Fourier-transzformálció tulajdonságai (nyilakkal és görög betűkkel)

Vezessük (paraméteres) függvény transzformációkat:

- h-val vett eltolás $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$
- Ω-val vett moduláció $(\nu_\Omega f)(x) = e^{i\Omega x} f(x)$
- α-val vett dilatáció $(\delta_\alpha)(x) = f(\alpha x)$
- **Hasonlósági tétel** $\mathfrak{F}[x \to f(\frac{x}{a})](\omega) = |a|\mathfrak{F}[f](a\omega)$ helyett írhatjuk

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\delta_{\frac{1}{a}}"] & \bullet \arrow[d, "|a|\delta_a"] \\
\bullet \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

- **Eltolási tétel** $\mathfrak{F}[x \to f(x-x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0}\mathfrak{F}[f](\omega)$ helyett írhatjuk

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\tau_{-x_0}"] & \bullet \arrow[d, "\nu_{-x_0}"] \\
\bullet \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

- **Modulációs tétel** $\mathfrak{F}[x \to e^{i\omega_0 x} f(x)](\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega - \omega_0)$ helyett írhatjuk

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\nu_{\omega_0}"] & \bullet \arrow[d, "\tau_{-\omega_0}"] \\
\bullet \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

8. a) feladat megoldása:

$$e^{-|x|} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$e^{-|3x-6|} \xrightarrow{\mathfrak{F}} ?$$

Először felépítjük a bal oldalt:

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\delta_3"] & \frac{2}{1+\omega^2} \\
e^{-|3x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\tau_{-6}"] & ? \\
e^{-|3x-6|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & ?
\end{tikzcd}$$

A szabályok értelmében kitöltjük a jobb oldal nyilait:

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\delta_3"] & \frac{2}{1+\omega^2} \arrow[d, "1/3\delta_{\frac{1}{3}}"] \\
e^{-|3x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\tau_{-6}"] & ? \arrow[d, "\nu_{-6}"] \\
e^{-|3x-6|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & ?
\end{tikzcd}$$

Kiszámoljuk a jobb oldali nyilak hatásait:

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\delta_3"] & \frac{2}{1+\omega^2} \arrow[d, "1/3\delta_{\frac{1}{3}}"] \\
e^{-|3x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\tau_{-6}"] & \frac{2}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2} \arrow[d, "\nu_{-6}"] \\
e^{-|3x-6|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \boxed{\frac{2}{3}\frac{e^{-6i\omega}}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2}}
\end{tikzcd}$$

Természetesen elég egy ábrán végig számolni.
Hasonlóan a b) feladat

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{1+\omega^2} \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{\omega^2+2\omega+5}
\end{tikzcd}$$

Most a jobb oldalt bontjuk fel τ, ν, δ-k kompozíciójára. Először az állomásokat:

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{1+\omega^2} \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
\end{tikzcd}$$

Majd a nyilakat:

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{1+\omega^2} \arrow[d, "\delta_{\frac{1}{2}}"] \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \arrow[d, "\tau_1"] \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \arrow[d, "\cdot\frac{1}{4}"] \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
\end{tikzcd}$$

A szabályoknak megfelelően a másik oldal nyilai:

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "2\delta_2"] & \frac{2}{1+\omega^2} \arrow[d, "\delta_{\frac{1}{2}}"] \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\nu_{-1}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \arrow[d, "\tau_1"] \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\cdot\frac{1}{4}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \arrow[d, "\cdot\frac{1}{4}"] \\
? \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
\end{tikzcd}$$

Kiszámoljuk bal oldal függvényeit:

$$\begin{tikzcd}
e^{-|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "2\delta_2"] & \frac{2}{1+\omega^2} \arrow[d, "\delta_{\frac{1}{2}}"] \\
2e^{-|2x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\nu_{-1}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega}{2})^2} \arrow[d, "\tau_1"] \\
e^{-ix}2e^{-|2x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\cdot\frac{1}{4}"] & \frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2} \arrow[d, "\cdot\frac{1}{4}"] \\
\boxed{\frac{1}{4}e^{-ix}2e^{-|2x|}} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{\omega+1}{2})^2}
\end{tikzcd}$$