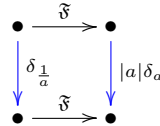


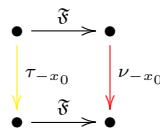
## Fourier-transzformáció tulajdonságai (nyilakkal és görög betűkkel)

Vezessük (paraméteres) függvény transzformációkat:

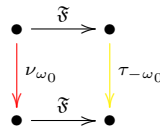
- $h$ -val vett eltolás  $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$
- $\Omega$ -val vett moduláció  $(\nu_\Omega f)(x) = e^{i\Omega x} f(x)$
- $\alpha$ -val vett dilatáció  $(\delta_\alpha)(x) = f(\alpha x)$
- **Hasonlósági tétel**  $\mathfrak{F}[x \rightarrow f(\frac{x}{a})](\omega) = |a|\mathfrak{F}[f](a\omega)$  helyett írhatjuk



- **Eltolási tétel**  $\mathfrak{F}[x \rightarrow f(x - x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0} \mathfrak{F}[f](\omega)$  helyett írhatjuk



- **Modulációs tétel**  $\mathfrak{F}[x \rightarrow e^{i\omega_0 x} f(x)](\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega - \omega_0)$  helyett írhatjuk



8. a) feladat megoldása:

$$e^{-|x|} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$e^{-|3x-6|} \xrightarrow{\mathfrak{F}} ?$$

Először felépítjük a bal oldalt:

$$\begin{array}{ccc} e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\ \downarrow \delta_3 & & \\ e^{-|3x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & ? \\ \downarrow \tau_{-6} & & \\ e^{-|3x-6|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & ? \end{array}$$

A szabályok értelmében kitöltjük a jobb oldal nyilait:

$$\begin{array}{ccc} e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\ \downarrow \delta_3 & & \downarrow 1/3\delta_{\frac{1}{3}} \\ e^{-|3x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & ? \\ \downarrow \tau_{-6} & & \downarrow \nu_{-6} \\ e^{-|3x-6|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & ? \end{array}$$

Kiszámoljuk a jobb oldali nyilak hatásait:

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\
 \downarrow \delta_3 & & \downarrow 1/3\delta_{\frac{1}{3}} \\
 e^{-|3x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{3} \frac{1}{1+(\frac{\omega}{3})^2} \\
 \downarrow \tau_{-6} & & \downarrow \nu_{-6} \\
 e^{-|3x-6|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \boxed{\frac{2}{3} \frac{e^{-6i\omega}}{1+(\frac{\omega}{3})^2}}
 \end{array}$$

Természetesen elég egy ábrán végig számolni.  
Hasonlóan a b) feladat

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\
 \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{\omega^2+2\omega+5}
 \end{array}$$

Most a jobb oldalt bontjuk fel  $\tau, \nu, \delta$ -k kompozíciójára. Először az állomásokat:

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\
 \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \\
 \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \\
 \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{1}{4} \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
 \end{array}$$

Majd a nyilakat:

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\
 & & \downarrow \delta_{\frac{1}{2}} \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \\
 & & \downarrow \tau_1 \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \\
 & & \downarrow \cdot \frac{1}{4} \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{1}{4} \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
 \end{array}$$

A szabályoknak megfelelően a másik oldal nyilai:

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\
 \downarrow 2\delta_2 & & \downarrow \delta_{\frac{1}{2}} \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \\
 \downarrow \nu_{-1} & & \downarrow \tau_1 \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \\
 \downarrow \cdot \frac{1}{4} & & \downarrow \cdot \frac{1}{4} \\
 ? & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \frac{1}{4} \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
 \end{array}$$

Kiszámoljuk bal oldal függvényeit:

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-|x|} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}} & \frac{2}{1+\omega^2} \\
 \downarrow 2\delta_2 & & \downarrow \delta_{\frac{1}{2}} \\
 2e^{-|2x|} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \\
 \downarrow \nu_{-1} & & \downarrow \tau_1 \\
 e^{-ix}2e^{-|2x|} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}} & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \\
 \downarrow \cdot \frac{1}{4} & & \downarrow \cdot \frac{1}{4} \\
 \boxed{\frac{1}{4}e^{-ix}2e^{-|2x|}} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}} & \frac{1}{4} \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
 \end{array}$$