Folytonos idejű Markov-láncok

Bizonyos időket eltöltődik ott a Markov-lánc, s az is véletlen.

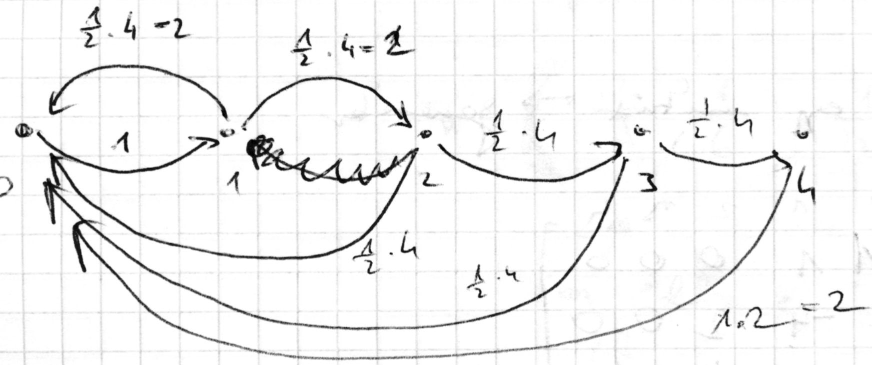
Az ugrások pillanatában mi történik (vagyis nem foglalkozunk azzal, hogy mi történik, az egy diszkrét idejű Markov-lánccá redukálódik.

Az egyes állapotokban eltöltött idő mindig exponenciális

↓ mert az exp. az egyetlen folytonos eloszlás, ami örökifjú (a múlttól nem szabad függenie a jövőnek).

Csak a paraméter különbözhet.

a) Gráfreprezentáció:



Nem valószínűségeket, hanem rátákat írunk a nyilakra.

0 állapotban ~~1 par~~ Exp(1)-et várunk.

0-ból 1-be átugrunk egy 1 paraméteres exp után.

1. állapotban: Exp(4) van

Ha bekövetkezik az ugrás, akkor 0-ba és 2-be is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugrunk → az egyes élekre meg kell szorozni λ-t, hogy rátát megkapjuk.

Ráta: minél nagyobb, annál sűrűbben ugrunk azon az élen.

Minden csúcsnak van egy elhagyási rátája: ez az EXP(λ)-ban lévő λ. Ha a ráta nagy, akkor gyorsan el akarunk ugrani, ha van egy nagy exp, az gyorsan el akar menni, mert az exp várható értéke $\frac{1}{\lambda}$.

A ráta egy sebességnemű dolog, s additív, ~~ha~~ a kimenő élek összegének rátájával akarunk elugrani.
Ezt az exp. órával is lehet mondani.

2-féleképp generálhatunk ilyen Markov-folyamatot:

- ∀ csúcshoz egy exp órát állítunk, s a megadott valószínűségekkel csörögnek. Amikor csörög, akkor el kell ugrani, a Q mátrixban megadottakkal.
- Ka minden csúcsból kiinduló élre teszünk egy exp. órát. Ha odaelsőként csörög, akkor amentén az él mentén fogunk ugrani.

A modell felírás egy mátrix → generátor

$$G = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

pl: 0. sor azt mondja, hogy ilyen rátával ugrok a 0. állapotból a többi állapotba.

A főátlóba a sorban szereplő összes többi ráta összege, s ezen összeg (−1)-szerese.

A gráfreprezentációt a generátormátrixból is fel lehet írni.

b, Hosszú távon valamilyen stacionárius eloszlást kell találnunk.

Itt $\pi \cdot G = 0$ egyenletet kell megoldani.

transzponálva: $G^T \cdot \pi^T = 0$ $\rightarrow$ π változókra ad egy egyenletrendszert.

$$G^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Gauss-eliminálva

$$\pi = \begin{bmatrix} 16t \\ 4t \\ 2t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

végül $t = \frac{1}{24}$-et kell választani

$$\pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24} \right)$$

az idők ennyied részét tölti itt.

c, Költségráta-fgv.

$f(i) = i+2$ most.

Tudjuk, hogy az idő mekkora részeit töltjük az egyes állapotokban.

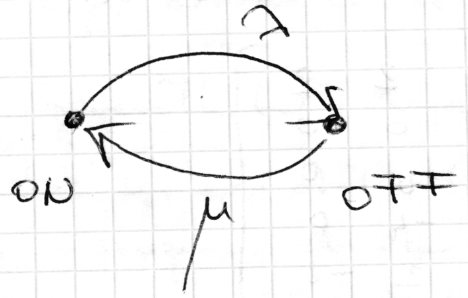
$$E_\pi(f) = \sum_{k \in S} \pi_k \cdot f(k) = \underset{\pi_0}{\frac{2}{3}} \cdot \underset{f(0)}{2} + \underset{\pi_1}{\frac{1}{6}} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{24} \cdot 5 + \frac{1}{24} \cdot 6 =$$

a hosszútávú várható költséget adja

A stacionárius eloszlás nem lesz ugyanaz, mint a diszkrét idejű Markov-lánc Q-jához tartozó sajátvektor.

(2.) On-off rendszer.

Gráfreprezentációja:



ON: működik

OFF: nem működik

A hozzá tartozó generátor:

$$G = \begin{array}{c|cc} & ON & OFF \\ \hline ON & -\lambda & \lambda \\ OFF & \mu & -\mu \end{array}$$

A kérdés: mi a stacionárius eloszlás:

$$G^T = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \quad \rightarrow \pi = \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix}$$

amit normálva:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$

(3.)

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b, A Markov-lánc az 1 állapotból indul

$\Downarrow$ ez az 1. sornak felel meg.

3 a kimenető ráta.
Exp. valószínűségi változó mondja meg, hogy mennyit tölthet el egyben $\rightarrow$ ~~Exp~~ $EXP(3)$. Ebből $E = \frac{1}{3}$

a, 3-as áll $\rightarrow \frac{1}{4}$

4-es áll $\rightarrow 1$

c, T = a 4-es állapot első elérési ideje.

Érdekel minket:

$$E(T \mid \underbrace{X(0) = 1}_{\text{1-ből indultunk.}})$$

Feltételes felbontást csinálunk aszerint, hogy mi volt a Markov-lánc első lépései.

Az 1-ből el kell ugrani $\rightarrow$ várható értékben amennyit el kell tölteni, amennyi ehhez kell.

Ha 4-be ugrottunk, akkor kész.

Ha 2-be ugrottunk, akkor mivel Markov-lánc (nem emlékszik a múltra), ezért olyan, mintha a 2-ből indultunk.

Így leegyen

$$x_2 = E(T \mid X(0)=2)$$

$$x_3 = E(T \mid X(0)=3)$$

$$x_1 = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\text{az első} \\ \text{ugrásig} \\ \text{eltelt várható} \\ \text{idő.}}} + \left(\underbrace{\frac{1}{3} \cdot x_2}_{\substack{\text{2.-be} \\ \text{ugrottam}}} + \underbrace{\frac{1}{3} x_3}_{\substack{\text{3-ba} \\ \text{ugrottam}}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 0}_{\text{4-be ugrottam.}} \right)$$

Így visszafele csináltuk meg, mintha a 0-ban voltunk.

A kimeneti mátrixot most $\frac{1}{3}$-szoros alakban néz.

A hátralévő idő pont olyan eloszlású, mintha onnan kezdtem volna az időmérést.

Ha 3-ba ugrottam, akkor olyan, mintha onnan indultunk volna.

Ha 4.-be ugrottam, akkor az összes eltelt idő $\frac{1}{3}$-ad.

x_2-re és x_3-ra is lehet felírni egyenletet.

~~Xk~~ 2-es állapotból 3-ba vagy 4-be tudok menni:

$$x_2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{3} \cdot 0 \right)$$

$\uparrow$

$\frac{2}{3}$-ad valószínűséggel megyek 2-ből 3-ba

Ha a 3. állapotból indultunk:

$$X_3 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} x_1 + \overset{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}} \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot 0 \right)$$

3. sor elemei G-ben.

Így
$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 \\ X_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} x_3 \\ X_3 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x_1 + \frac{1}{2} x_2 \end{aligned}\right\}$$
$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ lesz a megoldása.

Így $E(T \mid X(0) = 1) = \underset{\uparrow = x_1}{1}$

(4.) M/M/2 kiszolgáló modell.

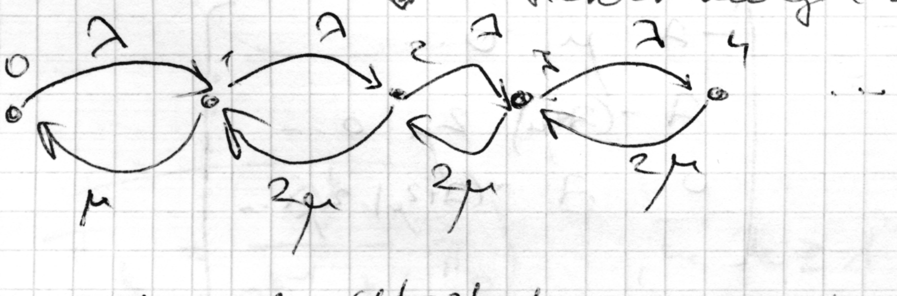
ha van üres szerver, akkor hozzá kerül, ha nincs, akkor a várakozási sorba.

A Markov-láncunk állapottere a rendszerben lévő csomagok száma lesz:

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}$$ ← hány csomag van a rendszerben.

↑ ez ∞.

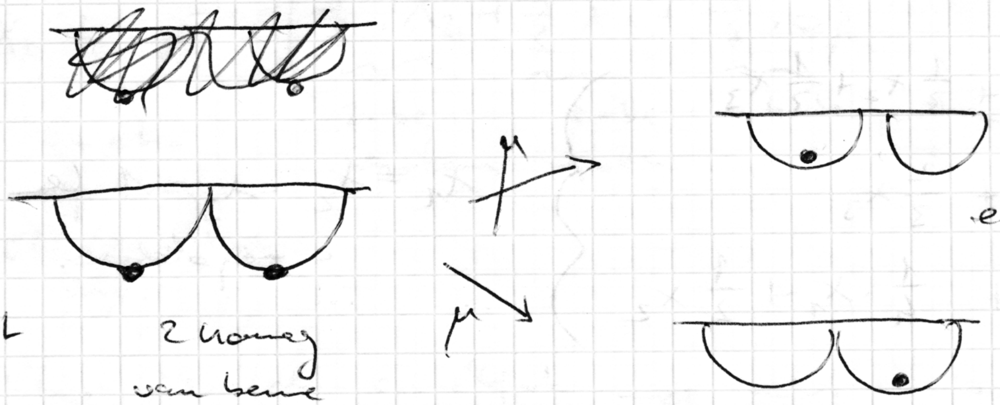
Gráfreprezentáció: 2 csomag van a rendszerben, egyszerre 2 szerver szolgál ki.



Egyszerre csak 1-gyel változhat a rendszerben lévő csomagok száma.

μ rátával szolgálódik ki.

(Vannak egyformaságok, a vevők kiszolgálási sebessége egy $EXP(\mu)$).



LoL

2 vevő van benne

ez ugyanazt az állapotot jelenti a Markov-láncban

Általában is: lefelé 2μ rátával ekkor is.

A két folytonos valószínűség sosem fog egybeesni.

$$G = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \text{—} & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \text{—} \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & 0 & \text{—} & \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & 0 & \dots \\ & \vdots & & & & \\ & \vdots & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

A kérdés a stacionárius eloszlás Ehhez:

$$G^T = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 \dots & & \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu & 0 \dots & \\ 0 & \lambda & -(\lambda+2\mu) & 2\mu \dots & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

A stacionárius eloszlás ekkor:

$$-\lambda \cdot \pi_0 + \mu \cdot \pi_1 = 0$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \pi_0$$

A köv. egyenletből:

$$\lambda \pi_0 - (\lambda + \mu) \cdot \pi_1 + 2\mu \pi_2 = 0$$

beírom a helyébe $\frac{\lambda}{\mu} \cdot \pi_0$ -t.

Ekkor:

$$\lambda \pi_0 - \frac{\lambda^2}{\mu} \pi_0 - \lambda \pi_0 + 2\mu \pi_2 = 0 ,$$

vagyis

$$\pi_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \pi_0$$

Köv. egyenlet:

$$\lambda \cdot \pi_1 - (\lambda + \mu) \cdot \pi_2 + 2\mu \cdot \pi_3 = 0$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu} \cdot \pi_0 - \frac{\lambda^3}{2\mu^2} \pi_0 - \frac{\lambda^2}{\mu} \pi_0 + 2\mu \pi_3 = 0$$

így

$$\pi_3 = \frac{\lambda^3}{4 \cdot \mu^3} \cdot \pi_0$$

$\vdots$

$$\pi_k = \frac{\lambda^k}{2^{k-1} \mu^k} \cdot \pi_0 \quad , \text{ha } k \geq 1$$

Π_0-at pedig úgy kell, hogy ennek az összege,

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k = \Pi_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{2^{k-1}\mu^k}}$$

ez kell, hogy valószínűségi eloszlás legyen Π.

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^k$$

ez egy mértani sor.

ehhez $\frac{\lambda}{2\mu} \leq 1$-nek kell lennie, különben a mértani sor ∞-t adna.

így a mértani sorral:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^k = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}$$

$\frac{\lambda}{2\mu} < 1$ feltétel mellett $\Pi_0 = \dfrac{1}{1+2\cdot\frac{\lambda}{2\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}} =$

$$= \frac{1}{1+\frac{2\lambda}{2\mu-\lambda}} = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}$$

b, c,

a b,-re a válasz 1- c, feladaté.

c,-re: $\sum_{k=N+1}^{\infty} \Pi_k$ ← sok elő mivel Π eloszlásban van a rendszer, ha a valség, hogy et N-től nagyobb.

Az a, végeredménye:

$$\pi_k = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{2^{k-1}\cdot\mu^k}, \text{ ha } k \geq 1$$

Így

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda} \cdot 2 \cdot \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^k}_{\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{N+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{N+1} \cdot \frac{2\mu}{2\mu-\lambda}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{N+1}}}$$

d,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \pi_k \text{ a válasz}$$

↑ az időnek π_k-valószínű töltjük abban et álla-pottban, hogy k ...

e,

Ha $\frac{\lambda}{2\mu} < 1$, akkor $\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{N+1} \longrightarrow 0$

Pozitív valószínűséggel előfordulhat, hogy ∞ puffer kell, de ilyet nem lehet, így olyat akarunk amit csak kis valószínűséggel lehet túllépni (most 10^{-8}):

$$\frac{2\mu}{2\mu+\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{N+1} = 10^{-8} \text{ legyen.}$$

Ebből $$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4^{N+1}} = 10^{-8},$$

vagyis $$5\cdot 4^{N} = 10^{8}$$

$$\Downarrow$$

$$N = \log_4\left(\frac{10^8}{5}\right)$$

5.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu_3"] \arrow[r, bend left, "\lambda_3"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu_4"] \arrow[r, bend left, "\mu_4"] & 5
\end{tikzcd}$$

Ebből a generátor mátrix:

$$G = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \ \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Ennek kell a stacionárius eloszlás:

$$G^T = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_0 & -(\lambda_1+\mu_1) & \mu_2 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & -(\lambda_2+\mu_2) & \mu_3 & 0 \ \dots \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$-\lambda_0\Pi_0 + \mu_1\Pi_1 = 0$ -nak kell teljesülnie.

$$\Downarrow$$

$$\Pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\Pi_0$$

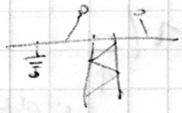
$$\lambda_0\cdot\Pi_0 - (\lambda_1+\mu_1)\Pi_1 + \mu_2\cdot\Pi_2 = 0$$

$$\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\Pi_0$$

$$\cancel{\lambda_0\Pi_0} - \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1}\Pi_0 - \cancel{\lambda_0\Pi_0} + \mu_2\Pi_2 = 0$$

$$\Pi_2 = \frac{\lambda_0\cdot\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\Pi_0$$

Vagyis a stacionárius mértéket egy normáltként fel lehet írni:



$$\Pi_n = \Pi_0\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}$$

Kell:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_n = 1 \text{ legyen}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi_0\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}}_{\text{Csak akkor lehet 1, ha ez a tag } <\infty.} = 1$$

Feltétel stacionárius eloszlás (mérték) létezésére:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty$$

Ez egy általános feltétel.

a, M/M/1

Meg kell mondani: $\lambda_i = ?$

$\mu_i = ?$

M/M/1 $\rightarrow$ $\lambda_i = \lambda$

fix λ és μ van, λ rátával érkeznek be csomagok és μ rátával szolgálják ki.

$\mu_i = \mu$

Bármely csomag érkezik, azt 1 szerver tudja kiszolgálni.

b, M/M/c

c db szerver van.

$\lambda_i = \lambda$, mert a beérkezést nem befolyásolja

$$\mu_i = \begin{cases} i \cdot \mu, \text{ ha } i < c \\ c \cdot \mu, \text{ ha } i \geq c \end{cases}$$

ha nincs az összes szerver betöltve, akkor a ráta mindenkié μ, így $i \cdot \mu$.

Ha többen vannak, akkor várakoznak még kinn.

A feltétellben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{c \cdot \mu} \quad \text{len.}$$

$\Downarrow$

$\exists$ stacionárius eloszlás, ha

bekérkezési ráta $\rightarrow$ $\frac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1$ (ellenkező esetben fenntartható a rendszer).

kiszolgálási ráta $\rightarrow$

c, M/M/1 with balking

$\uparrow$ megijednek a vásárlók, ha túl sok igény van a rendszerben.

$$\lambda_i = \alpha_i \cdot \lambda$$

Amikor i db már benn van, akkor az (i+1)-edik α_i valószínűséggel lép be, $(1-\alpha_i)$-vel elvész.

$$\mu_i = \mu$$

csak attól függ, hogy milyen állapotban vagyunk.

d,

$$\lambda_i = i \cdot \lambda + a$$ $\leftarrow$ bevándorlási ráta

$$\mu_i = i \cdot \mu$$

$\uparrow$ i ember van, milyen rátával csökken a létszám

~~Ha i db~~