A szigorlaton semmilyen segédeszköz nem használható!

1. **(20 pont)**
   Végezzen teljes függvényvizsgálatot az
   $$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$$
   függvényen és vázolja fel a függvényt!

2. **(10+10+10 pont)**
   Határozza meg a következő integrálokat!

   (a)
   $$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \quad (t = \sqrt{x} \quad \text{helyettesítés ajánlott}),$$

   (b)
   $$\int_0^1 \int_{y^2}^1 ye^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

   (c)
   $$\iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\,V,$$
   ahol $V = \{(x,y,z) : \sqrt{3x^2+3y^2} \leq z, x^2+y^2+z^2 \geq 9, x^2+y^2+z^2 \leq 81\}$.

3. **(20 pont)**
Elemezze, hogy **a** és **b** paraméterek értékei mellett, mikor hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek!

$$\begin{aligned} \mathbf{a}x \phantom{{}+\mathbf{a}y} + \mathbf{b}z &= 2 \\ \mathbf{a}x + \mathbf{a}y + 4z &= 4 \\ \mathbf{a}y + 2z &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

4. **(15 pont)**
Egy sörgyár a Labdarúgó EB-re való tekintettel, két új sörmárkát tervez bevezetni *Kleinheisler*, illetve *Lovrencsics* fantázianévvel. A Kleinheisler sör előállítási költsége 10 Forint dobozonként, míg a Lovrencsics söré 20 Forint. A fogyasztói szokások felmérésekor arra jutottak, hogy ha x illetve y áron árulják a Kleinheislert illetve a Lovrencsicset dobozonként, akkor az előbbiből a heti keresletet ezer dobozban mérve, a $2(y-x)$ függvény írja le, míg az utóbbiét az $500+2x-3y$ függvény. Hogyan kell megválasztani az x és y dobozonkénti árat, ha a sörgyár a profitot maximalizálni akarja?

5. **(8+7 pont)**
Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében! Adja meg a megoldá-sokat algebrai (kanonikus) alakban!

(a)
$$(z-2-4\,\mathrm{i})^2+(z-2-2\,\mathrm{i})^2=0.$$

(b)
$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2+\frac{1}{z}=1+\mathrm{i}\,.$$

3 nyolcat – 2016.06.17.

(1) $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$ • $f(-x) = -x e^{\frac{1}{x}} \neq \pm f(x) \rightsquigarrow$ nem ps nem ptl.

• $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{1p}$

• $x e^{-1/x} \neq 0$ $\boxed{1p}$

• $\lim\limits_{x\to 0+} x e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to -\infty}} = 0$ $\boxed{2p}$, $\lim\limits_{x\to 0-} x e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to \infty}} = \infty$ $\boxed{2p}$ (először vettük, hogy e^x gyorsabban nő, mint a polinom)

$\lim\limits_{x\to \infty} x e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to 0}} = \infty$ $\boxed{2p}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to 0}} = -\infty$ $\boxed{2p}$

Lineáris aszimptota:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to 0}} = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x(e^{-1/x} - 1) =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$

$\hookrightarrow$ $y = x - 1$ lin. aszimptota $\boxed{2p}$

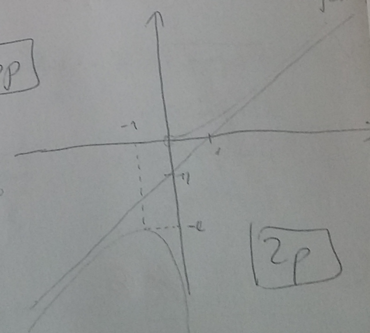
• $f'(x) = e^{-1/x} + x e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$\hookrightarrow$ $f'(x) = e^{-1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \iff 1 + \frac{1}{x} = 0 \iff \boxed{x = -1}$

$f'(x) = e^{-1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \iff 1 + \frac{1}{x} > 0 \iff x < -1 \lor x > 0$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	+	0	~~+~~	X	+
f	↗	MIN $f(-1) = -e$	↘	X	↗

$\boxed{3p}$



$\boxed{2p}$

• $f''(x) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right) + e^{-1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\overbrace{e^{-1/x}}^{>0}}{x^3}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	−	X	+
f	∩	X	−

$\boxed{3p}$

②

a) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^{\sqrt{A}} e^{-t}\,2t\,dt =$

$\boxed{1p}$

$t = \sqrt{x}$
$x = t^2$
$dx = 2t\,dt$
$0 \le x \le A \rightsquigarrow 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{A}$

$\boxed{3p}$

$= 2 \lim_{A\to\infty} \int_0^{\sqrt{A}} t e^{-t}\,dt =$ parc. int

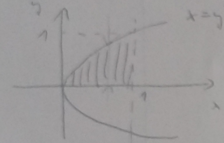
$\boxed{3p}$ $u = t \to u' = 1$
$v' = e^{-t} \quad v = -e^{-t}$

$= 2\lim_{A\to\infty} \left\{ \left[-te^{-t}\right]_0^{\sqrt{A}} + \underbrace{\int_0^{\sqrt{A}} e^{-t}\,dt}_{\left[-e^{-t}\right]_0^{\sqrt{A}}} \right\} = 2\lim_{A\to\infty} \left\{ \underbrace{-\sqrt{A}\,e^{-\sqrt{A}} - e^{-\sqrt{A}}}_{\downarrow\, 0} + 1 \right\} = \underline{\underline{2}}$

$\boxed{4p}$ $\boxed{3p}$

b) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 y e^{-x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \underbrace{\left[\frac{y^2}{2} e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{x}}}_{\frac{x}{2}e^{-x^2}}\,dx =$ $\boxed{2p}$

$y^2 \le x \le 1$
$0 \le y \le 1$



$0 \le y \le \sqrt{x}$
$0 \le x \le 1$

$= -\frac{1}{4}\int_0^1 (-2x)e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left(e^{-1} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{1 - \frac{1}{e}}{4}}}$ $\boxed{2p}$

$\boxed{2p}$

c) $\iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_3^9 \cancel{r^2} \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi \underbrace{\left[\cancel{\frac{r^3}{3}}\right]_3^9}_{243\ 6} \cdot \underbrace{\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/6}}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}$ (=)

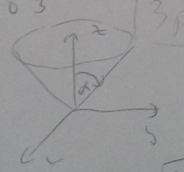
r^2

$\boxed{3p}$

V: $\sqrt{3x^2+3y^2} \le z \rightsquigarrow$ kúp

$x^2+y^2+z^2 \ge 9$

$x^2+y^2+z^2 \le 81$



$\Longrightarrow$

gömbi koord.

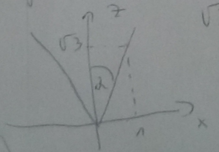
$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$
$z = r\cos\vartheta$
$|J| = r^2\sin\vartheta$

$\boxed{5p}$

$0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{6}$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
$3 \le r \le 9$

$y=0$ síkmetszet: $\sqrt{3x^2} \le z$

$\sqrt{3}|x| = z$



$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

(=) $\underline{\underline{(1-\sqrt{3})\pi\ \cancel{243}\ 6}}$

$\boxed{2p}$

5)

(3) K sör havonta dolgozott: $x-10$

L sör —||— $y-20$

havonkénti dolgozott bevétele:

$$z(x,y) = 2(y-x)(x-10) + (500+2x-3y)(y-20)$$

5p ezt kell maximalizálni

$$z'_x = -2(x-10) + 2(y-x) + 2(y-20) =$$

$$= -2x+20+2y-2x+2y-40 = -4x+4y-20 = 0$$

3p $\Downarrow$ $\boxed{y = 5+x}$

$$z'_y = 2(x-10) - 3(y-20) + 500 + 2x - 3y =$$

$$= 2x-20-3y+60+500+2x-3y = 4x-6y+540 = 0$$

3p $\hookrightarrow$ $2x = 3y - 270$

$\hookrightarrow$ $2x = 3(5+x) - 270 = 15 + 3x - 270$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = 255 \quad y = 260}$

itt lehet ellenőrizni

$z''_{xx} = -4$ $\quad z''_{xy} = z''_{yx} = 4$ $\quad z''_{yy} = -6$

Hesse mátrix

4p

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det H = 24 - 16 > 0$$

$h_{11} = -4 < 0 \Rightarrow$ lokális maximum

a) $(z-2-4i)^2+(z-2-2i)^2=0$

$$z^2-2z(2+4i)+(2+4i)^2+z^2-2z(2+2i)+(2+2i)^2=$$

$$=2z^2-2z(2+4i+2+2i)+(4+16i-16+4+8i-4)=$$

$$=2z^2-2z(4+6i)-12+24i=0$$

$$z^2-z(4+6i)-6+12i=0 \qquad \boxed{4p}$$

megoldóképlettel: $D=(4+6i)^2-4(-6+12i)=16+48i-36+24-48i=$

$$=4$$

$$z_{1,2}=\frac{4+6i\pm 2}{2}= \begin{cases} 3+3i & \boxed{2p} \\ 1+3i & \boxed{2p} \end{cases}$$

b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{z}=1+i \qquad /(1-i)^2\cdot z$

$$(1+i)^2z+(1-i)^2=(1+i)(1-i)^2z$$

$$2iz-2i=2(1-i)z$$

$$2iz-2i=2z-2iz$$

$$z(4i-2)=2i$$

$$z=\frac{2i}{-2+4i}=\frac{2i}{-2+4i}\cdot\frac{-2-4i}{-2-4i}=\frac{-4i+8}{4+16}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

$\boxed{7p}$