---

1. feladat (24 pont)

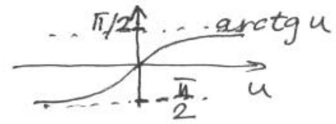
$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{5}{x-4}$$

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = ?$, $\quad \lim\limits_{x \to 4\pm0} f(x) = ?$, $\quad f'(x) = ?$
A fenti eredmények ismeretében vázlatosan ábrázolja az f függvényt (f'' vizsgálata nélkül)!

b) Adjon meg egy intervallumot, melyen f invertálható! (Indokoljon!)
$f^{-1}(x) = ?$, $\quad D_{f^{-1}} = ?$

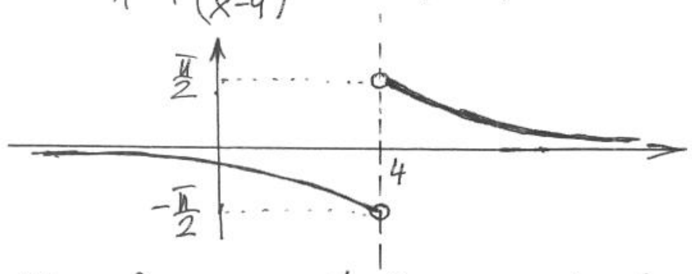
a.) $\boxed{14}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{5}{x-4} = \operatorname{arctg} 0 = 0$ (2)



$\lim\limits_{x \to 4\pm0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{5}{\underbrace{x-4}_{\to \pm 0}}}_{\to \pm\infty} = \pm\frac{\pi}{2}$ (2+2)

$f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{5}{x-4}\right)^2} \; 5 \cdot \dfrac{-1}{(x-4)^2}$ (4) $\quad x \neq 4$



(4)

b.) $\boxed{10}$ $I = (4, \infty)$ -en $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ szigorúan monoton csökken $\Rightarrow \exists f^{-1}$ (3)

(Hasonlóan jó lenne $(-\infty, 4)$ is, sőt a teljes értelmezési tartományban is invertálható.)

Tehát $I = (4, \infty)$, itt $R_f = (0, \frac{\pi}{2})$ (1)

$y = \operatorname{arctg} \frac{5}{x-4} \Rightarrow \frac{5}{x-4} = \operatorname{tg} y \Rightarrow x = 4 + \frac{5}{\operatorname{tg} y}$

$x \Leftrightarrow y$: $\quad f^{-1}(x) = 4 + \frac{5}{\operatorname{tg} x}$ (4)

$D_{f^{-1}} = R_f = (0, \frac{\pi}{2})$ (2)

2. feladat (15 pont)

a) Írja le a derivált definícióját, majd ennek alapján számolja ki az $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ függvény $x_0 = 2$ pontbeli deriváltját!

b) Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{ha } x \geq 2 \\ ax + b\,, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az $x_0 = 2$ pontban!

a.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ (2)

$\boxed{8}$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3(2+h)-5} - 1}{h} \ (2) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+3h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-(1+3h)}{h(1+3h)} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \frac{-3}{1+3h} = -3 \quad (4)$$

b.) g-nek folytonosnak kell lennie $x=2$-ben:

$\boxed{7}$

$$\left.\begin{aligned} g(2+0) &= g(2) = f(2) = 1 \\ g(2-0) &= ax+b\big|_{x=2} = 2a+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2a+b = 1 \quad (3)$$

És kell: $g'_+(2) = g'_-(2)$:

$$\left.\begin{aligned} g'_+(2) &= f'(2) = -3 \quad (a.)\text{-ból} \\ g'_-(2) &= (ax+b)'\big|_{x=2} = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -3$$

és $2a+b=1$ miatt $b=7$

(4)

3. feladat (12 pont)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3/x^4}\,, & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{3x}\,, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Milyen típusú szakadása van f-nek az $x = 0$ pontban?

b) Írja fel a deriváltfüggvényt $x \neq 0$ esetére!

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0} e^{\overbrace{-3/x^4}^{\to -\infty}} = 0 \quad (2)$$

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin \pi x}{\underbrace{\pi x}_{1}} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

} véges ugrás (elsőfajú szakadás) (1)

an1z2101111/2.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-\frac{3}{x^4}} \quad (-3)(-4)x^{-5}, & ha\ x<0 \quad (3) \\ \dfrac{\pi(\cos \pi x)\cdot 3x-(\sin \pi x)\cdot 3}{(3x)^2}, & ha\ x>0 \quad (3) \end{cases}$$

4. feladat (12 pont)

$$f(x) = \left(2+x^2\right)^{3x}$$

a) $f'(x) = ?$

b) Írja fel az $x=0$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

a.) $\boxed{8}$

$$f(x)= e^{\ln(2+x^2)^{3x}} = e^{3x\ln(2+x^2)} \quad (2) \qquad D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)= e^{3x\ln(2+x^2)}\cdot\left(3x\cdot\ln(2+x^2)\right)' =$$

$$= (2+x^2)^{3x}\left(3\cdot\ln(2+x^2)+3x\,\frac{2x}{2+x^2}\right) \quad (6)$$

b.) $\boxed{4}$

$$y_é = f(0)+f'(0)(x-0) \quad (2)$$

$$f(0)=1 \ ; \quad f'(0)=3\cdot\ln 2$$

$$y_é = 1+3(\ln 2)\,x \quad (2)$$

5. feladat (25 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(2x^2)}{\operatorname{arctg}(5x^2)} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^3 \ln x^9 = ?$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(3x-1)}{\operatorname{ch}(3x+4)} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2-x+4}}{x} = ?$

a.) $\boxed{6}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sh} 2x^2}{\operatorname{arctg} 5x^2}}_{\frac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}2x^2\cdot 2\cdot 2x}{\frac{1}{1+(5x^2)^2}\cdot 5\cdot 2x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2x}{2x}=1$$

b.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to 0+0}\underbrace{x^3\ln x^9}_{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0+0}\underbrace{\frac{\ln x^9}{\frac{1}{x^3}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=}$$

$$\frac{1}{x^3}=x^{-3}$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x^9}\cdot 9\cdot x^8}{-3x^{-4}} = -3\lim_{x\to 0+0} x^3 = 0$$

$\left(\text{ügyesebben}: \quad (\ln x^9)' = (9 \cdot \ln x)' = 9 \cdot \frac{1}{x}\right)$

c.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(3x-1)}{\operatorname{ch}(3x+4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x-1} - e^{-(3x-1)}}{e^{3x+4} + e^{-(3x+4)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{3x}}{e^{3x}}}_{=1} \frac{e^{-1} - \overbrace{e^{-6x+1}}^{\to 0}}{e^4 + \underbrace{e^{-6x-4}}_{\to 0}} = \frac{e^{-1}}{e^4} = e^{-5}$$

d.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2-x+4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{= \frac{-x}{x} = -1} \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = -1 \cdot \sqrt{9-0+0} = -3$$

6. feladat (12 pont)

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 7 + e^{2x-1}$$

Hol konvex, hol konkáv az f függvény?
Hol van inflexiós pontja?

$f'(x) = -4x + 3 + 2e^{2x-1}$ 3

$f''(x) = -4 + 4e^{2x-1}$ 2

$f''(x) = 4(e^{2x-1} - 1) = 0 \Rightarrow e^{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ 2

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$	
f''	$-$	0	$+$	2
f	∩	infl. pont	∪	3

an1z2101111/4.

Pótfeladatok (csak a 40 pont eléréséig javítjuk ki):

7. feladat (11 pont)

A jobb és bal oldali határértékek kiszámítása után döntsön, hogy hol és milyen szakadása van az alábbi függvényeknek!

$$f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2(x+3)} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} + \frac{1}{x-2}$$

f szakadási helyei: $x=0$ ill. $x=-3$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x^2}_{\to +0}}}_{+\infty} \underbrace{\frac{2(x-3)(x+3)}{x+3}}_{\to -6} = -\infty$$ másodfajú szakadás (2)

$$\lim_{x\to -3} \underbrace{\frac{x+3}{x+3}}_{=1} \underbrace{\frac{2(x-3)}{x^2}}_{\to -\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3}$$ (2) megszüntethető szakadás (elsőfajú szak.) (1)

g-nek csak $x=2$-ben van szakadása:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{x-2}$$ (2)

(4)

$$g(2+0) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \lim_{x\to 2+0} \frac{2}{\underbrace{x-2}_{\to +0}} = +\infty$$

$$g(2-0) = \lim_{x\to 2-0} \underbrace{\frac{1}{-(x-2)} + \frac{1}{x-2}}_{=0} = 0$$

$x=2$-ben másodfajú szakadás van

an1z2101111/5.

8. feladat (9 pont)

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+1)^3 - (x-1)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{x+1-3(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+4}{\underbrace{(x+1)^4}_{>0}} \quad x \neq -1$$

(3)

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,\infty)$	
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	(3)
f	$\nearrow$	szak. hely	$\nearrow$		$\searrow$	(3)

Tehát f szig. mon. nő $(-\infty,-1)$ és $(-1,2)$ intervallumokon,
f szig. mon. csökken a $(2,\infty)$ intervallumon.