Felsőbb Matematika Informatikusoknak D
házi feladatok a „Sztochasztika 2" részhez
2014 tavasz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2014.04.08.)

HF 1.1 Egy várban lévő száraz kút mellett rengeteg túrista megy el. Ezek mindegyike egymástól függetlenül, valamilyen kis valószínűséggel egy pénzérmét dob a kútba, amibe így egy nap alatt átlagosan 50 érme hull. Ezek mindegyike 50% valószínűséggel esik a „FEJ" oldalával felfelé, a többitől függetlenül.

a.) Legyen X az egy nap alatt (mondjuk június 1-én) a kútba dobott érmék száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség?

b.) Legyen Y az egy nap alatt „FEJ" oldalával felfelé a kútba eső érmék száma. A teljes várható érték tétel segítségével számoljuk ki Y várható értékét. *(Segítség: Mi is lesz Y feltételes eloszlása (ill. feltételes várható értéke) az $\{X = n\}$ feltétel mellett?)*

c.) Számoljuk ki Y eloszlását, vagyis a $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűségeket a teljes valószínűség tétel segítségével! *(Segítség: $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = e^x$.)*

Megoldás:

a.) Mivel sok kísérlet egymástól függetlenül kis valószínűséggel sikeres és X a sikeres kísérletek száma, Poisson eloszlással modellezzük: $X \sim Poi(\lambda)$, ahol a paraméter $\lambda = \mathbf{E}X = 50$ a szöveg szerint. Vagyis

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-50}\frac{50^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

b.) Azon feltétel mellett, hogy $X = k$, vagyis k érme esik a kútba, Y várható értéke $\frac{1}{2}k$, hiszen az érmék átlagosan fele esik fejjel felfelé. Vagyis $\mathbf{E}(Y \mid X = k) = \frac{k}{2}$. Az $\{X = k\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, így a teljes várható érték tétel miatt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Y &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbf{E}(Y \mid X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\frac{k}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}\mathbf{E}X = 25.\end{aligned}$$

c.) Ha tudjuk, hogy n érme esik a kútba, és ezek mindegyike a többitől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz fej, akkor a fejek száma *ezen* $\{X = n\}$ *feltétel mellett* binomiális eloszlású n és $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Matematikai jelöléssel:

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

ha $0 \le k \le n$, vagyis ha $n \ge k$. Ezzel szemben $n < k$-ra persze $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = 0$. Mivel az $\{X = k\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, a teljes valószínűség tétel miatt minden $k \in \{0, 1, 2 \dots\}$-re

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=k \mid X=n) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}q^{n-k}}{(n-k)!} = \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}\sum_{l=0\infty}\frac{(q\lambda)^l}{l!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{q\lambda} = e^{-(1-q)\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!} = \\
&= e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!} = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!},
\end{aligned}$$

ahol $\mu = p\lambda = 25$, vagyis $Y \sim Poi(\mu)$: a „FEJ" oldallal felfelé érkező érmék száma Poisson eloszlású $\mu = 25$ paraméterrel.

2.HF: (Beadási határidő: 2014.04.22.)

HF 2.1 Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2}{4-2^z}$.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mennyi X szórása?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X=0)$ és a $\mathbb{P}(X=1)$ valószínűség?

HF 2.2 Egy orvosi rendelőben minden beteg vizsgálata alatt újabb betegek érkezhetnek a váróba. Számuk véletlen, független az előzményektől, és legfeljebb 3. Annak valószínűségét, hogy pontosan k új beteg érkezik, jelölje p_k ($k = 0, 1, 2, 3$). Az első beteg, Pistike, érkezésekor azonnal bemehet a rendelőbe, mi pedig őt egymagát nevezzük a betegek „nulladik generációjának". Azok a betegek, akik Pistike vizsgálata alatt érkeznek, alkotják az „első generációt". Akik az első generáció tagjainak vizsgálata alatt érkeznek, alkotják a „második generációt". És így tovább, az n-edik generáció tagjainak vizsgálata alatt érkezők lesznek az $n+1$-edik generáció. A doktor néni akkor tart kávészünetet, ha egy beteg vizsgálatának befejezésekor a várótermet üresen találja.

Jelölje Z_n az n-edik generáció tagjainak számát, N pedig a doktor néni első kávészünetéig megvizsgált összes beteg számát.

Az alábbi kérdéseket válaszoljuk meg a p_k paraméterek következő értékeire:

I.

k	0	1	2	3
p_k	1/4	1/4	1/4	1/4

II.

k	0	1	2	3
p_k	0.5	0.2	0.2	0.1

a.) Mi Z_1 generátorfüggvénye?

b.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

c.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a negyedik generáció üres?

e.) Mennyi a valószínűsége, hogy a doktor néni előbb-utóbb tart kávészünetet? *(Segítség: ha egy harmadfokú egyenletnek egy megoldását ismerjük, akkor a többit is könnyű megtalálni.)*

f.) Mennyi N várható értéke?

3.HF: (Beadási határidő: 2014.04.22.)

HF 3.1 Egy hajón a 100 utas mindegyike a többitől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tud úszni. A hajótársaság úgy gondolja, hogy baleset esetén 75 mentőmellény bőven elegendő. Ők az iskolában tanulták a centrális határeloszlás tételt (CHT).

a.) Ha megbecsülték a CHT segítségével, hogy mekkora valószínűséggel lesz a hajón 75-nél több úszni nem tudó utas, mit kaptak?

b.) Legfeljebb mennyi lehet a fenti becslés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? *(A tételben szereplő konstans egy 2011-es eredmény szerint választható $C = 0.4748$-nak.)*

c.) Becsüljük meg a fenti valószínűséget valamelyik nagy eltérés tétel segítségével is!

4.HF: (Beadási határidő: 2014.05.06.)

HF 4.1 A Sóder kft. biztosítást köt a munka során bekövetkező balesetekből eredő kár fedezésére. A biztosító az ügyfeleit négy kategóriába sorolja (1, 2, 3, 4), és a besorolást minden hónap végén felülvizsgálja. Ha egy hónapban történik egy baleset, akkor a következő hónapban 1-gyel magasabb kategóriába kerülnek (illetve ha a 4-esben voltak, akkor ottmaradnak); ha nem történik baleset, akkor 1-gyel alacsonyabb kategóriába kerülnek (illetve ha az 1- esben voltak, akkor ottmaradnak). Ha két vagy több baleset történik, akkor egyenesen a 4-es kategóriába kerülnek. A Sóder Kft-nél minden hónapban $\frac{1}{4}$ valószínűséggel történik pontosan egy baleset, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig legalább kettő, az előzményektől függetlenül.

a.) Modellezzük a rendszert Markov lánccal. Adjuk meg az átmenetvalószínűségeket!

b.) Feltéve, hogy az első hónapban a Sóder Kft az 1. kategóriában van, mennyi a valószínűsége, hogy a következő hónapokban rendre az 1., 2., 3., 2. kategóriában lesz?

c.) Feltéve, hogy az első hónapban a Sóder Kft az 1. kategóriában van, mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik hónapokban is az 1. kategóriában lesz?

d.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

e.) Megközelítőleg mi a valószínűsége annak, hogy a 30. hónapban az 1. kategóriában van a biztosítás?

f.) Számítsuk ki, hogy mennyi az átlagos havi biztosítási díjuk hosszú távon, ha a biztosítási díj az egyes kategóriákra rendre 30000, 50000, 80000 és 120000 forint havonta.

5.HF: (Beadási határidő: 2014.05.13.)

HF 5.1 Egy posta ügyfélterében két kiszolgáló ablak működik. Az ügyféltérben az ablakoknál állókkal együtt legfeljebb 5 ügyfél tartózkodhat; az ilyenkor érkező további ügyfeleket a biztonsági őr kiszolgálás nélkül elküldi. Ha egy ablak felszabadul, a soron következő ügyfél azonnal beáll. Ha olyankor érkezik egy ügyfél, amikor mindkét ablak szabad, akkor találomra áll be valamelyikhez. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 3 perc, és az ügyfelek átlagosan 2 percenként érkeznek. Jelöljük $X(t)$-vel a t időpontban az ügyféltérben tartózkodó ügyfelek számát.

a.) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Mi az állapottér? Rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt és írjuk be az ugrási rátákat! *(Vigyázat: ha két kisasszony egyszerre dolgozik két ügyfél kiszolgálásán, akkor az* egyikük *milyen rátával végez?)*

b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort.

c.) Határozzuk meg a stacionárius eloszlást.

d.) Az idő mekkora részében üres az ügyféltér?

e.) Az idő mekkora részében tétlen az első ablaknál dolgozó kisasszony?

f.) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy tele van az ügyféltér?

g.) **Bónusz feladat:** Vajon mi lenne a válasz a fenti kérdésekre, ha az ügyféltér mérete nem lenne korlátozva? (A stacionárius eloszlás megsejtéséhez most is szabad észrevenni (mint a véges ügyféltér esetén is), hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)