Kooperáció és Intelligencia

Nem-kooperatív játékelmélet (1/2. rész)

Kovács Dániel László

Intelligens Rendszerek kutatócsoport

dkovacs@mit.bme.hu

BME MIT

1 dolláros játék (Martin Shubik, 1971)

Eladó 1 dollár. Kikiáltási ár 1 cent. Angol aukció szabályai szerint (aki megadja érte a kikiáltási árat, az máris viheti, hacsak valaki más többet nem ajánl) egy kivétellel: aki a második legmagasabb ajánlatot tette, az is fizet (a nyertes mellett, természetesen). A tét maximális emelése pl. 10 cent.

- Társasági tapasztalat: 340 centért kelt el 1 dollár. „*Too much invested to quit.*"
- Analóg valós helyzetek:
  - **Buszra várakozás** (pedig mehetnénk taxival)
  - **Pocsék filmen bennmaradás** (filmek végén ezért is sűrűbbek a reklámblokkok - kevésbé valószínű, hogy váltunk)
  - **Sztrájk** (Két fél - a kérdés csak az, hogy ki marad teljesen veszteséges?)
  - **Versenytárgyalások/tenderek** (pályázó sok munkát fektet be, de csak egy nyer, a többi veszít)
  - …

Az 1.000.000 dolláros játék

(Douglas R. Hofstadter, Scientific American, Metamagical Themas, 1981-1983)

Pályázatot írnak ki legfeljebb 1 millió dollár elnyerésére. A konkrét nyeremény a pályázók számától függ.

- Ha **1 pályázó** van, akkor az elviszi az **1 milliót**;
- **2 pályázó** esetén valamelyikük nyer **½ milliót**;
- **4 pályázó** esetén valamelyikük **¼ milliót** nyer…
- **1.000.000 pályázó** esetén pedig egyvalaki lesz **1$**-al lesz gazdagabb.

MI AZ ÉSSZERŰ DÖNTÉS EBBEN A HELYZETBEN? …MI MIT TENNÉNK?

Az 1.000.000 dolláros játék

(Douglas R. Hofstadter, Scientific American, Metamagical Themas, 1981-1983)

Multi-ágens erőforrás-kihasználás egy modellje. Például: Ha 1 taxis lenne a városban, hamar meggazdagodna, de ha emiatt mindenki taxizni kezdene (látva a nagy lehetőséget), senki sem élne meg belőle.

1$-al lesz gazdagabb.

MI AZ ÉSSZERŰ DÖNTÉS EBBEN A HELYZETBEN? …MI MIT TENNÉNK?

A játékelmélet „rövid” története…

- **1913** – Ernst Zermelo: *Über eine … Theorie des Schachspiels*
- **1921** – Emile Borel: *La theorie du jeu et les equations integrales a noyau symetrique*
- **1928** – Neumann János: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*
- **1944** – Neumann & Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*
- **1950** – John F. Nash: *Equilibrium points in n-person games*
- **1951** – Kenneth J. Arrow: *Social Choice and Individual Values*
- **1953** – John F. Nash: *Two-person cooperative games*
- **1953** – Lloyd S. Shapley: *A value for n-person games*
- **1967** – Harsányi János: *Games with incomplete information…*
- **1973** – Gibbard & Sattherthwaite: *Strategy-proofness and Arrow's Conditions*
- **1976** – Robert J. Aumann: *Agreeing to Disagree*
- **1982** – John Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games*
- **1988** – Harsányi & Selten: *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*
- **1991** – Abreu & Sen: *Virtual Implementation in Nash Equilibrium*
- **2001** – Nisan & Ronen: *Algorithmic Mechanism Design*
- **2002** – Conitzer & Sandholm: *Automated Mechanism Design*
- **2004** – David C. Parkes: *Distributed Implementations of VCG Mechanisms*

Tartalomjegyzék

- Alapvető játékok (2 és több személyes, iterált…)
- Történeti áttekintés
- Játékok normál alakja
- Szimmetrikus és aszimmetrikus játékok
- Zéró-összegű játékok
- Domináált stratégiák, és a Nash-egyensúly
- Tiszta és kevert stratégiák
- Nash-egyensúly létezése
  - Minimax tétel (és bizonyítása)
  - Nash tétele
- Nash-egyensúly számítása
  - Tiszta eset: Dominált stratégiák eliminációja
  - Kevert eset: Egyenletrendszerek megoldása

Fogoly dilemma (Prisoner’s dilemma)

Egy súlyos bűntény kapcsán két gyanúsítottat tartóztat le a rendőrség. Mivel nem áll rendelkezésre elegendő bizonyíték a vádemeléshez, ezért elkülönítve előzetesbe helyezik őket, és mindkettejüknek ugyanazt a vádalkut kínálják. Amennyiben az egyik fogoly vall és társa hallgat, akkor az előbbinek **elengedik** a büntetését, míg a másik, aki hallgatott, **10 év börtönt** kap. Ha az egyik tagadja meg a vallomást és a másik vall, akkor a másikat fogják **elengedni** és az egyik kap **10 évet**. Ha egyikük sem vall, akkor egy kisebb bűntényért fejenként **6 hónapot** kapnak, ha pedig mindketten vallanak, úgy fejenként **6 évet kapnak**.

- Albert W. Tucker, 1950

1 \ 2	Vall	Tagad
Vall	(-6, -6)	(0, -10)
Tagad	(-10, 0)	(-½, -½)

Fogoly dilemma (Prisoner's dilemma)

Egy súlyos bűntény kapcsán két gyanúsítottat tartóztat le a rendőrség. Mivel nem áll rendelkezésre elegendő bizonyíték a vádemeléshez, ezért elkülönítve előzetesbe helyezik őket, és mindkettejüknek ugyanazt a vádalkut kínálják. Amennyiben az egyik fogoly vall és társa hallgat, akkor az előbbinek **elengedik** a büntetését, míg a másik, aki hallgatott, **10 év börtönt** kap. Ha az egyik tagadja meg a vallomást és a másik vall, akkor a másikat fogják **elengedni** és az egyik kap **10 évet**. Ha egyikük sem vall, akkor egy kisebb bűntényért fejenként **6 hónapot** kapnak, ha pedig mindketten vallanak, úgy fejenként **6 évet kapnak**.

- Albert W. Tucker, 1950

1 \ 2	Vall	Tagad
Vall	(1, 1)	(3, 0)
Tagad	(0, 3)	(2, 2)

Fogoly dilemma (Prisoner’s dilemma)

Egy súlyos bűntény kapcsán két gyanúsítottat tartóztat le a rendőrség. Mivel nem áll rendelkezésre elegendő bizonyíték a vádemeléshez, ezért elkülönítve előzetesbe helyezik őket, és mindkettejüknek ugyanazt a vádalkut kínálják. Amennyiben az egyik fogoly vall és társa hallgat, akkor az előbbinek **elengedik** a büntetését, míg a másik, aki hallgatott, **10 év börtönt** kap. Ha az egyik tagadja meg a vallomást és a másik vall, akkor a másikat fogják **elengedni** és az egyik kap **10 évet**. Ha egyikük sem vall, akkor egy kisebb bűntényért fejenként **6 hónapot** kapnak, ha pedig mindketten vallanak, úgy fejenként **6 évet** **kapnak**.

- Albert W. Tucker, 1950

1 \ 2	Vall	Tagad
Vall	(1, 1)	(3, 0)
Tagad	(0, 3)	(2, 2)

Domináns stratégia (*Vall*)

Egyensúly (*Vall-Vall*)

Optimum (*Tagad-Tagad*)

Közlegelők tragédiája
(Tragedy of the commons)

- Adott egy közlegelő, amely 10 tehenet tud eltartani úgy, hogy ekkor mindegyik tehén **10 liter** tejet ad (adott idő alatt).

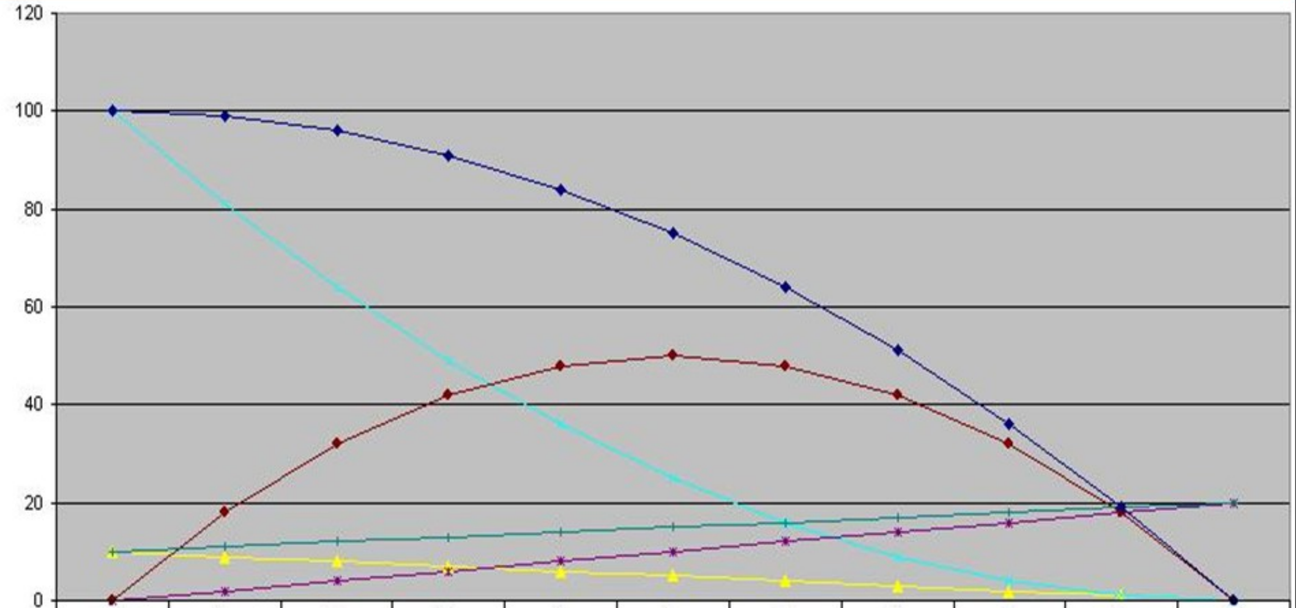
- Az egyik gazda ekkor gondol egyet és küld *még egy* tehenet a legelőre. Ekkor egy-egy tehénnek már kevesebb fű jut, ezért mindegyikük 10 helyett csak **9 liter** tejet ad. Viszont az a gazda, amelyik 2 tehenet legeltet így összesen 2*9=18 liter tejhez jut.

- Ezt észreveszi egy másik gazda is, és ő is kiküld még egy tehenet a legelőre. Ekkor még kevesebb fű jut a teheneknek, és így már csak **8 liter** tejet adnak fejenként. Viszont a 2 dezertőrnek fejenként 2*8=16 liter teje lesz.

- Mikor már 8 gazda tart 2 tehenet, már csak 2*(10-8)=4 liter tejet kapnak fejenként az eredeti 10-hez képest, és a 9. gazda már nem nyerne semmit egy második tehénnel. Ha pedig egy gazda úgy döntene, hogy visszavonja az egyik tehenét, rosszabbul járna.

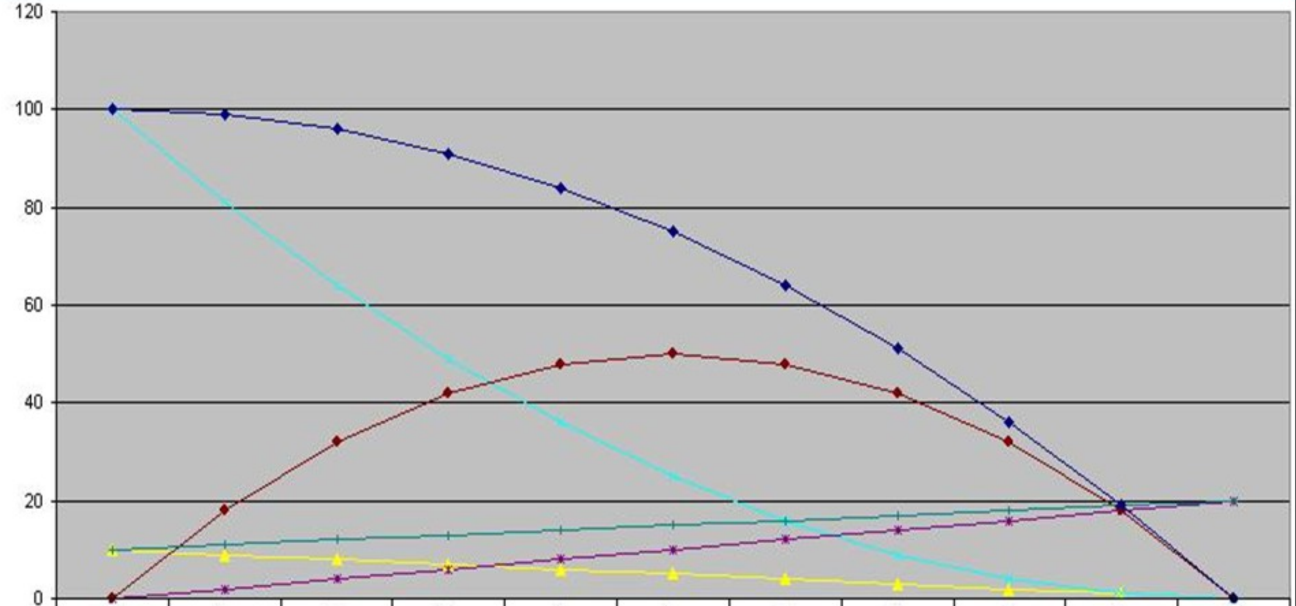
- Garrett Hardin, 1968

Közlegelők tragédiája
(Tragedy of the commons)



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SZT. Tehenei	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
SZT. Hozama	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0
D. Tehenei	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
D. Hozama	0	18	32	42	48	50	48	42	32	18	0
K. Tehenei	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K. Hozama	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0

Közlegelők tragédiája
(Tragedy of the commons)



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SZT. Tehenei	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
SZT. Hozama	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0
D. Tehenei	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
D. Hozama	0	18	32	42	48	50	48	42	32	18	0
K. Tehenei	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K. Hozama	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0

Iterált fogoly dilemma

- **Robert Axelrod** első kísérletei
  - 1979 (15 program)
  - 1982 (62 program)
- Mindkettőt **Anatol Rapoport** nyeri a Tit-For-Tat (TFT) stratégiával
- Ökológiai analízis → TFT
- Evolúciós analízis → ~TFT

Játékok normál alakja

Játék

$$\Gamma = \left(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\right) \qquad |N| = n \geq 2$$

Játékok normál alakja

Játék

$$\Gamma = \left(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\right) \qquad N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Stratégiák és kombinációik

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \times \prod_{i=1}^{n} S_i$$

$$S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \ldots, s_n \in S_n\}$$

Haszonfüggvények

$$\forall i \in N - re \quad u_i : S \to \Re$$

Fontosabb alapdefiníciók (1/2)

Szimmetria

A játék szimmetrikus, ha $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$, és

$\forall i \in N$, $s \in S$, és π permutáció esetén

$$u_i\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right) = u_{\pi(i)}\left(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \ldots, s_{\pi(n)}\right)$$

Ha $n = 2$, akkor $S_1 = S_2$, és $\forall s \in S$-re $u_1\left(s_1, s_2\right) = u_2\left(s_2, s_1\right)$

Zéró-összeg

A játék zéró-összegű, ha $\forall s \in S$-re $\sum_{i \in N} u_i(s) = 0$

Fontosabb alapdefiníciók (2/2)

Dominancia (gyenge)

Az $i \in N$ játékos $s_i, s_i^* \in S_i$ stratégiái esetén $s_i^* \succ s_i$, ha

$\forall s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_{-i} = \bigtimes_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} S_j$ esetén

$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ teljesül, továbbá

$\exists s'_{-i} \in S_{-i}$ úgy, hogy $u_i(s_i^*, s'_{-i}) > u_i(s_i, s'_{-i})$

Nash-egyensúly

$s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ stratégia-kombináció NE, ha

$\forall i \in N$ és $s_i \in S_i$ esetén $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$

Dominált stratégiák iterált eliminációja

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Dominált stratégiák iterált eliminációja

2 1	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Dominált stratégiák iterált eliminációja

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Domínált stratégiák iterált eliminációja

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Domináált stratégiák iterált eliminációja

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Domináltstratégiák iterált eliminációja

1 \ 2	x	y → z	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Dominált stratégiák iterált eliminációja

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Dominált stratégiák iterált eliminációja

1 \ 2	x	y	z
u	(6, 3)	(1, 5)	(0, 6)
v	(1, 7)	(2, 8)	(2, 6)

Gyáva nyúl (Chicken)

Két autós száguld egymással szemben, és az veszít, aki előbb rántja el a kormányt. Nézzük a dolgot az ő szempontjukból: *„A legrosszabb eset nyilván az, ha (1) mindketten konfrontálunk, ekkor ugyanis összecsattanunk. Ennél jobb, ha (2) elrántom a kormányt, miközben a másik nem rántja el. Ekkor ugyanis életben maradok, habár a másik győz. Ennél még jobb, ha (3) a másik is elrántja a kormányt, hiszen akkor legalább nem arat győzelmet fölöttem. A legjobb eset pedig az, ha (4) a másik elrántja a kormányt, miközben én nem rántom el, és így én győzök."*

1 \ 2	Bátor	Gyáva
Bátor	(0, 0)	(3, 1)
Gyáva	(1, 3)	(2, 2)

KOORDINÁCIÓ?

Nemek harca (Battle of sexes)

Képzeljünk el egy házaspárt. A férj inkább focimeccsre, míg a feleség inkább operába szeretne menni, viszont inkább lennének együtt, mintsem külön. Sajnos már nincs idejük egyeztetni – külön-külön kell dönteniük, hogy hová mennek: **focimeccsre**, vagy az **operába**. Mit tegyenek?

N F	Opera	Foci
Opera	(2, 3)	(0, 0)
Foci	(1, 1)	(3, 2)

Nemek harca (Battle of sexes)

Képzeljünk el egy házaspárt. A férj inkább focimeccsre, míg a feleség inkább operába szeretne menni, viszont inkább lennének együtt, mintsem külön. Sajnos már nincs idejük egyeztetni – külön-külön kell dönteniük, hogy hová mennek: **focimeccsre**, vagy az **operába**. Mit tegyenek?

1 \ 2	Vers.	Koop.
Vers.	(1, 1)	(3, 2)
Koop.	(2, 3)	(0, 0)

Nemek harca (Battle of sexes)

Képzeljünk el egy házaspárt. A férj inkább focimeccsre, míg a feleség inkább operába szeretne menni, viszont inkább lennének együtt, mintsem külön. Sajnos már nincs idejük egyeztetni – külön-külön kell dönteniük, hogy hová mennek: **focimeccsre**, vagy az **operába**. Mit tegyenek?

1 \ 2	Vers.	Koop.
Vers.	(1, 1)	(3, 2)
Koop.	(2, 3)	(0, 0)

KOORDINÁCIÓ?

Vezérürü (Leader)

Adott egy egyirányú út, és rajta egy kereszteződés, ahol két autós áll egymással szemben, és épp arra készül, hogy felhajtson az egyirányú útra. Így gondolkoznak: *„Ha **(1)** mindketten elindulunk, akkor összeütközünk (ez a legrosszabb eset). Ennél azért egy fokkal jobb, ha **(2)** egyikőnk sem indul el, bár úgy időtlen időkig ebben a kereszteződésben rostokolnánk... Ha azonban **(3)** én várnék, és a másik indulna előbb, úgy legalább előbb-utóbb feljutnék az útra. A legjobb persze az volna, ha **(4)** én indulnék előbb, és a másik várna."*

1 \ 2	Megy	Vár
Megy	(0, 0)	(3, 2)
Vár	(2, 3)	(1, 1)

Vezérürü (Leader)

Adott egy egyirányú út, és rajta egy kereszteződés, ahol két autós áll egymással szemben, és épp arra készül, hogy felhajtson az egyirányú útra. Így gondolkoznak: *„Ha (1) mindketten elindulunk, akkor összeütközünk (ez a legrosszabb eset). Ennél azért egy fokkal jobb, ha (2) egyikőnk sem indul el, bár úgy időtlen időkig ebben a kereszteződésben rostokolnánk... Ha azonban (3) én várnék, és a másik indulna előbb, úgy legalább előbb-utóbb feljutnék az útra. A legjobb persze az volna, ha (4) én indulnék előbb, és a másik várna."*

1 \ 2	Megy	Vár
Megy	(0, 0)	(3, 2)
Vár	(2, 3)	(1, 1)

KOORDINÁCIÓ?

Salamon király dilemmája
(King Solomon's dilemma)

Egy alkalommal két asszony jött el a bölcs királyhoz, hogy vitás ügyükben tegyen igazságot. Egy házban laktak. Egyenlőkorú gyermekeik voltak. Az egyiknek gyermeke éjjel meghalt és mindkettő magáénak vallotta az életben maradt gyermeket. Salamon lényegében azt mondta: *„Ha mindketten ragaszkodtok a gyermekhez, akkor kettéhasítom számotokra. Ha egyiktek lemond róla, úgy a másiknak ítélem. Ha mindketten lemondtok róla, úgy haragomban mindenkit kivégeztetek.”*

- Ószövetség, Királyok I. könyve (3.16-3.28)

I \ H	Rag.	Lem.
Rag.	(1, 2)	(3, 1)
Lem.	(2, 3)	(0, 0)

Salamon király dilemmája
(King Solomon’s dilemma)

Egy alkalommal két asszony jött el a bölcs királyhoz, hogy vitás ügyükben tegyen igazságot. Egy házban laktak. Egyenlőkorú gyermekeik voltak. Az egyiknek gyermeke éjjel meghalt és mindkettő magáénak vallotta az életben maradt gyermeket. Salamon lényegében azt mondta: *„Ha mindketten ragaszkodtok a gyermekhez, akkor kettéhasítom számotokra. Ha egyiktek lemond róla, úgy a másiknak ítélem. Ha mindketten lemondtok róla, úgy haragomban mindenkit kivégeztetek.”*

- Ószövetség, Királyok I. könyve (3.16-3.28)

I \ H	Rag.	Lem.
Rag.	(1, 2)	(3, 1)
Lem.	(2, 3)	(0, 0)

Salamon király dilemmája
(King Solomon's dilemma)

Egy alkalommal két asszony jött el a bölcs királyhoz, hogy vitás ügyükben tegyen igazságot. Egy házban laktak. Egyenlőkorú gyermekeik voltak. Az egyiknek gyermeke éjjel meghalt és mindkettő magáénak vallotta az életben maradt gyermeket. Salamon lényegében azt mondta: *„Ha mindketten ragaszkodtok a gyermekhez, akkor kettéhasítom számotokra. Ha egyiktek lemond róla, úgy a másiknak ítélem. Ha mindketten lemondtok róla, úgy haragomban mindenkit kivégeztetek."*

- Ószövetség, Királyok I. könyve (3.16-3.28)

I \ H	Rag.	Lem.
Rag.	(1, 2)	(2, 3)
Lem.	(3, 1)	(0, 0)

Salamon király dilemmája
(King Solomon's dilemma)

Egy alkalommal két asszony jött el a bölcs királyhoz, hogy vitás ügyükben tegyen igazságot. Egy házban laktak. Egyenlőkorú gyermekeik voltak. Az egyiknek gyermeke éjjel meghalt és mindkettő magáénak vallotta az életben maradt gyermeket. Salamon lényegében azt mondta: *„Ha mindketten ragaszkodtok a gyermekhez, akkor kettéhasítom számotokra. Ha egyiktek lemond róla, úgy a másiknak ítélem. Ha mindketten lemondtok róla, úgy haragomban mindenkit kivégeztetek."*

- Ószövetség, Királyok I. könyve (3.16-3.28)

I \ H	Rag.	Lem.
Rag.	(1, 2)	(2, 3)
Lem.	(3, 1)	(0, 0)

KOORDINÁCIÓ?

Forintpárosítás (Matching pennies)

Adott két játékos, akik mindketten rendelkeznek egy-egy forinttal. A forintjukat egymás elől elrejtve fejre, vagy írásra állítják, majd pedig egyszerre felmutatják. Ha mindkét forint „paritása” azonos (azaz fej-fej, vagy írás-írás), akkor az egyik játékos nyer, mindkét érme az övé lesz, egyébként a másik nyer.

1 \ 2	Fej	Írás
Fej	(1, -1)	(-1, 1)
Írás	(-1, 1)	(1, -1)

Forintpárosítás (Matching pennies)

Adott két játékos, akik mindketten rendelkeznek egy-egy forinttal. A forintjukat egymás elől elrejtve fejre, vagy írásra állítják, majd pedig egyszerre felmutatják. Ha mindkét forint „paritása” azonos (azaz fej-fej, vagy írás-írás), akkor az egyik játékos nyer, mindkét érme az övé lesz, egyébként a másik nyer.

1 \ 2	Fej	Írás
Fej	(1, -1)	(-1, 1)
Írás	(-1, 1)	(1, -1)

MEGOLDÁS?

Normál alak kiterjesztése (1/2)

Kevert stratégiák

$i \in N$ egy kevert stratégiája $q_i \in Q_i = \Delta\left(S_i\right)$, ahol

$\forall s_i \in S_i$-re $q_i\left(s_i\right) \geq 0$, és $\sum_{s_i \in S_i} q_i\left(s_i\right) = 1$ (tiszta: $q_i\left(s_i\right) = 1$)

Kevert stratégia-kombinációk

$$q = \left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \in Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n$$

Haszonfüggvények

$\forall i \in N$-re $u_i : Q \to \Re$, ahol $q \in Q$ esetén

$$u_i(q) = \sum_{s=(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S} q_1(s_1) \cdot q_2(s_2) \cdot \ldots \cdot q_n(s_n) \cdot u_i(s)$$

Normál alak kiterjesztése (2/2)

Kevert Nash-egyensúly

$$q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right) \in Q \text{ kevert NE, ha}$$

$$\forall i \in N \text{ és } q_i \in Q_i \text{ esetén } u_i\left(q_i^*, q_{-i}^*\right) \geq u_i\left(q_i, q_{-i}^*\right)\text{, ahol}$$

$$q_{-i}^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_{i-1}^*, q_{i+1}^*, \ldots, q_n^*\right)$$

Legjobb válasz?

$$\text{Azaz } \forall i\text{-re } q_i^* \in \arg\max_{q_i \in Q_i} u_i\left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, \ldots, q_n^*\right)$$

Nash-egyensúly létezése

- ***(Neumann, 1928)****: Ha egy 2-személyes zéró-összegű játékban teljesül a minimax-feltétel, akkor a játéknak van nyeregpontja (egyensúlya), és a játék értéke a minimax-feltétel két oldalán álló kifejezés közös értéke.*
- ***(Nash, 1951)****: Ha az n-személyes játék tiszta stratégiahalmazai végesek, akkor a keveréssel létrejövő halmazok szorzatán definiált játéknak van legalább egy kevert egyensúlya.*

Minimax tétel bizonyítása

$$u_1\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u_1\left(q_1, q_2^*\right) \;\; \forall q_1 \in Q_1$$

$$u_2\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u_1\left(q_1^*, q_2\right) \;\; \forall q_2 \in Q_2$$

$$u_1\left(s\right) + u_2\left(s\right) = 0 \;\; \forall s \in S$$

Minimax tétel bizonyítása

$$u_1\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u_1\left(q_1, q_2^*\right) \quad \forall q_1 \in Q_1$$

$$u_2\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u_1\left(q_1^*, q_2\right) \quad \forall q_2 \in Q_2$$

$$u_1\left(q\right) + u_2\left(q\right) = 0 \ \forall q \in Q$$

Minimax tétel bizonyítása

$$u_1\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u_1\left(q_1, q_2^*\right) \;\; \forall q_1 \in Q_1$$

$$u_2\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u_1\left(q_1^*, q_2\right) \;\; \forall q_2 \in Q_2$$

$$u_1(q) + u_2(q) \; = 0 \; \forall q \in Q$$

$$u_1 = -u_2 \; \square \; u$$

Minimax tétel bizonyítása

$$u\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u\left(q_1, q_2^*\right) \quad \forall q_1 \in Q_1$$

$$u_2\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u_1\left(q_1^*, q_2\right) \quad \forall q_2 \in Q_2$$

$$u_1\left(q\right) + u_2\left(q\right) = 0 \ \forall q \in Q$$

$$u_1 = -u_2 \ \square \ u$$

Minimax tétel bizonyítása

$$u\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u\left(q_1, q_2^*\right) \quad \forall q_1 \in Q_1$$

$$-u\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq -u\left(q_1^*, q_2\right) \quad \forall q_2 \in Q_2$$

$$u_1(q) + u_2(q) = 0 \quad \forall q \in Q$$

$$u_1 = -u_2 \square u$$

Minimax tétel bizonyítása

$$u\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u\left(q_1, q_2^*\right) \quad \forall q_1 \in Q_1$$

$$u\left(q_1^*, q_2^*\right) \leq u\left(q_1^*, q_2\right) \quad \forall q_2 \in Q_2$$

$$u_1(q) + u_2(q) = 0 \quad \forall q \in Q$$

$$u_1 = -u_2 \ \square \ u$$

Minimax tétel bizonyítása

$$u\left(q_1^*, q_2\right) \geq u\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq u\left(q_1, q_2^*\right) \quad \forall q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$$

$$\boxed{\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} u\left(q_1, q_2\right) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} u\left(q_1, q_2\right) = v}$$

Legyen q_1^* olyan, hogy $\min_{q_2 \in Q_2} u\left(q_1^*, q_2\right) = v$

Legyen q_2^* olyan, hogy $\max_{q_1 \in Q_1} u\left(q_1, q_2^*\right) = v$

$$u\left(q_1^*, q_2^*\right) \geq v$$

$$u\left(q_1^*, q_2^*\right) \leq v$$

$$u\left(q_1^*, q_2^*\right) = v$$

Minimax tétel bizonyítása

$$u(q_1^*, q_2) \geq u(q_1^*, q_2^*) \geq u(q_1, q_2^*) \quad \forall q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$$

$$\boxed{\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} u(q_1, q_2) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} u(q_1, q_2) = v}$$

Legyen q_1^* olyan, hogy $\min_{q_2 \in Q_2} u(q_1^*, q_2) = v$

Legyen q_2^* olyan, hogy $\max_{q_1 \in Q_1} u(q_1, q_2^*) = v$

$$\left.\begin{array}{l} u(q_1^*, q_2^*) \geq v \\ u(q_1^*, q_2^*) \leq v \end{array}\right\} \rightarrow u(q_1^*, q_2^*) = v$$

$$\min_{q_2 \in Q_2} u(q_1^*, q_2) = u(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1 \in Q_1} u(q_1, q_2^*) \quad \blacksquare$$

Forintpárosítás Nash-egyensúlya(i)

$$
\begin{aligned}
&u_i(q)\Big|_{q=\left(\left(1-p_1^2,\,p_1^2\right),\left(1-p_2^2,\,p_2^2\right)\right)} = \\
&=\left(1-p_1^2\right)\cdot\left(1-p_2^2\right)\cdot u_i^{1,1} + \\
&+\left(1-p_1^2\right)\cdot p_2^2\cdot u_i^{1,2} + \\
&+p_1^2\cdot\left(1-p_2^2\right)\cdot u_i^{2,1} + \\
&+p_1^2\cdot p_2^2\cdot u_i^{2,2} =
\end{aligned}
$$

Forintpárosítás Nash-egyensúlya(i)

$$u_i(q)\Big|_{q=\left(\left(1-p_1^2,\, p_1^2\right),\left(1-p_2^2,\, p_2^2\right)\right)} =$$

$$=\left(1-p_1^2-p_2^2+p_1^2\cdot p_2^2\right)\cdot u_i^{1,1}+$$

$$+\left(p_2^2-p_1^2\cdot p_2^2\right)\cdot u_i^{1,2}+$$

$$+\left(p_1^2-p_1^2\cdot p_2^2\right)\cdot u_i^{2,1}+$$

$$+p_1^2\cdot p_2^2\cdot u_i^{2,2}=$$

Forintpárosítás Nash-egyensúlya(i)

$$u_i(q)\Big|_{q=\left(\left(1-p_1^2,p_1^2\right),\left(1-p_2^2,p_2^2\right)\right)} =$$

$$= p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \left(u_i^{1,1} - u_i^{1,2} - u_i^{2,1} + u_i^{2,2}\right) +$$

$$+ p_1^2 \cdot \left(-u_i^{1,1} + u_i^{2,1}\right) +$$

$$+ p_2^2 \cdot \left(-u_i^{1,1} + u_i^{1,2}\right) +$$

$$+ u_i^{1,1}$$

Forintpárosítás Nash-egyensúlya(i)

$$u_1(q)\Big|_{q=\left(\left(1-p_1^2,\,p_1^2\right),\left(1-p_2^2,\,p_2^2\right)\right)} =$$

$$= p_1^2 \cdot \left[p_2^2 \cdot \left(u_1^{1,1} - u_1^{1,2} - u_1^{2,1} + u_1^{2,2} \right) + \left(-u_1^{1,1} + u_1^{2,1} \right) \right] +$$

$$+ \left[p_2^2 \cdot \left(-u_1^{1,1} + u_1^{1,2} \right) + u_1^{1,1} \right]$$

$$u_2(q)\Big|_{q=\left(\left(1-p_1^2,\,p_1^2\right),\left(1-p_2^2,\,p_2^2\right)\right)} =$$

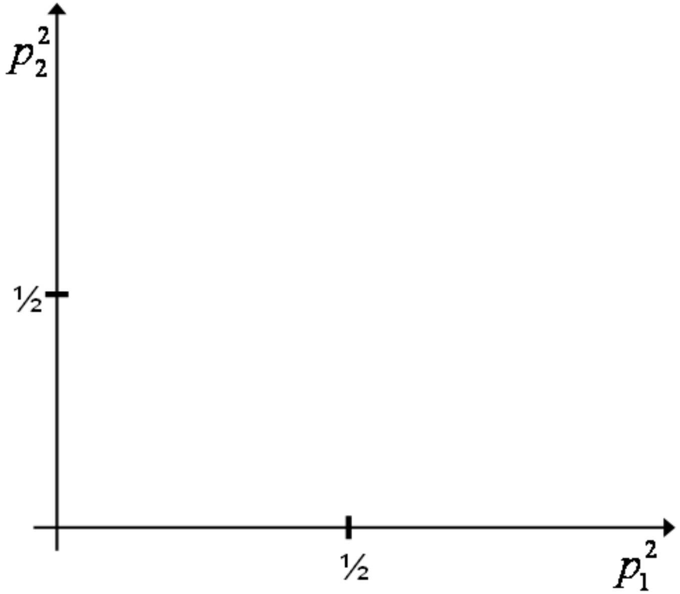
$$= p_2^2 \cdot \left[p_1^2 \cdot \left(u_2^{1,1} - u_2^{1,2} - u_2^{2,1} + u_2^{2,2} \right) + \left(-u_2^{1,1} + u_2^{1,2} \right) \right] +$$

$$+ \left[p_1^2 \cdot \left(-u_2^{1,1} + u_2^{2,1} \right) + u_2^{1,1} \right]$$

Forintpárosítás Nash-egyensúlya(i)

$$u_1\left(\left(1-p_1^2, p_1^2\right),\left(1-p_2^2, p_2^2\right)\right) = p_1^2 \cdot \left(4p_2^2 - 2\right) + \left(-2p_2^2 + 1\right)$$

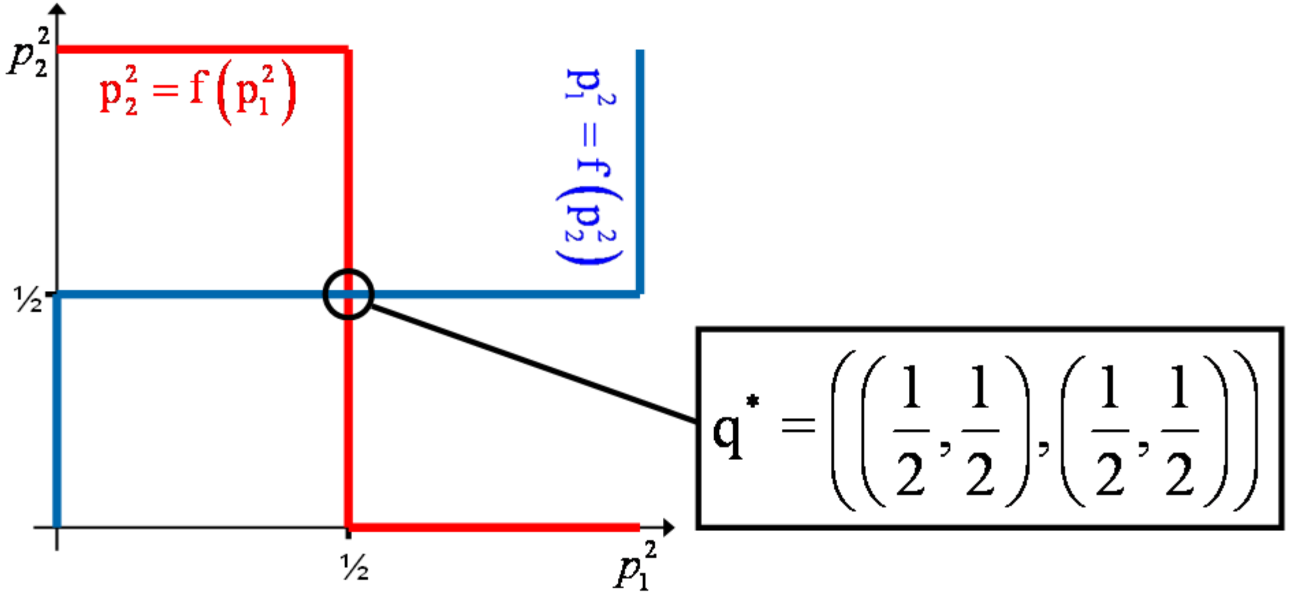
$$u_2\left(\left(1-p_1^2, p_1^2\right),\left(1-p_2^2, p_2^2\right)\right) = p_2^2 \cdot \left(-4p_1^2 + 2\right) + \left(2p_1^2 - 1\right)$$



Forintpárosítás Nash-egyensúlya(i)

$$u_1\left(\left(1-p_1^2, p_1^2\right), \left(1-p_2^2, p_2^2\right)\right) = p_1^2 \cdot \left(4p_2^2 - 2\right) + \left(-2p_2^2 + 1\right)$$

$$u_2\left(\left(1-p_1^2, p_1^2\right), \left(1-p_2^2, p_2^2\right)\right) = p_2^2 \cdot \left(-4p_1^2 + 2\right) + \left(2p_1^2 - 1\right)$$



Kő-papír-olló (Rock-paper-scissors)

		1/3	1/3	1/3
	1 \ 2	Kő	Papír	Olló
1/3	Kő	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
1/3	Papír	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
1/3	Olló	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)