Matematika A1 2. Zárthelyi megoldásai

2013. november 18.

1. Beugró feladat (5×2 pont)

   (a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-3}{n})^{2n} = \mathbf{e^{-6}}$

   (b) Irjuk le, hogy mit jelent a $\lim_{x\to 5-} f(x) = \infty$ kifejezés!
   MO:
   $$\forall P > 0, \exists \delta > 0, \quad , \text{hogy} \quad f(x) > P, \quad \text{ha} \quad 5-\delta < x < 5.$$

   (c)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^6 + 5x^{4/3} - 2\sqrt{x}}{-2x^6 + x^4 - \sqrt[3]{x}} - \frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.$$

   (d) Hol folytonos a következő függvény?
   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \le 1, \\ x^2 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$
   Mindenütt.

   (e) Adja meg, ha létezik, az $f(x) = \frac{4x^2-4}{2(x+1)}$ függvény lineáris aszimptotáját a $-\infty$-ben!
   MO:
   $$f(x) = \frac{4x^2 - 4}{2(x+1)} = 2x - 2, \quad \text{ha} \quad x \neq -1, \quad \text{így ez az aszimptota.}$$

2. Adjuk meg a következő sorozatok határértékét! (5+5 pont)

   (a) $a_n = (\frac{3n^2-2}{3n^2+6})^{4n^2+3} + \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$
   MO:
   Mivel
   $$\left[\left(\frac{1-\frac{2/3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}\right)^{n^2}\right]^4 \left(\frac{1-\frac{2/3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}\right)^3 \to \left(\frac{e^{-2/3}}{e^2}\right)^4 = \mathbf{e^{-32/3}},$$

és

$$\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}=\frac{n+2-n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)n}+\sqrt[3]{n^2}}\to\mathbf{0},$$

így

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{e^{-32/3}}.$$

(b) $a_1=\sqrt{3}, \quad a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}.$

MO:

Miután $a_2=\sqrt{3+2\sqrt{3}}>a_1$ sejthetjük, hogy a_n szigorúan monoton növő. Ezt könnyen bizonyíthatjuk indukcióval: tegyük fel, hogy $a_{n-1}<a_n$. Ekkor azonban

$$\sqrt{3+2a_{n-1}}<\sqrt{3+2a_n}, \quad \text{vagyis} \quad a_n<a_{n+1},$$

pont amire vágytunk. A konvergenciához az kellene még, hogy a_n felülről korlátos. Ekkor azonban éppen a legkisebb felső korlát lenne a határérték. Tegyük fel, hogy létezik a határérték és $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor a rekurziós formulából teljesülni kell, hogy

$$A=\sqrt{3+2A}.$$

Ebből $A=-1$ vagy $A=3$ következik. $A=-1$ biztos nem lehet a limesz, hiszen $a_n\geq\sqrt{3}$. Így ha a sorozat konvergens, akkor 3-hoz konvergál és ez felső korlát is. Ismét indukció: $a_1<3$ teljesül. Tegyük fel, hogy $a_n<3$. Ekkor azonban

$$\sqrt{3+2a_n}\leq\sqrt{3+2\cdot 3}=3,$$

vagyis $a_{n+1}\leq 3$. Tehát: $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{3}$.

3. (a) (5 pont) Adjuk meg az $a_n=\sqrt[n]{3^{2n+1}-9^n\cos n\pi}$ sorozat $\liminf$-jét és $\limsup$-ját!

MO:

$$a_{2k}=\sqrt[2k]{3\cdot 9^{2k}-9^{2k}}=\sqrt[2k]{2}\cdot 9\to 9,$$
$$a_{2k+1}=\sqrt[2k+1]{3\cdot 9^{2k+1}+9^{2k+1}}=\sqrt[2k+1]{4}\cdot 9\to 9.$$

Itt kihasználtuk, hogy $\cos n\pi=(-1)^n$, valamint hogy $\sqrt[2k]{a}\to 1$ és $\sqrt[2k+1]{a}\to 1$ minden $a>0$-ra, hiszen ezek az 1-hez konvergáló $\sqrt[n]{a}$ részsorozatai. Máshoz konvergáló részsorozata nem lehet (a_n)-nek, hiszen annak szükségképpen végtelen sok elemét kell, hogy tartalmazza a fenti részsorozatok valamelyikének, így azoknak is 9-hez kell tartaniuk. Így

$$\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n = \mathbf{9}.$$

(b) (5 pont) Számoljuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$$

MO:
Dolgozhatunk az előadáson bizonyított tétellel, hiszen az $f(x)=\sqrt{1+x}-x$ és $g(x)=1/x$ választással teljesül, hogy

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0}|g(x)|=\infty.$$

Ekkor $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}=e^b$, ahol $b=\lim_{x\to 0} g(x)(f(x)-1)$. Itt:

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(x+1)^2}{x(\sqrt{1+x}+x+1})=\lim_{x\to 0}\frac{-1-x}{\sqrt{1+x}+x+1}\to -1/2.$$

Vagyis $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}=\mathbf{e^{-1/2}}$.

4. (10 pont) Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényt! Osztályozzuk a szakadási helyeit, amennyiben vannak!

$$f(x)=\frac{\sin 2\pi x}{3\pi x}+\frac{1}{3^{\frac{x}{x+1}}}+\frac{2x-2}{|x-1|}$$

MO:
A szakadási helyek: $-1, 0, 1$, ezeken kívül a függvény folytonos.
$x=0$-ban, mivel

$$\frac{\sin 2\pi x}{3\pi x}=\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\frac{2\pi x}{3\pi x}\to\frac{2}{3}, \quad \text{ha} \quad x\to 0,$$

a többi tag határértéke pedig a helyettesítési érték, ezért

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2/3+1-2=-1/3,$$

vagyis 0**-ban megszüntethető szakadás van.**
$x=-1$-ben csak a második tag szakad. Erre nézve, mivel

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{x+1}=+\infty, \quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x+1}=-\infty,$$

ezért

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{3^{\frac{x}{x+1}}}=0, \quad \lim_{x\to -1+0}\frac{1}{3^{\frac{x}{x+1}}}=\infty.$$

A többi tag határértéke -1-ben a helyettesítési érték, ami 0 illetve -2, így

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=-2, \quad \lim_{x\to -1+0} f(x)=\infty,$$

vagyis -1**-ben másodfajú szakadás van.**
$x = 1$-ben
$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2(x-1)}{|x-1|} = -2, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{2(x-1)}{|x-1|} = 2,$$
a többi tag 0-hoz illetve $1/\sqrt{3}$-hoz tart, így
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1/\sqrt{3} - 2, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1/\sqrt{3} + 2,$$
azaz 1**-ben ugrása van a függvénynek.**

5. (a) (5 pont) Felveszi-e az $f(x) = -\cos \pi x + 2 + \frac{x^3}{4}$ függvény a 3 értéket a $[0, 1]$ intervallumon?
MO:
Legyen $g(x) = f(x) - 3 = -\cos \pi x + \frac{x^3}{4} - 1$. Ő folytonos mindenhol, így $[0, 1]$-en is. Mivel $g(0) = -2$ és $g(1) = 1/4$ így a Bolzano-tétel miatt létezik $c \in (0, 1)$, hogy $g(c) = 0$, ami ekvivalens az $f(c) = 3$-mal, tehát **igen.**

(b) (5 pont) Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 2}$ függvény lineáris aszimptotáját a $+\infty$-ben, amennyiben létezik!
MO:
Mivel $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, így ha van lineáris aszimptota, az aligha vízszintes. Mivel
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4 - 3/x + 2/x^2} = 2,$$
és
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 3x + 2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + 2x} = -3/4,$$
így a lineáris azsimptota létezik, és az egyenlete:
$$\mathbf{y = 2x - \frac{3}{4}}.$$