left(\max_{x \in H} f(x) \right) \chi_H \right) \, d\mu = \int^* g \, d\mu,$$

$$\int^* g \, d\mu \leq \int^* f \, d\mu + \int^* \left(\left(\max_{x \in H} g(x) \right) \chi_H \right) \, d\mu = \int^* f \, d\mu,$$

adódik, vagyis

$$\int^* f \, d\mu = \int^* g \, d\mu.$$

c) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ olyan függvények, hogy az $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ halmaz véges, akkor bármely $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényre az $\{x \in \mathbb{R} | |f(x) - \varphi(x)| \neq |g(x) - \varphi(x)|\}$ halmaz véges, így a b) alapján

$$\int^* |f - \varphi| \, d\mu = \int^* |g - \varphi| \, d\mu,$$

ezért az f függvény μ-szerinti Riemann-integrálhatósága nyilvánvalóan ekvivalens a g függvény μ-szerinti Riemann-integrálhatóságával. ■

Állítás. (*A Riemann-integrálható függvények tulajdonságai.*) Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény.

a) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvények, akkor $f + g$, fg, $\overline{f}$ és $|f|$ Riemann-integrálhatóak μ-szerint, és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén λf is Riemann-integrálható μ-szerint.

b) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvények, akkor $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ és f^- is Riemann-integrálhatóak μ-szerint.

Bizonyítás. (I) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény, és vegyünk $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\overline{f} - \overline{\varphi_n}| = |f - \varphi_n|$, és $||f| - |\varphi_n|| \leq |f - \varphi_n|$, és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $|\lambda f - \lambda \varphi_n| = |\lambda||f - \varphi_n|$, ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\lim_{n \to \infty} \int^* |\overline{f} - \overline{\varphi_n}| \, d\mu = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int^* ||f|-|\varphi_n||\,d\mu=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |\lambda f-\lambda\varphi_n|\,d\mu=0$$

teljesül, és minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\overline{\varphi_n}$, $|\varphi_n|$ és $\lambda\varphi_n$ mind lépcsősfüggvények, ezért $\overline{f}$, $|f|$ és λf μ-szerint Riemann-integrálható függvények.

(II) Legyenek $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvények, és vegyünk $\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatait, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |f-\varphi_n|\,d\mu=0=\lim_{n\to\infty}\int^* |g-\psi_n|\,d\mu.$$

Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$|(f+g)-(\varphi_n+\psi_n)|\le|f-\varphi_n|+|g-\psi_n|,$$

ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és szubadditivitása miatt

$$\int^* |(f+g)-(\varphi_n+\psi_n)|\,d\mu\le\int^*(|f-\varphi_n|+|g-\psi_n|)\,d\mu\le$$

$$\le\int^* |f-\varphi_n|\,d\mu+\int^* |g-\psi_n|\,d\mu$$

teljesül, tehát fennáll a

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |(f+g)-(\varphi_n+\psi_n)|\,d\mu=0$$

egyenlőség. Mivel pedig minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\varphi_n+\psi_n$ lépcsősfüggvény, ezért ebből következik, hogy $f+g$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény.

(III) Ha $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvények, akkor (I), (II) és

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|),\quad f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|),\quad f^+=f\vee 0,\quad f^+=(-f)\vee 0$$

miatt az $f\vee g$, $f\wedge g$, f^+ és f^- függvények is Riemann-integrálhatóak μ-szerint.

(IV) Végül, megmutatjuk, hogy ha $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvények, akkor fg is Riemann-integrálható μ-szerint.

Először tegyük fel, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ *lépcsősfüggvény.* Vegyünk $\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre

$$\lim_{n\to\infty}\int^* |f-\varphi_n|\,d\mu=0.$$

A g függvény korlátos, tehát van olyan $C\in\mathbb{R}_+$, hogy $|g|\le C$. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$|fg-\varphi_n g|=|f-\varphi_n||g|\le C|f-\varphi_n|,$$

így a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\int^* |fg - \varphi_n g| \, d\mu \leq C \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu$$

teljesül, tehát fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |fg - \varphi_n g| \, d\mu = 0$$

összefüggés. Mivel pedig minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n g$ lépcsősfüggvény, ebből következik, hogy fg Riemann-integrálható μ-szerint.

Az általános esetben legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvények. A g-hez vegyük $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |g - \psi_n| \, d\mu = 0.$$

Az f Riemann-integrálható μ-szerint, tehát korlátos, így van olyan olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy $|f| \leq C$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|fg - f\psi_n| = |f||g - \psi_n| \leq C|g - \psi_n|,$$

így a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és pozitív homogenitása miatt

$$\int^* |fg - f\psi_n| \, d\mu \leq C \int^* |g - \psi_n| \, d\mu$$

teljesül, tehát fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |fg - f\psi_n| \, d\mu = 0$$

összefüggés. Mivel pedig minden $\mathbb{N} \ni n$-re a bizonyítás első része szerint az $f\psi_n$ függvény Riemann-integrálható μ-szerint, ebből következik, hogy az fg függvény Riemann-integrálható μ-szerint. ■

Következmény. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, akkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható μ-szerint, ha a $\mathfrak{Re}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\mathfrak{Im}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények mindketten Riemann-integrálhatóak μ-szerint.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik az előző állításból és a

$$\mathfrak{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \qquad \mathfrak{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}), \qquad f = \mathfrak{Re}(f) + i\mathfrak{Im}(f)$$

összefüggésekből. ■

Állítás. Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény.

a) Ha $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvények olyan sorozata, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0,$$

akkor a

$$\left(\int \varphi_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat konvergens $\mathbb{K}$-ban.

b) Ha $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvények olyan sorozatai, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0 = \lim_{n\to\infty} \int^* |f - \psi_n| \, d\mu,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\mu$$

teljesül.

Bizonyítás. a) Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén a lépcsősfüggvények elemi μ-integráljára vonatkozó összefüggések, valamint a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\left|\int \varphi_m \, d\mu - \int \varphi_n \, d\mu\right| = \left|\int (\varphi_m - \varphi_n) \, d\mu\right| \le \int |\varphi_m - \varphi_n| \, d\mu = \int^* |\varphi_m - \varphi_n| \, d\mu =$$

$$= \int^* |(\varphi_m - f) + (f - \varphi_n)| \, d\mu \le \int^* (|\varphi_m - f| + |f - \varphi_n|) \, d\mu \le$$

$$\le \int^* |\varphi_m - f| \, d\mu + \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu,$$

teljesül, ezért a

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

feltétel alapján az

$$\left(\int \varphi_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat *Cauchy-sorozat* $\mathbb{K}$-ban, tehát konvergens.

b) Értelmezzük azt a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_{2k} := \varphi_k, \qquad g_{2k+1} := \psi_k.$$

Legyenek $\sigma_0, \sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ azok az indexsorozatok, amelyekre minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sigma_0(k) := 2k, \qquad \sigma_1(k) := 2k + 1,$$

továbbá legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$c_n := \int^* |f - g_n|.$$

Világos, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_{\sigma_0(k)} := \int^* |f - g_{2k}| = \int^* |f - \varphi_k|,$$

$$c_{\sigma_1(k)} := \int^* |f - g_{2k+1}| = \int^* |f - \psi_k|,$$

tehát a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatnak $\left(c_{\sigma_0(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ és $\left(c_{\sigma_1(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan részsorozatai, amelyek 0-hoz konvergálnak. Ugyanakkor $Im(\sigma_0) \cup Im(\sigma_1) = \mathbb{N}$, ezért $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is zérussorozat, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - g_n| = 0$$

teljesül. Az a) alapján ebből kapjuk, hogy az $\left(\int g_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{K}$-ban. Azonban minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\int g_{\sigma_0(k)} \, d\mu = \int \varphi_k \, d\mu, \qquad \int g_{\sigma_1(k)} \, d\mu = \int \psi_k \, d\mu,$$

vagyis a $\left(\int \varphi_k \, d\mu\right)_{k\in\mathbb{N}}$ és $\left(\int \psi_k \, d\mu\right)_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozatok részsorozatai a konvergens $\left(\int g_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozatnak. Ezért ezek a részsorozatok is konvergensek (ezt már az a) alapján is tudjuk), és a határértékeik egyenlőek (ez a lényeges), vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\mu$$

teljesül. ■

Az előző állítás alapján értelmes a következő definíció.

Definíció. Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény. Ekkor

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu,$$

ahol $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvények tetszőleges olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

teljesül. Ezt a számot az f függvény *μ-szerinti Riemann-integráljának* nevezzük.

Azonnal megjegyezzük, hogy a μ-szerinti Riemann-integrálra bevezetett jelölés semmiféle félreértést nem okoz, mert ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvény, akkor f Riemann-integrálható μ-szerint, és az f értékű állandó sorozat lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amely μ-integrálisan approximálja az f függvényt, így az f most bevezett μ-szerinti Riemann-integrálja megegyezik az f elemi μ-integráljával. Azt is mondhatjuk, hogy a μ-szerinti Riemann-integrál a lépcsősfüggvények terén bevezetett elemi μ-integrál *kiterjesztése* a μ-szerint Riemann-integrálható függvények terére. A következő állításokban megfogalmazzuk a Riemann-integrál néhány elemi tulajdonságát.

Állítás. (*A Riemann-integrál linearitása.*) Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény. Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvények és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu;$$

$$\int (\lambda f)\ d\mu = \lambda \int f\ d\mu$$

teljesül.

Bizonyítás. Vegyünk $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatait, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n|\ d\mu = 0 = \lim_{n\to\infty} \int^* |g - \psi_n|\ d\mu.$$

A μ-szerinti Riemann-integrálok tulajdonságairól szóló állítás bizonyításának (III) és (I) részében l áttuk, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |(f+g) - (\varphi_n + \psi_n)|\ d\mu = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |\lambda f - \lambda\varphi_n|\ d\mu = 0$$

teljesül, ezért a μ-szerinti Riemann-integrál definíciója és a lépcsősfüggvények elemi μ-integráljának linearitása folytán fennálnak az

$$\int (f+g)\ d\mu := \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int \varphi_n\ d\mu + \int \psi_n\ d\mu \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\ d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\ d\mu =: \int f\ d\mu + \int g\ d\mu,$$

valamint az

$$\int (\lambda f)\ d\mu := \lim_{n\to\infty} \int (\lambda\varphi_n)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \lambda \int \varphi_n\ d\mu = \lambda \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\ d\mu =: \lambda \int f\ d\mu$$

összefüggések. ■

Állítás. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan μ-szerint Riemann-integrálható függvény, hogy $f \geq 0$, akkor

$$\int^* f\ d\mu = \int f\ d\mu$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n|\ d\mu = 0$$

teljesül. Ekkor $f \geq 0$ miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$|f - \varphi_n^+| = |f^+ - \varphi_n^+| \leq |f - \varphi_n|,$$

tehát a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása miatt

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n^+| \, d\mu = 0$$

is teljesül, vagyis $(\varphi_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ *pozitív* lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amely μ-integrálisan approximálja f-t. Ezért a μ-szerinti Riemann-integrál definíciója alapján

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^+ \, d\mu.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f \leq \varphi_n^+ + |f - \varphi_n^+|$, ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\int^* f \, d\mu \leq \int^* \varphi_n^+ \, d\mu + \int^* |f - \varphi_n^+| \, d\mu.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor φ_n^+ pozitív lépcsősfüggvény tehát

$$\int^* \varphi_n^+ \, d\mu = \int \varphi_n^+ \, d\mu,$$

így az előző egyenlőtlenségből $n \to \infty$ esetén kapjuk, hogy

$$\int^* f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^+ \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n^+ \leq f + |\varphi_n^+ - f|$, ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\int^* \varphi_n^+ \, d\mu \leq \int^* f \, d\mu + \int^* |\varphi_n^+ - f| \, d\mu.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor φ_n^+ pozitív lépcsősfüggvény tehát

$$\int^* \varphi_n^+ \, d\mu = \int \varphi_n^+ \, d\mu,$$

így az előző egyenlőtlenségből $n \to \infty$ esetén kapjuk, hogy

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^+ \, d\mu \leq \int^* f \, d\mu$$

teljesül. ■

Következmény. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény, és $I \subseteq \mathbb{R}$ olyan korlátos intervallum, hogy $[f \neq 0] \subseteq I$, valamint $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, hogy $|f| \leq C$, akkor

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu \leq C\mu(I)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

teljesül. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $||f|-|\varphi_n|| \leq |f-\varphi_n|$, ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása miatt

$$\int^* ||f| - |\varphi_n|| \, d\mu \leq \int^* |f - \varphi_n| \, d\mu$$

teljesül, továbbá tudjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\varphi_n|$ lépcsősfüggvény. Ezért a μ-szerinti Riemann-integrál definíciója szerint

$$\int |f| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n| \, d\mu.$$

Tekintettel arra, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re fennáll az

$$\left| \int \varphi_n \, d\mu \right| \leq \int |\varphi_n| \, d\mu$$

egyenlőtlenség, az

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu$$

egyenlőség alapján ebből kapjuk, hogy

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int \varphi_n \, d\mu \right| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n| \, d\mu = \int |f| \, d\mu = \int^* |f| \, d\mu \leq C\mu(I),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk a Riemann-féle felső μ-integrál korábban igazolt e) tulajdonságát (f helyett az $|f|$ függvényre alkalmazva). ■

Tétel. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-szerint Riemann-integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n| \, d\mu = 0$$

teljesül, akkor f Riemann-integrálható μ-szerint és fennáll az

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Korábban igazoltuk, hogy az adott feltételek mellett f Riemann-integrálható μ-szerint. A μ-szerinti Riemann-integrál linearitását, valamint az előző állításban felírt egyenlőtlenséget alkamazva kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\int f\ d\mu - \int f_n\ d\mu\right| = \left|\int (f - f_n)\ d\mu\right| \leq \int |f - f_n|\ d\mu = \int^* |f - f_n|\ d\mu,$$

ezért

$$\int f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu$$

teljesül. ■

Következmény. Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-szerint Riemann-integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\right) = 0$$

teljesül, és létezik olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[f_n \neq 0] \subseteq H$, akkor f Riemann-integrálható μ-szerint és fennáll az

$$\int f\ d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen I olyan korlátos intervallum, hogy $[f \neq 0] \cup H \subseteq I$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$C_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|.$$

Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f - f_n| \leq C_n\chi_I$ és az egyenlőtlenség jobb oldalán lépcsősfüggvény áll, így a Riemann-féle felső μ-integrál értelmezése szerint

$$\int^* |f - f_n|\ d\mu \leq C_n\mu(I),$$

tehát a $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ hipotézis alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int^* |f - f_n|\ d\mu = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az előző állítás feltételei teljesülnek f-re és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-szerint Riemann-integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényeknek olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\right) = 0$$

teljesül, de a *nem létezik* olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[f_n \neq 0] \subseteq H$, akkor

– lehetséges, hogy f μ-szerint Riemann-integrálható, de az

$$\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

számsorozat nem konvergens, vagy konvergens, de a határértéke nem egyenlő az f μ-szerint Riemann-integráljával;

– lehetséges, hogy az $[f \neq 0]$ halmaz nem korlátos, így f nem lehet Riemann-integrálható μ-szerint.

Következmény. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ olyan folytonos függvény, hogy $[f \neq 0]$ korlátos halmaz, akkor f Riemann-integrálható minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint.

Bizonyítás. ■

2. A határozott Riemann-integrál és alkalmazásai

Jelölés. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény, akkor f° jelöli azt az $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényt, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^\circ(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, ha } x \in Dom(f) \\ 0 & \text{, ha } x \notin Dom(f). \end{cases}$$

Definíció. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, akkor egy $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt *μ-szerint lokálisan Riemann-integrálhatónak* nevezünk, ha $Dom(f)$ intervallum $\mathbb{R}$-ben és minden $K \subseteq Dom(f)$ korlátos és zárt intervallumra az $(f|_K)^\circ$ függvény μ-szerint Riemann-integrálható.

Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény. Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható, akkor az f minden $Dom(f)$ által tartalmazott korlátos és zárt intervallumon korlátos. Ez a μ-szerint lokális Riemann-integrálhatóság *természetes szükséges feltétele.* Azonban hamarosan látni fogjuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható, akkor sem az $Im(f) \subseteq \mathbb{K}$, sem az $[f \neq 0] \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nem szükségképpen korlátos.

A következő definíció előtt megjegyezzük, hogy ha az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény lokálisan Riemann-integrálható és $a, b \in Dom(f)$ olyanok, hogy $a \leq b$, akkor az $(f|_{[a,b[})^\circ$, az $(f|_{]a,b]})^\circ$ és az $(f|_{]a,b[})^\circ$ függvények mind Riemann-integrálhatóak, mert csak véges sok pontban különböznek az $(f|_{[a,b]})^\circ$ függvénytől, ami a lokális Riemann-integrálhatóság definíciója szerint Riemann-integrálható.

Definíció. Ha $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény és az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható, akkor minden $a, b \in Dom(f)$ esetén az

$$\int_a^b f \, d\mu := \begin{cases} \displaystyle\int (f|_{[a,b[})^\circ \, d\mu & \text{, ha } a \leq b \\ \displaystyle -\int (f|_{[b,a[})^\circ \, d\mu & \text{, ha } a > b \end{cases}$$

jelölést alkalmazzuk, és ezt a számot az f függvény a és b határok között vett *μ-szerinti határozott Riemann-integráljának* nevezzük.

Állítás. (*A határozott Riemann-integrál tulajdonságai.*) Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény.

a) Ha $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható függvények és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $a, b \in Dom(f) \cap Dom(g)$ pontra

$$\int_a^b (f + g) \, d\mu = \int_a^b f \, d\mu + \int_a^b g \, d\mu,$$

$$\int_a^b (\lambda f)\ d\mu = \lambda \int_a^b f\ d\mu$$

teljesül.

b) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható függvény, akkor minden $a, b, c \in Dom(f)$ pontra

$$\int_a^b f\ d\mu + \int_b^c f\ d\mu + \int_c^a f\ d\mu = 0, \qquad \int_a^b f\ d\mu = -\int_b^a f\ d\mu, \qquad \int_a^a f\ d\mu = 0$$

teljesül.

c) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható függvény és $a, b \in Dom(f)$, akkor fennáll az

$$\left| \int_a^b f\ d\mu \right| \leq \left(\sup_{x \in [\min(a,b), \max(a,b)[} |f(x)| \right) \mu([\min(a,b), \max(a,b)[)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. a) Legyen $a' := \min(a, b)$ és $b' := \max(a, b)$. Ekkor nyilvánvalóan teljesülnek az

$$\left((f+g)|_{[a',b'[}\right)^\circ = \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ + \left(g|_{[a',b'[}\right)^\circ;$$

$$\left((\lambda f)|_{[a',b'[}\right)^\circ = \lambda \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ$$

egyenlőségek, ezért a Riemann-integrál linearitása és a határozott Riemann-integrál definíciója alapján fennáll, hogy

$$\int_a^b (f+g)\ d\mu := \int ((f+g)|_{[a',b'[})^\circ\ d\mu =$$

$$= \int \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ\ d\mu + \int \left(g|_{[a',b'[}\right)^\circ\ d\mu =: \int_a^b f\ d\mu + \int_a^b g\ d\mu,$$

valamint

$$\int_a^b (\lambda f)\ d\mu := \int \left((\lambda f)|_{[a',b'[}\right)^\circ\ d\mu = \lambda \int \left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ\ d\mu =: \lambda \int_a^b f\ d\mu.$$

b) Az első egyenlőséget elegendő arra a speciális esetre igazolni, amikor $a \leq b \leq c$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy ekkor fennáll az

$$(f|_{[a,c[})^\circ = (f|_{[a,b[})^\circ + (f|_{[b,c[})^\circ$$

egyenlőség, amiből a Riemann-integrál additivitása és a határozott Riemann-integrál definíciója alapján következik, hogy

$$-\int_c^a f\ d\mu := \int (f|_{[a,c[})^\circ\ d\mu = \int (f|_{[a,b[})^\circ\ d\mu + \int (f|_{[b,c[})^\circ\ d\mu =: \int_a^b f\ d\mu + \int_b^c f\ d\mu.$$

Ezzel az első egyenlőséget igazoltuk. Ebből következik, hogy ha $a = b = c$, akkor

$$3\int_a^a f\ d\mu = 0,$$

tehát a harmadik egyenlőség is teljesül. Végül, a második egyenlőség az elsőből és a harmadikból nyilvánvalóan következik, ha $c = b$.

c) Legyen $a' := \min(a, b)$ és $b' := \max(a, b)$. Ekkor nyilvánvaló, hogy

$$\left|\left(f|_{[a',b'[}\right)^\circ\right| \leq \left(\sup_{x\in[a',b'[} |f(x)|\right) \chi_{[a',b'[},$$

ezért a pozitív additív függvény szerinti Riemann-integrál elemi tulajdonságait alkalmazva:

$$\left|\int_a^b f\ d\mu\right| := \left|\int (f|_{[a',b'[})^\circ\ d\mu\right| \leq \int \left|(f|_{[a',b'[})^\circ\right|\ d\mu \leq \left(\sup_{x\in[a',b'[} |f(x)|\right) \mu([a', b']),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{K}$ a $\mu_{id_\mathbb{R}}$ euklidészi mérték szerint lokálisan Riemann-integrálható függvény. Legyen $c \in I$ tetszőleges pont, és értelmezzük az

$$F : I \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \int_c^x f\ d\mu_{id_\mathbb{R}}$$

függvényt.

a) Az F függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $K \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumhoz van olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x, x' \in K$ esetén

$$|F(x') - F(x)| \leq C|x' - x|$$

teljesül. (Tehát minden $K \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumra, az $f|_K$ leszűkített függvény *Lipschitz-függvény*, így egyenletesen folytonos.)

b) Ha x olyan belső pontja I-nek, amelyben f folytonos, akkor F az x-ben differenciálható és $(DF)(x) = f(x)$ teljesül.

Bizonyítás. a) Legyen $K \subseteq I$ nem üres korlátos és zárt intervallum. A hipotézis alapján f korlátos a K halmazon, ezért vehetünk olyan $C \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy

minden $x \in K$ esetén $|f(x)| \leq C$. Legyenek $x, x' \in K$ tetszőlegesek. Ekkor a Riemann-féle határozott integrál tulajdonságai szerint

$$F(x') - F(x) := \int_c^{x'} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int_c^{x} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int_x^{x'} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

teljesül, ezért

$$|F(x') - F(x)| \leq \left| \int_x^{x'} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} \right| \leq$$

$$\leq \left(\sup_{z \in [\min(x,x'), \max(x,x')[} |f(z)| \right) \mu_{id_{\mathbb{R}}}([\min(x,x'), \max(x,x')[) \leq C|x' - x|$$

adódik, hiszen $[\min(x,x'), \max(x,x')[\subseteq K$, ezért

$$\sup_{z \in [\min(x,x'), \max(x,x')[} |f(z)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \leq C.$$

b) Legyen x belső pontja I-nek. Ha $x' \in I$, $x' \neq x$ tetszőleges, akkor ismét az

$$\int_c^{x'} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int_c^{x} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int_x^{x'} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

egyenlőséget alkalmazva

$$\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} = \frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

adódik. Ugyanakkor, $\widehat{f(x)}$-szel jelölve az $f(x)$ értékű konstansfüggvényt (itt x rögzítve van!), nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} \widehat{f(x)} \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = f(x).$$

Tehát azt kepjuk, hogy minden $x' \in I$, $x' \neq x$ esetén

$$\left| \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} f \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} \widehat{f(x)} \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} \right| =$$

$$= \frac{1}{|x' - x|} \left| \int_x^{x'} (f - \widehat{f(x)}) \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} \right| \leq \sup_{y \in [\min(x,x'), \max(x,x')[} |f(y) - f(x)|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az f függvény x pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $]x-\delta, x+\delta[\subseteq I$ és minden $y \in]x-\delta, x+\delta[$ esetén $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$. Ha δ ilyen, akkor minden $x' \in]x-\delta, x+\delta[\setminus\{x\}$ pontra $[\min(x,x'), \max(x,x')[\subseteq]x-\delta, x+\delta[$ teljesül, tehát fennáll az

$$\left|\frac{F(x')-F(x)}{x'-x} - f(x)\right| \leq \sup_{y\in[\min(x,x'),\max(x,x')[} |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy F az x-ben differenciálható és $(DF)(x) = f(x)$ teljesül. ■

Definíció. Egy $F : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt *abszolút folytonosnak* nevezünk, ha $Dom(F)$ intervallum és létezik olyan $f : Dom(F) \to \mathbb{K}$ $\mu_{id_{\mathbb{R}}}$-szerint lokálisan Riemann-integrálható függvény és $c \in Dom(F)$, hogy minden $x \in Dom(F)$ esetén

$$F(x) = \int_c^x f \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

teljesül.

Tétel. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{K}$ olyan differenciálható függvény, hogy DF folytonos függvény, akkor minden $a, b \in I$ esetén

$$\int_a^b (DF) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = F(b) - F(a)$$

teljesül (*Newton-Leibniz-formula*).

Bizonyítás. Láttuk, hogy a

$$G : I \to \mathbb{F}; \qquad x \mapsto \int_a^x (DF) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

függvény differenciálható, és $DG = DF$, ezért létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $G = F + \lambda$. Világos, hogy $G(a) = 0$, ezért $\lambda = -F(a)$. Ebből következik, hogy

$$\int_a^b (DF) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} =: G(b) = F(b) - F(a)$$

teljesül. ■

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f, g : I \to \mathbb{K}$ olyan n-szer differenciálható függvények, hogy $D^n f$ és $D^n g$ folytonos függvények. Ekkor minden $a, b \in I$ esetén

$$\int_a^b (D^n f) g \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left((D^{n-k-1} f)(b)(D^k g)(b) - (D^{n-k-1} f)(a)(D^k g)(a)\right)$$

$$+(-1)^n \int_a^b f(D^n g)\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

teljesül. (*n-ed rendű parciális integrálás formulája.*)

(Megjegyezzük, hogy a feltételek szerint a $(D^n f)g$ és $f(D^n g)$ függvények folytonosak, tehát $\mu_{id_{\mathbb{R}}}$-szerint lokálisan Riemann-integrálhatóak, így a formula *értelmes.*)

Bizonyítás. A hipotézis alapján az

$$F := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k-1} f)(D^k g) : I \to \mathbb{K}$$

függvény differenciálható, és a függvények differenciálási szabályainak ismeretében nyilvánvaló, hogy:

$$D\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k-1} f)(D^k g)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k} f)(D^k g) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k-1} f)(D^{k+1} g) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k} f)(D^k g) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (D^{n-j} f)(D^j g) =$$

$$= (D^n f)g - (-1)^n f(D^n g)$$

teljesül. Ezért a Newton-Leibniz-formula alapján fennáll az

$$F(b) - F(a) = \int_a^b (DF)\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int_a^b (D^n f)g\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - (-1)^n \int_a^b f(D^n g)\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

egyenlőség, amiből átrendezéssel, behelyettesítéssel és összevonással kapjuk a bizonyítandó összefüggést. ■

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és $f : I \to \mathbb{K}$ olyan $n+1$-szer differenciálható függvény, hogy $D^{n+1} f$ folytonos függvény. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in I$ és $x \in I$ esetén

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} (x - \mathfrak{a})^k + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (D^{n+1} f)(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}}(t)$$

teljesül. (*Integrálmaradéktagos Taylor-formula.*)

Bizonyítás. Ha $n = 0$, akkor azt kell igazolni, hogy

$$f(x) = f(\mathfrak{a}) + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (Df)(t)\ d\mu_{id_{\mathbb{R}}}(t),$$

ami a Newton-Leibniz-formula alapján nyilvánvaló. Ezért feltehető, hogy $n > 0$, így a Df függvény n-szer differenciálható. Ugyanakkor a

$$g : I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{(t-x)^n}{n!}$$

függvény is n-szer differenciálható, és $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ esetén minden $I \ni t$-re

$$(D^k g)(t) = \frac{(t-x)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Ezért az n-ed rendű parciális integrálás formuláját alkalmazva a Df és g függvényekre kapjuk, hogy:

$$\int_{\mathfrak{a}}^{x} (D^{n+1}f)(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}}(t) = (-1)^n \int_{\mathfrak{a}}^{x} (D^n(Df))g\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left((D^{n-k-1}(Df))(x)(D^k g)(x) - (D^{n-k-1}(Df))(\mathfrak{a})(D^k g)(\mathfrak{a})\right) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{x} (Df)(D^n g)\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = -(-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k}f)(\mathfrak{a})\frac{(\mathfrak{a}-x)^{n-k}}{(n-k)!} + \int_{\mathfrak{a}}^{x} (Df)\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} (D^j f)(\mathfrak{a})\frac{(x-\mathfrak{a})^j}{j!} + f(x) - f(\mathfrak{a}) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k$$

teljesül, amiből átrendezéssel kapjuk a bizonyítandó formulát. ■

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{K}$ folytonos függvény, valamint $I' \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\sigma : I' \to I$ olyan differenciálható függvény, hogy $D\sigma$ folytonos. Ekkor minden $a', b' \in I'$ esetén

$$\int_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(D\sigma)\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

teljesül. (*A helyettesítéses integrálás formulája.*)

Bizonyítás. Legyenek $a', b' \in I'$ rögzítve, és értelmezzük az

$$F : I \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto \int_{\sigma(a')}^{x} f\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

leképezést. Tudjuk, hogy F szigorú primitív függvénye f-nek, tehát az I-n differenciálható, valamint $DF = f$ és $F(\sigma(a')) = 0$. A közvetett függvény differenciálási szabálya szerint $(f \circ \sigma)(D\sigma) = ((DF) \circ \sigma)(D\sigma) = D(F \circ \sigma)$ teljesül I-n. Ezért $F \circ \sigma$ szigorú primitív függvénye az $(f \circ \sigma)(D\sigma) : I' \to \mathbb{R}$ függvénynek, így a Newton-Leibniz-formula szerint

$$\int_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = F(\sigma(b')) - F(\sigma(a')) = \int_{a'}^{b'} (D(F \circ \sigma))\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(D\sigma)\, d\mu_{id_{\mathbb{R}}}$$

teljesül. ■

3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{K}$ függvény *szabályos*, ha minden $J \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumhoz és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $h \in E(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ lépcsősfüggvény, hogy minden $x \in J$ esetén $|f(x) - h(x)| \leq \varepsilon$ teljesül.

Nyilvánvaló, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor az $f : I \to \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor szabályos, ha minden $J \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumhoz létezik olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $E(\mathbb{R}; \mathbb{K})$-ban, amely egyenletesen konvergál J-n az f-hez.

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum.

a) Minden $I \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvény szabályos.

b) Minden $I \to \mathbb{K}$ szabályos függvény minden I által tartalmazott korlátos és zárt intervallumon korlátos.

c) Ha $f, g : I \to \mathbb{K}$ szabályos függvények, akkor $f + g$ és fg is szabályos függvények és minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra λf is szabályos függvény.

Bizonyítás. ■

Tétel. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nemelfajult intervallum, akkor az $f : I \to \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor szabályos, ha f-nek az I minden belső pontjában létezik jobboldali és baloldali határértéke, továbbá, ha a az I legkisebb eleme, akkor f-nek létezik a-ban jobboldali határértéke, és ha b az I legnagyobb eleme, akkor f-nek létezik b-ben baloldali határértéke.

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{K}$ szabályos függvény.

(II) Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{K}$ függvényre teljesülnek az állításban megfogalmazott feltételek. ■

Következmény. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ *nyílt* intervallum, akkor az $f : I \to \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor szabályos, ha reguláris.

Bizonyítás. A definíciók, és az előző tétel alapján nyilvánvaló. ■

Következmény. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{K}$ *folytonos* függvény, valamint minden $I \to \mathbb{R}$ *monoton* függvény szabályos.

Bizonyítás. ■

A következő tétel megmutatja a függvények szabályosságának jelentőségét a lokális Riemann-integrálhatóság szempontjából.

Tétel. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{K}$ szabályos függvény lokálisan Riemann-integrálható minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint.

Bizonyítás. Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{K}$ szabályos függvény. Vegyünk egy $K \subseteq I$ korlátos és zárt intervallumot, valamint tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot.

A szabályos függvények jellemzési tétele alapján, az $\dfrac{\varepsilon}{|K|+1}$ számhoz létezik olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ lépcsősfüggvény, hogy minden $x \in K$ esetén

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}.$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll az

$$|(f|_K)^\circ - \chi_K \varphi| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\chi_K$$

függvény-egyenlőtlenség, amiből azonnal következik, hogy

$$\int^* |(f|_K)^\circ - \chi_K \varphi| \; d\mu \leq \int^* \left(\frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\chi_K\right) \; d\mu =$$

$$= \int \left(\frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\chi_K\right) \; d\mu = \frac{\varepsilon}{\mu(K)+1}\mu(K) < \varepsilon.$$

De $\chi_K \varphi$ is lépcsősfüggvény, ami azt jelenti, hogy $(f|_K)^\circ$ μ-szerint Riemann-integrálható függvény, tehát f μ-szerint lokálisan Riemann-integrálható. ■

Következmény. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{K}$ folytonos, és minden $I \to \mathbb{R}$ monoton függvény lokálisan Riemann-integrálható minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint.

Bizonyítás. Mind az $I \to \mathbb{K}$ folytonos, mind az $I \to \mathbb{R}$ monoton függvények szabályosak, így elég az előző állításra hivatkozni. ■

Következmény. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ olyan folytonos függvény, hogy $[f \neq 0]$ korlátos halmaz, akkor f Riemann-integrálható minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint.

Bizonyítás. Van olyan $K \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum, hogy $[f \neq 0] \subseteq K$. Az előző állítás szerint f lokálisan Riemann-integrálható minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint, így az $(f|_K)^\circ$ függvény Riemann-integrálható minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint. Ugyanakkor $f = (f|_K)^\circ$ nyilvánvaló, ezért f Riemann-integrálható minden $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint. ■

Következmény. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{K}$ olyan korlátos függvény, amelynek csak véges sok pontban van szakadása, akkor f lokálisan Riemann-integrálható minden olyan $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(\{x\}) = 0$.

Bizonyítás. ■

Az előző állításból következik, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & \text{, ha } x \neq 0 \\ \alpha & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény lokálisan Riemann-integrálható minden olyan $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény szerint, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu(\{x\}) = 0$, hiszen

ez a függvény korlátos és csak a 0 pontban nem folytonos. Ugyanakkor ez a függvény nyilvánvalóan nem szabályos, mert a 0-ban másodfajú szakadása van.

Állítás. (*A Riemann-integrálhatóság elemi Riemann-kritériuma*) Legyen $\mu : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ additív függvény. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható μ-szerint, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz léteznek olyan φ és ψ valós lépcsősfüggvények, hogy $\varphi \leq f \leq \psi$ és

$$\int \psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. (I) *Elégségesség.* Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan φ és ψ valós lépcsősfüggvényeket, hogy $\varphi \leq f \leq \psi$ és

$$\int \psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu < \varepsilon$$

teljesül. Ekkor $0 \leq f - \varphi \leq \psi - \varphi$, ezért a Riemann-féle felső μ-integrál monotonitása miatt

$$\int^* |f - \varphi| \, d\mu = \int^* (f - \varphi) \, d\mu \leq \int^* (\psi - \varphi) \, d\mu =$$

$$= \int (\psi - \varphi) \, d\mu = \int \psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu < \varepsilon,$$

ahol felhasználtuk a lépcsősfüggvények elemi μ-integráljának linearitását. Ebből következik, hogy f Riemann-integrálható μ-szerint.

(II) *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy f μ-szerint Riemann-integrálható és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Válasszunk egy g valós lépcsősfüggvényt, amelyre

$$\int^* |f - g| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Ekkor, a Riemann-féle felső μ-integrál definíciója alapján, létezik olyan h pozitív lépcsősfüggvény, amelyre $|f - g| \leq h$ és $\int h < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ebből látható, hogy $\varphi := g - h$ és $\psi := g + h$ olyan valós lépcsősfüggvények, amelyekre $\varphi \leq f \leq \psi$ és

$$\int \psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu = \int (\psi - \varphi) \, d\mu = \int (2h) \, d\mu = 2 \int h \, d\mu < \varepsilon$$

teljesül. ■

A következő tétel bizonyítása előtt megjegyezzük, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor minden $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres korlátos halmazra

$$\sup_{x, x' \in H} |f(x) - f(x')| = \sup_{x \in H} f(x) - \inf_{x \in H} f(x)$$

teljesül.

Tétel. (*A Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma*) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x, x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) (x_{k+1} - x_k) < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. (I) *Elégségesség*. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A hipotézis szerint vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}^+$ számot és olyan $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ szigorúan monoton növő rendszert $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x, x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) (x_{k+1} - x_k) < \varepsilon$$

teljesül. Legyenek

$$\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \chi_{\{x_k\}},$$

$$\psi := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in]x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \chi_{\{x_k\}}.$$

Ekkor $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvények, hogy $\varphi \leq f \leq \psi$, továbbá

$$\int \varphi \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) (x_{k+1} - x_k),$$

$$\int \psi \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) (x_{k+1} - x_k),$$

következésképpen

$$\int \psi \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int \varphi \, d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) - \inf_{x \in]x_k, x_{k+1}[} f(x) \right) (x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x, x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) (x_{k+1} - x_k) < \varepsilon$$

teljesül. A Riemann-integrálhatóság elemi Riemann-kritériuma alapján ebből következik, hogy f Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint.

(II) *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A Riemann-integrálhatóság elemi Riemann-kritériuma alapján vehetünk olyan $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvényeket, hogy $\varphi \leq f \leq \psi$ és

$$\int \psi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int \varphi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} < \varepsilon$$

teljesül. Az $[f \neq 0] \subseteq [a,b]$ hipotézis miatt $\chi_{[a,b]} f = f$, ezért $\chi_{[a,b]}\varphi$ és $\chi_{[a,b]}\psi$ olyan valós lépcsősfüggvények, hogy $\chi_{[a,b]}\varphi \leq f \leq \chi_{[a,b]}\psi$ és

$$\int \left(\chi_{[a,b]}\psi\right) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int \left(\chi_{[a,b]}\varphi\right) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int \left(\chi_{[a,b]}(\psi - \varphi)\right) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} \leq$$

$$\leq \int (\psi - \varphi) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int \psi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int \varphi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} < \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvényektől megkövetelhetjük azt is, hogy a $\varphi \leq f \leq \psi$ és $\int \psi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int \varphi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} < \varepsilon$ egyenlőtlenségek mellett még a $[\varphi \neq 0] \subseteq [a,b]$ és $[\psi \neq 0] \subseteq [a,b]$ összefüggések is teljesüljenek.

Létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \leq k \leq n-1$ természetes számra φ és ψ állandó az $]x_k, x_{k+1}[$ nyílt intervallumon. Legyenek $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ és $(b_k)_{0 \leq k \leq n-1}$, valamint $(a'_k)_{0 \leq k \leq n}$ és $(b'_k)_{0 \leq k \leq n}$ olyan rendszerek $\mathbb{R}$-ben, hogy

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} a'_k \chi_{\{x_k\}},$$

$$\psi = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \chi_{]x_k, x_{k+1}[} + \sum_{k=0}^{n} b'_k \chi_{\{x_k\}}.$$

Legyen $0 \leq k \leq n-1$ rögzítve. Ha $x \in]x_k, x_{k+1}[$, akkor $a_k = \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) = b_k$, ezért minden $x, x' \in]x_k, x_{k+1}[$ esetén $|f(x) - f(x')| \leq b_k - a_k$. Ebből látható, hogy

$$g := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x, x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) \chi_{]x_k, x_{k+1}[}$$

olyan pozitív lépcsősfüggvény, hogy $g \leq \varphi - \psi$ teljesül az $\mathbb{R} \setminus \{x_k | 0 \leq k \leq n\}$ halmazon, ezért

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x, x' \in]x_k, x_{k+1}[} |f(x) - f(x')| \right) (x_{k+1} - x_k) = \int g \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} \leq$$

$$\leq \int (\varphi - \psi) \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} = \int \varphi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} - \int \psi \; d\mu_{id_{\mathbb{R}}} < \varepsilon$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy az előző tételben szereplő

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sup_{x,x'\in]x_k,x_{k+1}[}|f(x)-f(x')|\right)(x_{k+1}-x_k)$$

alakú kifejezéseket az f függvény $(x_k)_{0\le k\le n}$ rendszerhez tartozó *oszcillációs összegeinek* nevezzük.

Definíció. Egy $N\subseteq\mathbb{R}$ halmazt *Lebesgue-nullhalmaznak* nevezünk, ha minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $\mathbb{R}$ korlátos nyílt intervallumainak olyan $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy

$$N\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_k,\qquad\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{id_{\mathbb{R}}}(I_k)<\varepsilon$$

teljesül.

Az $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza (például $\mathbb{Q}$ is) Lebesgue-nullhalmaz. Az $\mathbb{R}$ minden nem üres nyílt intervalluma *nem* Lebesgue-nullhalmaz. Lebesgue-nullhalmaz minden részhalmaza Lebesgue-nullhalmaz, és megszámlálható sok Lebesgue-nullhalmaz uniója Lebesgue-nullhalmaz.

Tétel. (*A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma*) Egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha f korlátos, és az $[f\neq 0]$ halmaz korlátos, és az f szakadási pontjainak halmaza Lebesgue-nullhalmaz. Ha $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallum, akkor egy $f:I\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor lokálisan Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha minden $K\subseteq I$ korlátos és zárt halmazra az $f\langle K\rangle$ halmaz korlátos $\mathbb{R}$-ben és az f szakadási pontjainak halmaza Lebesgue-nullhalmaz.

Bizonyítás. ■

Tétel. (*A Riemann-integrálhatóság Cauchy-kritériuma*) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ korlátos függvény, és legyenek $a,b\in\mathbb{R}$ olyanok, hogy $a<b$ és $[f\neq 0]\subseteq[a,b]$. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha létezik olyan $I\in\mathbb{K}$, hogy minden $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta\in\mathbb{R}^+$, amelyre teljesül a következő: ha $n\in\mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{0\le k\le n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $x_0=a$, $x_n=b$ és $\max\limits_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)<\delta$, akkor bármely $(\zeta_k)_{0\le k\le n-1}\in\prod\limits_{0\le k\le n-1}[x_k,x_{k+1}]$ rendszerre

$$\left|I-\sum_{k=0}^{n-1}f(\zeta_k)(x_{k+1}-x_k)\right|<\varepsilon$$

teljesül. Ez az $I\in\mathbb{K}$ elem egyértelműen van meghatározva, és ha f Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, akkor

$$I=\int f\,d\mu_{id_{\mathbb{R}}}.$$

Bizonyítás. ■

Definíció. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\Pi_n(a, b)$ jelöli azon $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ renszereket $\mathbb{R}$-ben, amelyek szigorúan monoton növők és $x_0 = a$, $x_n = b$ teljesül. Az $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^+} \Pi_n(a, b)$ halmaz elemeit az $[a, b]$ intervallum *felosztásainak* nevezzük

Definíció. (*Darboux-féle alsó és felső integrál*)

Tétel. (*A Riemann-integrálhatóság Darboux-kritériuma*) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $[f \neq 0] \subseteq [a, b]$. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az euklidészi mérték szerint, ha az $[a.b]$ intervallumra vett alsó és felső Darboux-integráljai egyenlőek; továbbá, ha f Riemann-integrálható, akkor az f Riemann-integrálja egyenlő az f felső Darboux-integráljával.

Bizonyítás. ■

4. Primitív függvények és határozott integrál

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény *jobbról* (illetve *balról*) *differenciálható* az $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, és a

$$\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}} : Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}$$

differenciahányados-függvénynek létezik jobboldali (illetve baloldali) határértéke $\mathfrak{a}$-ban; továbbá, ha létezik ez a határérték, akkor a

$$(D_+f)(\mathfrak{a}) := \lim_{\mathfrak{a}+0} \left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}} \right), \quad (\text{illetve } (D_-f)(\mathfrak{a}) := \lim_{\mathfrak{a}-0} \left(\frac{f - f(\mathfrak{a})}{id_{\mathbb{R}} - \mathfrak{a}} \right))$$

jelölést alkalmazzuk, és ezt a számot az f függvény *jobboldali* (illetve *baloldali*) deriváltjának nevezzük $\mathfrak{a}$-ban.

Nyilvánvaló, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek, akkor az f differenciálhatósága $\mathfrak{a}$-ban ekvivalens azzal, hogy f az $\mathfrak{a}$-ban jobbról is és balról is differenciálható, és $(D_+f)(\mathfrak{a}) = (D_-f)(\mathfrak{a})$ teljesül; továbbá, ha f differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor $(D_+f)(\mathfrak{a}) = (Df)(\mathfrak{a}) = (D_-f)(\mathfrak{a})$.

Állítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $A \subseteq [a, b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a, b] \setminus A$ esetén f jobbról differenciálható x-ben és $(D_+f)(x) \geq 0$. Ekkor $f(b) \geq f(a)$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, továbbá legyen $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} r_k$ sor konvergens. Minden $x \in [a, b]$ esetén legyen $N(x) := \{n \in \mathbb{N} | a_n < x\}$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és értelmezzük a következő halmazt:

$$E(\varepsilon) := \{\ x \in [a, b] \mid f(x) - f(a) \geq -\varepsilon \cdot (x - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $a \in E(\varepsilon)$ és persze $E(\varepsilon)$ felülről korlátos, ezért értelmezhető a $c := \sup(E(\varepsilon))$ szám, amelyre $c \in [a, b]$ teljesül.

Először megmutatjuk, hogy $c \in E(\varepsilon)$ (vagyis c az $E(\varepsilon)$ halmaz legnagyobb eleme). Ehhez vegyünk olyan $E(\varepsilon)$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely konvergál c-hez; ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x_n) - f(a) \geq -\varepsilon \cdot (x_n - a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(x_n)}^{\infty} r_k$$

teljesül. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $x_n \leq c$, ezért $x_n - a \leq c - a$ és $N(x_n) \subseteq N(c)$, tehát

$$\sum_{k=0,\ k\in N(x_n)}^{\infty} r_k \leq \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k,$$

következésképpen

$$f(x_n) - f(a) \geq -\varepsilon \cdot (c-a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k$$

teljesül. Az f függvény folytonos c-ben, így az átviteli elv alapján

$$f(c) - f(a) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(a)) \ \geq \ -\varepsilon \cdot (c-a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $c \in E(\varepsilon)$.

Most megmutatjuk, hogy $c = b$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $c < b$; ekkor két alternatíva van: $c \notin A$ vagy $c \in A$. Mindkét esetben ellentmondásra jutunk.

(I) Tegyük fel, hogy $c \notin A$, vagyis $c \in [a,b] \setminus A$, így f jobbról differenciálható c-ben és $(D_+f)(c) \geq 0 > -\varepsilon$. Ekkor vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $c + \delta < b$ és minden $x \in]c, c+\delta[$ pontra

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > -\varepsilon,$$

vagyis $f(x) - f(c) > -\varepsilon \cdot (x - c)$. Legyen most $x \in]c, c+\delta[$ rögzítve. Ekkor kihasználva azt, hogy $c \in E(\varepsilon)$, kapjuk, hogy

$$f(x)-f(a) = (f(x)-f(c))+(f(c)-f(a)) > -\varepsilon\cdot(x-c)-\varepsilon\cdot(c-a)-\varepsilon\cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k =$$

$$= -\varepsilon \cdot (x-a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k \geq -\varepsilon \cdot (a-c) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k,$$

hiszen $c < x$ miatt $N(c) \subseteq N(x)$, így

$$\sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k \leq \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]c, c+\delta[$ esetén $x \in E(\varepsilon)$, ami lehetetlen, mert c felső korlátja $E(\varepsilon)$-nak.

(II) Tegyük fel, hogy $c \in A$, vagyis vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $c = a_n$. Az f függvény folytonos c-ben, ezért az $\varepsilon \cdot r_n \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $c + \delta < b$ és minden $x \in]c, c+\delta[$ pontra

$$f(x) - f(c) > -\varepsilon \cdot r_n$$

teljesül. Legyen most $x \in]c, c+\delta[$ rögzítve. Ekkor kihasználva azt, hogy $c \in E(\varepsilon)$, kapjuk, hogy

$$f(x)-f(a) = (f(x)-f(c))+(f(c)-f(a)) > -\varepsilon\cdot r_n-\varepsilon\cdot(c-a)-\varepsilon\cdot \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k >$$

$$> -\varepsilon \cdot (x-a) - \varepsilon \cdot \left(r_n + \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k \right).$$

Azonban könnyen látható, hogy $a_n = c < x$ miatt

$$r_n + \sum_{k=0,\ k\in N(c)}^{\infty} r_k \leq \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k,$$

következésképpen

$$f(x) - f(a) > -\varepsilon \cdot (x-a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(x)}^{\infty} r_k.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in]c, c+\delta[$ esetén $x \in E(\varepsilon)$, ami lehetetlen, mert c felső korlátja $E(\varepsilon)$-nak.

Ezzel igazoltuk, hogy $b = c \in E(\varepsilon)$, tehát

$$f(b) - f(a) \geq -\varepsilon \cdot (b-a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0,\ k\in N(b)}^{\infty} r_k \geq -\varepsilon \cdot (b-a) - \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{\infty} r_k.$$

Ez minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén igaz, tehát ε-nal nullához tartva ebből kapjuk, hogy $f(b) - f(a) \geq 0$. ■

Következmény. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ (nem feltétlenül nyílt) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy f minden $x \in I \setminus A$ esetén jobbról differenciálható és $(D_+f)(x) \geq 0$ (illetve $(D_+f)(x) \leq 0$). Ekkor f monoton növő (illetve monoton fogyó).

Bizonyítás. Minden $a, b \in I$, $a < b$ pontra, az $f|_{[a,b]}$ leszűkített függvényre alkalmazva az előző állítást kapjuk, hogy $f(a) \leq f(b)$ (illetve $f(b) \leq f(a)$). ■

Tétel. (*Első középértéktétel.*) Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekhez léteznek olyan $m, M \in \mathbb{R}$ számok és létezik olyan $A \subseteq [a, b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a, b] \setminus A$ esetén f és g jobbról differenciálható x-ben és

$$m \cdot (D_+g)(x) \leq (D_+f)(x) \leq M \cdot (D_+g)(x)$$

teljesül. Ekkor fennállnak az

$$m \cdot (g(b) - g(a)) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (g(b) - g(a))$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. ■

Tétel. (*Véges növekmények formulája.*) Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekhez létezik olyan $A \subseteq$

$[a,b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a,b] \setminus A$ esetén f és g jobbról differenciálható x-ben és

$$|(D_+f)(x)| \leq (D_+g)(x)$$

teljesül. Ekkor fennáll az

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. ■

Következmény. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $A \subseteq [a,b]$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in [a,b] \setminus A$ esetén f jobbról differenciálható x-ben. Ekkor

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b] \setminus A} |(D_+f)(x)|$$

teljesül.

Bizonyítás. ■

Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ függvény.

a) Azt mondjuk, hogy a $g : I \to \mathbb{R}$ függvény az f-nek *primitív függvénye*, ha g folytonos és létezik olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in I \setminus A$ esetén g differenciálható x-ben és $(Dg)(x) = f(x)$ teljesül.

b) Azt mondjuk, hogy a $g : I \to \mathbb{R}$ függvény az f-nek *szigorú primitív függvénye*, ha g differenciálható és minden $x \in I$ esetén $(Dg)(x) = f(x)$ teljesül (természetesen ekkor I szükségképpen *nyílt* intervallum).

Egyáltalán nem minden, nyílt intervallumon értelmezett valós függvénynek létezik szigorú primitív függvénye. Ezt mutatja a következő állítás.

Állítás. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor minden $I \subseteq Dom(f)$ intervallumra az $(Df)\langle I \rangle$ halmaz intervallum $\mathbb{R}$-ben, vagyis Df Darboux-tulajdonságú függvény.

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a,b] \subseteq Dom(f)$ és $(Df)(a) \neq (Df)(b)$, akkor minden $y \in]\min((Df)(a), (Df)(b)), \max((Df)(a), (Df)(b))[$ számhoz létezik olyan $x \in [a,b]$, amelyre $(Df)(x) = y$.

Ehhez legyen $c := (a+b)/2$, és legyenek $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ azok a függvények, amelyekre minden $t \in [a,c[$ esetén $\alpha(t) := a$ és $\beta(t) := 2t - a$, továbbá minden $t \in [c,b]$ esetén $\alpha(t) := 2t - b$ és $\beta(t) := b$. Világos, hogy minden $t \in]a,b[$ esetén $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$. Legyen

$$g :]a,b[\to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}.$$

A g függvény folytonos és

$$\lim_a g = (Df)(a), \quad \lim_b g = (Df)(b),$$

hiszen a definíció szerint

$$g = \left(\frac{f - f(a)}{id_{\mathbb{R}} - a} \right) \circ \beta$$

az $]a, c[$ intervallumon, valamint

$$g = \left(\frac{f - f(b)}{id_{\mathbb{R}} - b} \right) \circ \alpha$$

a $]c, b[$ intervallumon, így elegendő a függvénykompozíció határértékére vonatkozó tételt alkalmazni. Ezért az a $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos, amely $]a, b[$ egyenlő g-vel, és $\tilde{g}(a) := (Df)(a)$, $\tilde{g}(b) := (Df)(b)$. Ebből a Bolzano-tétel alapján következik olyan $t \in]a, b[$ pont létezése, amelyre $g(t) = \tilde{g}(t) = y$. A Lagrange-féle középértéktétel alapján létezik olyan $x \in]\alpha(t), \beta(t)[$, amelyre $f(\beta(t)) - f(\alpha(t)) = (Df)(x) \cdot (\beta(t) - \alpha(t))$. A g definícója szerint ez azt jelenti, hogy $g(t) \cdot (\beta(t) - \alpha(t)) = (Df)(x) \cdot (\beta(t) - \alpha(t))$, tehát $(Df)(x) = g(t) = y$. ■

Tehát ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor a $\chi_{]a,b[}$, $\chi_{[a,b[}$, $\chi_{]a,b]}$, $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvények egyikének sem létezik szigorú primitív függvénye, mert ezek nem Darboux-tulajonságú függvények. Azonban mind a négy függvénynek létezik primitív függvénye.

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, és $g : I \to \mathbb{R}$ az f-nek primitív függvénye.

a) Ha a $h : I \to \mathbb{R}$ függvény az f-től csak megszámlálható sok pontban különbözik, akkor g a h-nak is primitív függvénye.

b) Ha a $g' : I \to \mathbb{R}$ függvény szintén primitív függvénye f-nek, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $g' = g + c$.

Bizonyítás. ■

Példák 1) A Dirichlet-függvénynek az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvény primitív függvénye, mert $\chi_{\mathbb{Q}}$ csak megszámlálható sok pontban különbözik a 0 értékű $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstansfüggvénytől.

2) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tekintsük a $\chi_{]a,b[} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvényt. Könnyen látható, hogy ennek primitív függvénye a

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < a \\ x - a & \text{, ha } a \leq x \leq b \\ b - a & \text{, ha } x > b \end{cases}$$

függvény, és g az a és b pontokban nem differenciálható. Továbbá, a definíció alapján nyilvánvaló, hogy ugyanez a g függvény a $\chi_{[a,b[}$, $\chi_{]a,b]}$, $\chi_{[a,b]}$ karakterisztikus függvényeknek is primitív függvénye.

3) Csak Darboux-tulajdonságú függvénynek létezhet szigorú primitív függvénye, de nem minden Darboux-tulajdonságú függvénynek létezik primitív függvénye. Például, az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{, ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény Darboux-tulajdonságú, de nem létezik szigorú primitív függvénye. Ugyanakkor a

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{, ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek létezik szigorú primitív függvénye.

Állítás. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvénynek létezik primitív függvénye.

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy ha $J \subseteq I$ nem üres intervallum, akkor a $\chi_J : I \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvénynek létezik primitív függvénye.

Ha J üres, akkor bármely $I \to \mathbb{R}$ konstansfüggvény primitív függvénye χ_J-nek.

Ha J nem üres és korlátos, és $a := \inf(J)$, valamint $b := \sup(J)$ akkor a

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < a \\ x - a & \text{, ha } a \leq x \leq b \\ b - a & \text{, ha } x > b \end{cases}$$

függvény primitív függvénye χ_J-nek.

Ha J nem korlátos és $J = I$, akkor az $id_I : I \to \mathbb{R}$ leképezés primitív függvénye χ_J-nek.

Ha J nem korlátos és $J \neq I$, akkor van olyan $a \in I$, hogy $a = \inf(J)$ vagy $a = \sup(J)$. Az első esetben az

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x < a \\ x - a & \text{, ha } x \geq a \end{cases}$$

függvény, és a második esetben az

$$I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, ha } x > a \\ x - a & \text{, ha } x \leq a \end{cases}$$

függvény primitív függvénye χ_J-nek. ■

Tétel. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ szabályos függvénynek *létezik* primitív függvénye, és bármely két primitív függvénye csak egy additív konstansban különbözik.

Bizonyítás. ■

Állítás. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor minden $I \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek létezik szigorú primitív függvénye.

Bizonyítás. ■

Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $a, b \in I$ esetén

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b f := F(b) - F(a),$$

ahol F tetszőleges primitív függvénye f-nek; és ezt a számot az f függvény a és b határok közötti *határozott integráljának* nevezzük.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, akkor $c \in I$ esetén a

$$F : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \mathop{\mathrm{S}}_{c}^{x} f$$

függvény az f-nek az a primitív függvénye, amely c-ben a 0 értéket veszi föl; tehát F folytonos, $F(c) = 0$, és létezik olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in I \setminus A$ pontban F differenciálható és $(DF)(x) = f(x)$.

Állítás. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $a, b \in I$ esetén

$$\int_a^b f = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} f$$

teljesül.

Bizonyítás. ■

Kérdés: teljesül-e az előző állítás minden szabályos függvényre?

Tétel. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor minden $a, b \in I$ esetén

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} (DF) = F(b) - F(a)$$

teljesül (*Newton-Leibniz-formula*).

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy DF-nek az F függvény szigorú primitív függvénye, így a bizonyítandó egyenlőség a definícióból azonnal következik. ■

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f, g : I \to \mathbb{R}$ olyan n-szer differenciálható függvények, hogy $D^n f$ és $D^n g$ reguláris függvények. Ekkor minden $a, b \in I$ esetén

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} (D^n f)g = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left((D^{n-k-1} f)(b)(D^k g)(b) - (D^{n-k-1} f)(a)(D^k g)(a) \right)$$

$$+(-1)^n \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} f(D^n g)$$

teljesül. (*n-ed rendű parciális integrálás formulája.*)

(Megjegyezzük, hogy a feltételek szerint f és g folytonosak, tehát regulárisak, valamint $D^n f$ és $D^n g$ a hipotézis alapján szintén reguláris függvények, így a $(D^n f)g$

és $f(D^n g)$ függvények is regulárisak, tehát rendelkeznek primitív függvénnyel, így a formula *értelmes.*)

Bizonyítás. A hipotézis alapján az

$$F := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k-1} f)(D^k g) : I \to \mathbb{R}$$

függvény differenciálható, és a függvények differenciálási szabályainak ismeretében nyilvánvaló, hogy:

$$D\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k-1} f)(D^k g)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k} f)(D^k g) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k-1} f)(D^{k+1} g) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k} f)(D^k g) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (D^{n-j} f)(D^j g) =$$

$$= (D^n f)g - (-1)^n f(D^n g)$$

teljesül. Ezért a Newton-Leibniz-formula alapján fennáll az

$$F(b) - F(a) = \mathop{\mathrm{S}}_a^b (DF) = \mathop{\mathrm{S}}_a^b (D^n f)g - (-1)^n \mathop{\mathrm{S}}_a^b f(D^n g)$$

egyenlőség, amiből átrendezéssel, behelyettesítéssel és összevonással kapjuk a bizonyítandó összefüggést. ■

Vigyázzunk arra, hogy az előző állításban az n-edik deriváltfüggvényekre vonatkozó regularitási feltétel nem felesleges, mert az biztosítja, hogy a $(D^n f)g$ és $f(D^n g)$ függvények szintén regulárisak legyenek, így az

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b ((D^n f)g - (-1)^n f(D^n g))$$

határozott integrál *szétbontható*

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^b (D^n f)g - (-1)^n \mathop{\mathrm{S}}_a^b f(D^n g)$$

alakba. Ha f és g csak n-szer differenciálhatóak lennének, akkor előfordulhatna, hogy sem $(D^n f)g$-nek, sem $f(D^n g)$-nek nincs primitív függvénye, így az utóbbi formula értelmetlen lenne.

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és $f : I \to \mathbb{R}$ olyan $n+1$-szer differenciálható függvény, hogy $D^{n+1} f$ reguláris függvény. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in I$ és $x \in I$ esetén

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} (x - \mathfrak{a})^k + \mathop{\mathrm{S}}_{\mathfrak{a}}^x (D^{n+1} f)(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

teljesül. (*Integrálmaradéktagos Taylor-formula.*)

Bizonyítás. Ha $n = 0$, akkor azt kell igazolni, hogy

$$f(x) = f(\mathfrak{a}) + \mathop{\mathrm{S}}_{\mathfrak{a}}^{x} (Df)(t)dt,$$

ami a Newton-Leibniz-formula alapján nyilvánvaló. Ezért feltehető, hogy $n > 0$, így a Df függvény n-szer differenciálható. Ugyanakkor a

$$g : I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{(t-x)^n}{n!}$$

függvény is n-szer differenciálható, és $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ esetén minden $I \ni t$-re

$$(D^k g)(t) = \frac{(t-x)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Ezért az n-ed rendű parciális integrálás formuláját alkalmazva a Df és g függvényekre kapjuk, hogy:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\mathfrak{a}}^{x} (D^{n+1}f)(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt = (-1)^n \mathop{\mathrm{S}}_{\mathfrak{a}}^{x} (D^n(Df))g =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left((D^{n-k-1}(Df))(x)(D^k g)(x) - (D^{n-k-1}(Df))(\mathfrak{a})(D^k g)(\mathfrak{a})\right) +$$

$$+ \mathop{\mathrm{S}}_{\mathfrak{a}}^{x} (Df)(D^n g) = -(-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{n-k}f)(\mathfrak{a})\frac{(\mathfrak{a}-x)^{n-k}}{(n-k)!} + \mathop{\mathrm{S}}_{\mathfrak{a}}^{x} (Df) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} (D^j f)(\mathfrak{a})\frac{(x-\mathfrak{a})^j}{j!} + f(x) - f(\mathfrak{a}) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}(x-\mathfrak{a})^k$$

teljesül, amiből átrendezéssel kapjuk a bizonyítandó formulát. ■

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, valamint $I' \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\sigma : I' \to I$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a következő feltételek *valamelyike* teljesül:

a) Az f-nek létezik szigorú primitív függvénye.

b) Az f-nek létezik primitív függvénye és minden $x \in I$ esetén a $\overset{-1}{\sigma}\langle\{x\}\rangle$ halmaz megszámlálható.

Ekkor az $(f \circ \sigma)(D\sigma) : I' \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye, és minden $a', b' \in I'$ esetén

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f = \mathop{\mathrm{S}}_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(D\sigma)$$

teljesül. (*A helyettesítéses integrálás formulája.*)

Bizonyítás. Legyenek $a', b' \in I'$ rögzítve, és értelmezzük az

$$F : I \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \mathop{\mathrm{S}}_{\sigma(a')}^{x} f$$

leképezést, ami értelmes, mert akár a), akár b) teljesül: az f-nek létezik primitív függvénye.

(I) Ha a) teljesül, akkor F szigorú primitív függvénye f-nek, tehát az I-n differenciálható, valamint $DF = f$ és $F(\sigma(a')) = 0$. A közvetett függvény differenciálási szabálya szerint $(f \circ \sigma)(D\sigma) = ((DF) \circ \sigma)(D\sigma) = D(F \circ \sigma)$ teljesül I-n. Ezért $F \circ \sigma$ szigorú primitív függvénye az $(f \circ \sigma)(D\sigma) : I' \to \mathbb{R}$ függvénynek, így a Newton-Leibniz-formula szerint

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f = F(\sigma(b')) - F(\sigma(a')) = \mathop{\mathrm{S}}_{a'}^{b'} (D(F \circ \sigma)) = \mathop{\mathrm{S}}_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(D\sigma)$$

teljesül.

(II) Ha b) teljesül, akkor $F : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és van olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy minden $x \in I \setminus A$ pontra F differenciálható x-ben és $(DF)(x) = f(x)$. Ekkor a $\overset{-1}{\sigma}\langle I \setminus A\rangle = I' \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle A\rangle$ halmaz minden x' pontjában differenciálható az $F \circ \sigma : I' \to \mathbb{R}$ függvény és $D(F \circ \sigma)(x') = (DF)(\sigma(x'))(D\sigma)(x') = (f \circ \sigma)(x')$. A σ-ra vonatkozó feltevés alapján a $\overset{-1}{\sigma}\langle A\rangle$ halmaz megszámlálható, mert

$$\overset{-1}{\sigma}\langle A\rangle = \bigcup_{x \in A} \overset{-1}{\sigma}\langle \{x\}\rangle,$$

és megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. Ugyanakkor, az $F \circ \sigma$ függvény folytonos is, tehát ez primitív függvénye $(f \circ \sigma)(D\sigma)$-nak. Ezért a határozott integrál értelmezését alkalmazva

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a'}^{b'} (f \circ \sigma)(D\sigma) = F(\sigma(b')) - F(\sigma(a')) = F(\sigma(b')) = \mathop{\mathrm{S}}_{\sigma(a')}^{\sigma(b')} f$$

adódik. ■

Tétel. (*A Riemann-féle közelítő összegek tétele.*) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szabályos függvény, és $a, b \in I$ olyanok, hogy $a < b$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, amelyre teljesül a következő: minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{0 \le k \le n}$ szigorúan monoton növő, $[a, b]$-ben haladó rendszerre, amelyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és $\max\limits_{0 \le k \le n-1} (x_{k+1} - x_k) < \delta$, és minden olyan $(\zeta_k)_{0 \le k \le n-1}$ rendszerre, amelyre $0 \le k \le n-1$ esetén $\zeta_k \in [x_k, x_{k+1}]$, fennáll az

$$\left| \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} f \; - \; \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. ■

Az előző tétel indokolja az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

jelölést a határozott integrálokra.

Állítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $a, b \in I$ olyanok, hogy $a < b$. Ekkor

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

teljesül.

Bizonyítás. ■

Az előző állításban megfogalmazott határérték-egyenlőség alkalmazható sokféle határérték kiszámítására.

5. A lépcsősfüggvények és az elemi integrál fogalmának alternatívája

Definíció. A $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvényt *szigorú lépcsősfüggvénynek* nevezzük, ha létezik korlátos intervallumoknak olyan $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges diszjunkt rendszere és olyan $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha}$$

teljesül. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ szigorú lépcsősfüggvények halmazát $E_*(\mathbb{R};\mathbb{K})$ jelöli.

Tehát egy $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor szigorú lépcsősfüggvény, ha létezik korlátos intervallumoknak olyan $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges diszjunkt rendszere és olyan $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy minden $\alpha \in A$ esetén φ az I_α intervallumon a c_α állandó értéket veszi föl, és φ az $\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ halmaz minden pontjában a 0 értéket veszi fel. Speciálisan, ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ szigorú lépcsősfüggvény, akkor $Im(\varphi)$ véges, ezért korlátos halmaz $\mathbb{K}$-ban, és a $[\varphi \neq 0]$ halmaz előáll véges sok korlátos intervallum uniójaként, így $[\varphi \neq 0]$ korlátos halmaz $\mathbb{R}$-ben (bár nem feltétlenül intervallum).

Lemma. (*Kiegészítési lemma.*) Ha $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumok véges rendszere, és I olyan korlátos intervallum, hogy $\bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \subseteq I$, akkor létezik korlátos intervallumoknak olyan $(J_\beta)_{\beta\in B}$ véges diszjunkt rendszere, hogy

$$I \setminus \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcup_{\beta\in B} J_\beta$$

teljesül.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $A \neq \emptyset$, különben az állítás nyilvánvalóan igaz.

Ha I, I' korlátos intervallumok és $I' \subseteq I$, akkor nyilvánvaló, hogy léteznek olyan D_0 és D_1 korlátos intervallumok, hogy $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ és $I \setminus I' = D_0 \cup D_1$. Tehát ha $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumok véges rendszere, és I olyan korlátos intervallum, hogy $\bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \subseteq I$, akkor $\alpha \in A$ esetén vehetünk olyan $D_{\alpha,0}$ és $D_{\alpha,1}$, diszjunkt korlátos intervallumokat, hogy $I \setminus I_\alpha = D_{\alpha,0} \cup D_{\alpha,1}$, így a de Morgan-formula és a metszet unióra vonatkozó disztributivitása szerint

$$I \setminus \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (I \setminus I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} \left(\bigcup_{k\in\{0,1\}} D_{\alpha,k} \right) = \bigcup_{\beta\in\{0,1\}^A} \left(\bigcap_{\alpha\in A} D_{\alpha,\beta(\alpha)} \right)$$

adódik. Tehát ha $B := \{0,1\}^A$ és minden $\beta \in B$ esetén

$$J_\beta := \bigcap_{\alpha\in A} D_{\alpha,\beta(\alpha)},$$

akkor J_β korlátos intervallum, és fennáll az

$$I \setminus \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcup_{\beta\in B} J_\beta$$

egyenlőség. Ugyanakkor a $(J_\beta)_{\beta\in B}$ halmazrendszer diszjunkt, mert ha $\beta, \beta' \in B$ és $\beta \neq \beta'$, akkor van olyan $\alpha \in A$, hogy $\beta(\alpha) \neq \beta'(\alpha)$: ekkor $J_\beta \subseteq D_{\alpha,\beta(\alpha)}$ és $J_{\beta'} \subseteq D_{\alpha,\beta'(\alpha)}$, így $D_{\alpha,\beta(\alpha)} \cap D_{\alpha,\beta'(\alpha)} = \emptyset$ miatt $J_\beta \cap J_{\beta'} = \emptyset$ is teljesül. ■

Állítás. Ha $f, g \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$, akkor létezik korlátos intervallumoknak olyan $(K_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ véges diszjunkt rendszere, valamint léteznek olyan $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ és $(d_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ rendszerek $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$f = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \chi_{K_\gamma}, \qquad g = \sum_{\gamma\in\Gamma} d_\gamma \chi_{K_\gamma}$$

teljesül.

Bizonyítás. A lépcsősfüggvények definíciója szerint legyenek $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(J_\beta)_{\beta\in B}$ korlátos intervallumoknak olyan véges diszjunkt rendszerei és $(c'_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(d'_\beta)_{\beta\in B}$ olyan rendszerek $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$f = \sum_{\alpha\in A} c'_\alpha \chi_{I_\alpha}, \qquad g = \sum_{\beta\in B} d'_\beta \chi_{J_\beta}.$$

Ekkor $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ és $\bigcup_{\beta\in B} J_\beta$ korlátos halmazok $\mathbb{R}$-ben, ezért van olyan K korlátos *intervallum*, amely tartalmazza ezeket a halmazokat. A kiegészítési lemma alapján vehetünk olyan A' és B' halmazokat, valamint korlátos intervallumoknak olyan $(P_\alpha)_{\alpha\in A'}$ és $(Q_\beta)_{\beta\in B'}$ véges diszjunkt rendszereit, amelyekre

$$K \setminus \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A'} P_\alpha, \qquad K \setminus \bigcup_{\beta\in B} J_\beta = \bigcup_{\beta\in B'} Q_\beta$$

teljesül, és nyilvánvalóan feltehető, hogy $A \cap A' = \emptyset = B \cap B'$. Minden $\alpha \in A'$ és $\beta \in B'$ esetén legyen $I_\alpha := P_\alpha$, $c'_\alpha := 0$, valamint $J_\beta := Q_\beta$ és $d'_\beta := 0$. Ekkor $(I_\alpha)_{\alpha\in A\cup A'}$ és $(J_\beta)_{\beta\in B\cup B'}$ korlátos intervallumoknak olyan véges diszjunkt rendszerei, amelyekre

$$\bigcup_{\alpha\in A\cup A'} I_\alpha = K = \bigcup_{\beta\in B\cup B'} J_\beta,$$

továbbá $(c'_\alpha)_{\alpha\in A\cup A'}$ és $(d'_\beta)_{\beta\in B\cup B'}$ olyan rendszerek $\mathbb{K}$-ban, amelyekre

$$f = \sum_{\alpha\in A\cup A'} c'_\alpha \chi_{I_\alpha}, \qquad g = \sum_{\beta\in B\cup B'} d'_\beta \chi_{J_\beta}$$

teljesül. Legyen $\Gamma := (A \cup A') \times (B \cup B')$, és minden $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ esetén

$$K_{(\alpha,\beta)} := I_\alpha \cap J_\beta, \qquad c_{(\alpha,\beta)} := c'_\alpha, \qquad d_{(\alpha,\beta)} := d'_\beta.$$

Könnyen belátható, hogy $(K_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ korlátos intervallumoknak véges diszjunkt rendszere és

$$f = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \chi_{K_\gamma}, \qquad g = \sum_{\gamma\in\Gamma} d_\gamma \chi_{K_\gamma}$$

teljesül. ■

Állítás. Minden $f, g \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $f+g,\ fg,\ \lambda f,\ \overline{f},\ |f| \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$ teljesül. Minden $f, g \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})$ esetén $f \vee g,\ f \wedge g,\ f^+,\ f^- \in E(\mathbb{R};\mathbb{R})$ teljesül.

Bizonyítás. (I) Ha $f \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ korlátos intervallumoknak olyan véges diszjunkt rendszere és $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$f = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha},$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\lambda f = \sum_{\alpha\in A} (\lambda c_\alpha)\chi_{I_\alpha}, \qquad \overline{f} = \sum_{\alpha\in A} \overline{c_\alpha}\chi_{I_\alpha}, \qquad |f| = \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha|\chi_{I_\alpha},$$

teljesül, ezért $\lambda f,\ \overline{f},\ |f| \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$.

(II) Legyenek $f, g \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$, és $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(J_\beta)_{\beta\in B}$ korlátos intervallumoknak olyan véges diszjunkt rendszerei és $(c_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(d_\beta)_{\beta\in B}$ olyan rendszerek $\mathbb{K}$-ban, hogy

$$f = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \chi_{I_\alpha}, \qquad g = \sum_{\beta\in B} d_\beta \chi_{J_\beta}.$$

Ekkor $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ és $\bigcup_{\beta\in B} J_\beta$ korlátos halmazok $\mathbb{R}$-ben, ezért van olyan K korlátos *intervallum*, amely tartalmazza ezeket a halmazokat. A lemma alapján vehetünk olyan A' és B' halmazokat, valamint korlátos intervallumoknak olyan $(P_\alpha)_{\alpha\in A'}$ és $(Q_\beta)_{\beta\in B'}$ véges diszjunkt rendszereit, amelyekre

$$K \setminus \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A'} P_\alpha, \qquad K \setminus \bigcup_{\beta\in B} J_\beta = \bigcup_{\beta\in B'} Q_\beta$$

teljesül, és nyilvánvalóan feltehető, hogy $A \cap A' = \emptyset = B \cap B'$. Minden $\alpha \in A'$ és $\beta \in B'$ esetén legyen $I_\alpha := P_\alpha$, $c_\alpha := 0$, valamint $J_\beta := Q_\beta$ és $d_\beta := 0$. Ekkor $(I_\alpha)_{\alpha\in A\cup A'}$ és $(J_\beta)_{\beta\in B\cup B'}$ korlátos intervallumoknak olyan véges diszjunkt rendszerei, amelyekre

$$\bigcup_{\alpha\in A\cup A'} I_\alpha = K = \bigcup_{\beta\in B\cup B'} J_\beta,$$

továbbá $(c_\alpha)_{\alpha\in A\cup A'}$ és $(d_\beta)_{\beta\in B\cup B'}$ olyan rendszerek $\mathbb{K}$-ban, amelyekre

$$f = \sum_{\alpha\in A\cup A'} c_\alpha \chi_{I_\alpha}, \qquad g = \sum_{\beta\in B\cup B'} d_\beta \chi_{J_\beta}$$

teljesül. Bevezetve a $C := (A\cup A') \times (B\cup B')$ halmazt; könnyen kiszámítható, hogy

$$f + g = \sum_{(\alpha,\beta)\in C} (c_\alpha + d_\beta)\chi_{I_\alpha\cap J_\beta},$$

$$fg = \sum_{(\alpha,\beta)\in C} (c_\alpha d_\beta)\chi_{I_\alpha \cap J_\beta}$$

teljesül és $(I_\alpha \cap J_\beta)_{(\alpha,\beta)\in C}$ korlátos intervallumoknak véges diszjunkt rendszere, ezért $f+g,\ fg \in E(\mathbb{R};\mathbb{K})$.

(III) Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ lépcsősfüggvények, akkor (I), (II) és

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|), \quad f^+ = f \vee 0, \quad f^+ = (-f) \vee 0$$

miatt az $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+ és f^- függvények is lépcsősfüggvények. ■