α VARIÁNS

1, a, $\boxed{4}$ • Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos. (2p)

• Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens (2p)

(• Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.) (2p)

b, $\boxed{9}$

$$a_n = \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+4}\right)^{3n^2} = \left(\frac{\left(1-\frac{3/2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}\right)^3 \longrightarrow \left(\frac{e^{-3/2}}{e^2}\right)^3 = e^{-21/2}$$

6p 3p

2, a, $\boxed{8p}$

i, Ha $a_n \to \infty$, akkor $\frac{1}{a_n} \to 0$. IGAZ (1p)

$a_n \to \infty$, tehát $\forall P>0: \exists N(P) \in \mathbb{N}: \forall n > N(P)$ esetén $a_n > P$

$\iff 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{P} =: \varepsilon$. Ha $\varepsilon > 0$, akkor $P := \frac{1}{\varepsilon}$, és $n > N(P)$

esetén $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon \implies 1/a_n \to 0$. (4p)

ii, Ha $a_n \to 0$, akkor $\frac{1}{a_n} \to \infty$. HAMIS (1p)

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, de $\frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n \not\to \infty$ (2p)

---

b, Felhasználjuk, hogy $n^k \ll a^n \ll b^n \ll n!$

$1 < a < b$

$\boxed{6}$

$$a_n = \frac{n^3+(-7)^n}{n! - 5^n} = \frac{n^3/n! + (-7)^n/n!}{1 - 5^n/n!} \longrightarrow 0$$ (3p) konvergens,

$\implies S_a = \{0\}$; (1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (1) (1)

$\boxed{7}$

$$b_n = \frac{n! - 5^n}{n^3 + (-7)^n} = \frac{\overset{\pm\infty}{\frac{n!}{(-7)^n}} - \overset{\to 0}{\left(\frac{5}{-7}\right)^n}}{\underbrace{\frac{n^3}{(-7)^n}}_{\to 0} + 1} \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

4p

$\Longrightarrow S_b = \{+\infty, -\infty\}$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n = -\infty$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = +\infty$, divergens

1 1 1

3, a, f (kétszer diff.-ható) fv-nek x_0-ban inflexiója van $\Longleftrightarrow$

4p $\Longleftrightarrow f''(x_0) = 0$ és f'' x_0-ban előjelet vált.

$\boxed{10}$ b, $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 13)$; $\quad x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 \geq 4$

$\longrightarrow D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x-6}{x^2-6x+13}$$ 3

$$f''(x) = \frac{2(x^2-6x+13) - (2x-6)^2}{(x^2-6x+13)^2} = \frac{-2x^2+12x-10}{(x^2-6x+13)^2} =$$ 3

$$= \underbrace{\frac{-2}{(x^2-6x+13)^2}}_{<0} \cdot \underbrace{(x^2 - 6x + 5)}_{(x-1)(x-5)}$$

x	$x<1$	1	$1<x<5$	5	$5<x$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	infl. p.	$\cup$	infl. p.	$\cap$

4

Konvex: $[1, 5]$

Konkáv: $(-\infty, 1]$; $[5, +\infty)$

Inflexió: $1, 5$-ben.

4, a, T.: (Rolle) Ha f folytonos $[a,b]$-n, diff.-ható (a,b)-n,

4

és $f(a)=f(b)$, akkor $\exists\, c\in(a,b):\ f'(c)=0.$

b,

8

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{2x-4}-1}{\ln(3x-5)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{2e^{2x-4}}{\left(\frac{3}{3x-5}\right)} \ 5 = \frac{2\cdot e^0}{3} = \frac{2}{3} \ 3$$

— ∘ —

5* a, $\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$

4p

(vagy $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$)

10p b, $\int \underbrace{(x^2-x+1)}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\,dx = -(x^2-x+1)\cos x + \int \underbrace{(2x-1)}_{u}\underbrace{\cos x}_{v'}\,dx =$ 4

$u'=2x-1 \quad v=-\cos x \qquad u'=2 \quad v=\sin x$

$= (-x^2+x-1)\cos x + (2x-1)\sin x - \underbrace{\int 2\sin x\,dx}_{2(-\cos x)+c} =$ 4

$= (-x^2+x+1)\cos x + (2x-1)\sin x + C$ 2

— ∘ —

6* $I = \int \frac{2e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx \Rightarrow \int \frac{2t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt$ 4p

$t=e^x$

$x=\ln t\ ;\ dx=\frac{1}{t}dt$

$$\frac{2t+1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \Rightarrow 2t+1 = A(t^2+1)+(Bt+C)t$$

$2t+1 = t^2\underbrace{(A+B)}_{0} + t\underset{2}{\underset{\parallel}{C}} + \underset{1}{\underset{\parallel}{A}} \qquad B=-1$ 4p

$$I = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{-t+2}{t^2+1} \right) dt \Big|_{t=e^x}$$

$$\int \frac{1}{t}\, dt \Big|_{t=e^x} = \ln|t| + c \Big|_{t=e^x} = \underline{x + c}$$ (1)

(3)

$$\int \frac{2-t}{t^2+1}\, dt = \int \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{2t}{t^2+1}\, dt + \int \frac{2}{1+t^2}\, dt = \frac{-1}{2} \ln(t^2+1) + 2 \operatorname{arctg} t + c$$

f'/f alak

<u>Összegezve:</u> $\underline{I = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + 2 \operatorname{arctg} e^x + C}$ (1)

—o—

7*a, Legyen $f \in R[a,b]$, és $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Ekkor

[6] i, F folytonos $[a,b]$-n.

ii, Ha f folytonos $x \in (a,b)$-ben, akkor F deriválható x-ben, és

$$F'(x) = f(x)$$

—o—

b, Legyen $f(x) = \operatorname{ch}(\arcsin(1-x))$; $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ekkor

[7] $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt = F(x^2)$, (3) így $G'(x) = \frac{d}{dx}\left(F(x^2)\right) = 2x\, F'(x^2) =$ (3)

$= 2x\, f(x^2) = \underline{\underline{2x \operatorname{ch}(\arcsin(1-x^2))}}$ (1)

—o—

β VARIÁNS (tömör változat)

1, a, — lásd α $\boxed{4p}$

b, $\boxed{9}$ $$a_n=\left(\frac{3n^3-5}{3n^3+6}\right)^{2n^3}=\left(\frac{\left(1-\frac{5/3}{n^3}\right)^{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n^3}\right)^{n^3}}\right)^2 \overset{(6)}{\longrightarrow} \left(\frac{e^{-5/3}}{e^2}\right)^2=\underline{\underline{e^{-22/3}}} \quad (3)$$

2, a, — lásd α $\boxed{8p}$

b, $a_n\to 0$, konvergens, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\lim a_n=0$ $\boxed{6p}$

$$b_n\longrightarrow\begin{cases}+\infty, & \text{ha } n \text{ páros}\\ -\infty, & \text{ha } n \text{ páratl.}\end{cases}$$

$S_b=\{\pm\infty\}$; $\overline{\lim}\, b_n=+\infty$; $\underline{\lim}\, b_n=-\infty$; divergens $\boxed{7p}$

3, a, — lásd α $\boxed{4p}$

b, $\boxed{10p}$ $$f'(x)=\frac{2x-8}{x^2-8x+17} \ (3); \quad f''(x)=\frac{2(x^2-8x+17)-(2x-8)^2}{(x^2-8x+17)^2} \ (3) =$$

$$=\underbrace{\frac{-2}{((x-4)^2+1)^2}}_{<0}\cdot\underbrace{(x^2-8x+15)}_{(x-3)(x-5)}$$

x	$x<3$	3	$3<x<5$	5	$5<x$
f''	−	0	+	0	−
f	∩		∪		∩

inflexió

konvex: $[3,5]$

konkáv: $(-\infty,3]$, $[5,+\infty)$ (4)

4, a, – lásd α $\boxed{4}$

b, $\boxed{8}$ $\lim_{x\to 3} \frac{e^{2x-6}-1}{\ln(3x-8)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 3} \frac{2e^{2x-6}}{\left(\frac{3}{3x-8}\right)} = \frac{2}{3}$ (5) (3)

— ∘ —

5* a, – lásd α $\boxed{4p}$

b, $\boxed{10}$ $\int (\underbrace{x^2+x-1}_{u}) \underbrace{\cos x}_{v'}\, dx = (x^2+x-1)\sin x - \int (\underbrace{2x+1}_{u}) \underbrace{\sin x}_{v'}\, dx =$ (4)

$= (x^2+x-1)\sin x - \Big((2x+1)(-\cos x) \underbrace{- \int 2(-\cos x)\, dx}_{2\sin x + C}\Big) =$ (4)

$= (x^2+x-3)\sin x + (2x+1)\cos x + C$ (2)

— ∘ —

6* – lásd α $\boxed{13}$

— ∘ —

7* a, – lásd α $\boxed{6}$

$\boxed{7}$ b, $f(t) = \mathrm{sh}(\arccos(1-t))$; $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$

$F'(x) = f(x)$

$G(x) = \int_0^{x^3} f(t)\,dt = F(x^3)$ (3)

$G'(x) = 3x^2 F'(x^3)$ $3x^2 f(x^3) = 3x^2 \mathrm{sh}(\arccos(1-x^3))$ (3) (1)

IMSC feladat (14 IMSC pont)
Jelölje $\{a\}$ az $a \in \mathbb{R}$ szám törtrészét, és legyen $f(x) = x \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\}$. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; *c)* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; *d)* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Mo. *a)* Az átviteli elvvel igazolható, hogy a határérték nem létezik. Legyen $\forall k \in \mathbb{N}_+$ estén $x_k = \frac{1}{k}$ és $y_k = \frac{1}{k+1/2}$. Mindkét sorozat zérushoz tart, és $\left\{\frac{1}{x_k}\right\} = 0 \neq \left\{\frac{1}{x_k}\right\} = \frac{1}{2}$. **(4p)**

b) Mivel a törtrész függvény értékkészlete $[0, 1)$ korlátos, és $\lim_{x\to 0} x = 0$ ezért $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. **(3p)**

c) Ha $x > 1$, akkor $\frac{1}{x} \in (0, 1)$, így $\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x}$, tehát $f(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, és egyben ez a keresett határérték is. **(3p)**

d) Ha $x < -1$, akkor $\frac{1}{x} \in (-1, 0)$, így $\left\{\frac{1}{x}\right\} = 1 + \frac{1}{x}$, tehát $f(x) = x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x + 1 \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$. **(4p)**
