A4112022eaaa

2022. november 24., csütörtök 10:14

A4112022...

A4 Valószínűségszámítás — XI. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2022. november 24.

ZH 1. feladat

1) A campus közelében spotolt kutyák száma Poisson eloszlású 3/nap várható értékkel, a kacsáké szintén Poisson, 2/nap várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy

a két nap alatt több, mint 3 kacsát látok? (2p)

b két állat felbukkanása között több, mint egy nap telik el? (állat = kacsa v. kutya) (2p)

c ha 6 órája nem láttam kutyát, még több mint 2 órát kell várnom, míg látok egyet? (2p)

d a 4. kacsa 3 napon belül bukkan fel? (2p)

e ha valaki izgatottságában csak azt tudja elmesélni, hogy 5 állatot látott egy nap alatt, mi a valószínűsége, hogy abból 4 kutya volt? (EXTRA+2p)

$X \sim \text{Poisson}(\lambda=2, t=2)$ $P(X>3) =$

$1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$

$= 1-e^{-4}\left(\frac{4^0}{0!}+\frac{4^1}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}\right)$

b) W (állatok száma) $\sim \text{Poisson}(\lambda = 2+3, t=1)$

$P(W=0) = e^{-5}\cdot\frac{5^0}{0!} = \underline{e^{-5}}$

$Z \sim EXP(\lambda = 5)$

$P(Z>1) = 1-P(Z\le 1) = 1-(1-e^{-5}) = \underline{\underline{e^{-5}}}$

c.) $Y \sim EXP(\lambda = 3)$

egyszerűbb: vagy

$P(Y>\frac{1}{3} \mid Y>\frac{1}{4}) \overset{\text{örökifjúság}}{=} P(Y>\frac{1}{12}) = 1-(1-e^{-\frac{3}{12}}) = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{4}}}}$

d.) $G \sim Erlang(n=4, \lambda=2)$

$P(G<3) = 1-\sum_{k=0}^{3}\frac{(2\cdot 3)^k}{k!}e^{-2\cdot 3}$

Poisson: nem 4 esetek: $\boxed{0,1,2,3}$ $\quad 1-\sum_{k=0}^{3}\frac{(2\cdot 3)^k}{k!}e^{-2\cdot 3}$

e.)

$X \sim Poisson(\lambda=3, t=1) \quad Y \sim Poisson(\lambda=2, t=1)$

$P(X=4 \mid X+Y=5) = ?$

$= \frac{P(X=4 \cap Y=1)}{P(X+Y=5)} = \frac{P(X=4)\cdot P(Y=1)}{P(X+Y=5)} = \frac{\cancel{e^{-3}}\cdot\frac{3^4}{4!}\cdot\cancel{e^{-2}}\cdot\frac{2^1}{1!}}{\cancel{e^{-5}}\frac{5^5}{5!}}$

$= \boxed{\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)}$ Binomiális

ZH 2. feladat

2) Legyen $E(X) = 4$, $D^2(X) = 3$.

a Lehet-e X eloszlása egyenletes/normális/~~exponenciális?~~ (1p)

b A felsoroltak közül melyik eloszlással lesz $P(X > 3)$ a legnagyobb? (4p)

c Konstruálj egy valváltozót, ami a fentieket tudja, de nem a felsorolt eloszlások közül való! (EXTRA+2p)

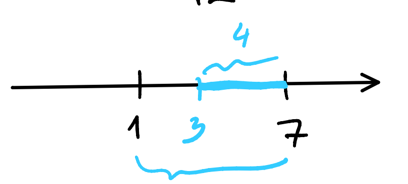
b.) $X \sim Uni(a,b)$ $\quad a,b = ?$ $\quad E(X) = \frac{a+b}{2}$ $\quad D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$4 = \frac{a+b}{2}$ $\quad 3 = \frac{(b-a)^2}{12}$

$8-b = a$ $\quad 36 = (b-(8-b))^2$

$\boxed{a=1}$ $\quad 36 = (2b-8)^2$ $\quad \boxed{b=7}$

$EXP: E(X) = D(X)$



$P(X>3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1-P(X\le 3) = 1-\frac{3-1}{7-1} = \underline{\underline{\frac{4}{6}}}$

$X \sim N(\mu=4, \sigma=\sqrt{3})$

$P(X>3) = 1-P(X\le 3) = 1-P\left(Z\le\frac{3-4}{\sqrt{3}}\right) =$

$P(X>3) = 1-P(X\le 3) = 1-P\left(Z \le \frac{3-4}{\sqrt{3}}\right) =$

$= 1-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\underline{\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}} = 0{,}72$ Normalos > Egyenletes

c.) lehetett konstruálni egy binomot $E(X)=n\cdot p = 4$, $D^2(X) = n\cdot p(1-p) = 3$ meg kell oldani

PL.:

$P(X=0) = p \quad P(X=b) = 1-p$

$E(X) = p\cdot 0 + (1-p)\cdot b \qquad E(X^2) = p\cdot 0^2 + (1-p)\cdot b^2$

$D^2(X) = (1-p)\cdot b^2 - (\underbrace{(1-p)\cdot b}_{16})^2 = 3 \qquad (1-p)\cdot b = 4$

$(1-p)\cdot b^2 = 19$

$4b = 19 \qquad \boxed{b = \frac{19}{4}}$

ZH 3. feladat

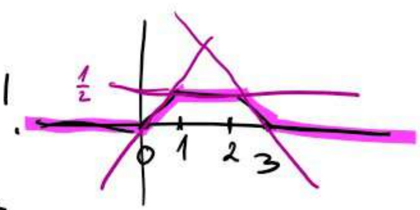
3) Legyen $X \sim \overbrace{Uni(0,1)}^{f(x)=1}$, $Y \sim \overbrace{Uni(0,2)}^{f(y)=\frac{1}{2}}$ függetlenek.

a Mi az $X+Y$ sűrűségfüggvénye ($f_{X+Y}(s)$ konvolúciós függvény)? (6p)

b Mi az együttes sűrűségfv? (2p)

c Mi $|X-Y|$ eloszlása? (EXTRA +3p)

a.) $X \sim Uni(0,1)$, $Y \sim Uni(0,2)$! trapéz !



$0 < X+Y < 3$

$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{f_1(x)\cdot f_2(s-x)}^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\int_0^s \frac{1}{2}\,dx = \frac{s}{2}$

$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}$

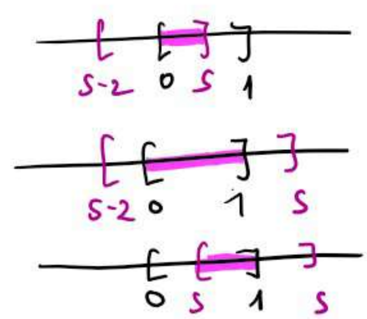
$\int_{s-2}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \frac{3-s}{2}$

$0 < X < 1$

$0 < y < 2 \qquad X \in [0,1] \cap [s-2, s]$

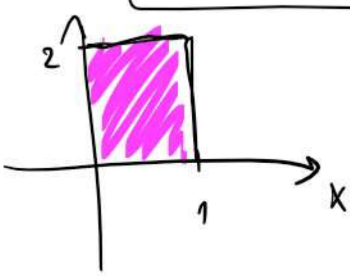
$0 < s-x < 2$

$s-2 < X < s$

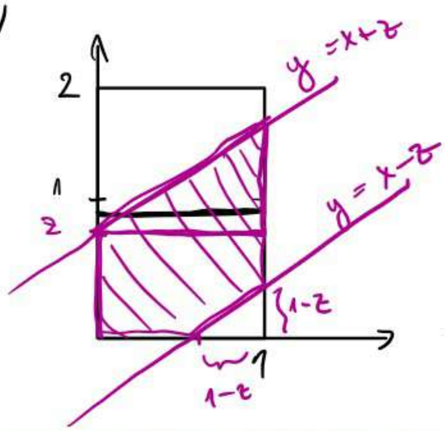


b.) $\boxed{f(x,y) = 1\cdot \frac{1}{2}}$

c.)



c.)



$|X - Y|$ eloszlása?

$P(|X - Y| < z) = ???$

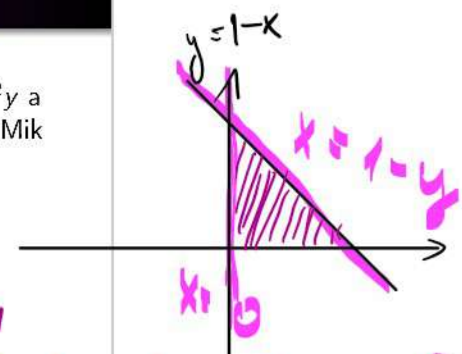
$\boxed{P(|X-Y|<z) = z \cdot 1 - \frac{(1-z)^2}{2} + \frac{1}{2}}$

$-z < x - y < z$

$y < x + z \qquad y > x - z$

ZH 4. feladat

4) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = c \cdot x^2 y$ a $0 < x < 1, 0 < y < 1 - x$ tartományon. Számold ki a c-t. Mik lesznek a peremsűrűségek? (5p)



$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} c \cdot x^2 y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[c \cdot x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{c \cdot x^2 (1-x)^2}{2} \, dx = \int \frac{c \cdot x^2 (1 + x^2 - 2x)}{2} \, dx = \int_0^1 \frac{c (x^2 + x^4 - 2x^3)}{2} \, dx = \frac{c}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = 1 \qquad c = 60$$

$$f_1(x) = \int_0^{1-x} 60 x^2 \cdot y \, dy = \left[60 \cdot x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} = \underline{\underline{30 x^2 (1-x)^2}}$$

$$f_2(y) = \int_0^{1-y} 60 \cdot x^2 \cdot y \, dx = \left[60 \cdot \frac{x^3}{3} \cdot y \right]_0^{1-y} = \underline{\underline{20 (1-y)^3 \cdot y}}$$

ZH 5. feladat

5) A VIK-re minden évben 1000 embert vesznek fel, amiből átlagosan 550 megy át A1-ből az első félévben. Mi a valószínűsége, hogy

a jövőre több, mint 600 átmegy? Add meg formulával (az eloszlás neve és képlete legyen ott) és számold ki a közelítést is! (5p)

b egy véletlenszerűen választott diák negyedik próbálkozásra megy át A1-ből? (1p)

annak a valószínűsége, hogy átmegy A1-ből

a.) **BINOMIÁLIS**

$E(X) = 550 = 1000 \cdot p \Rightarrow \boxed{p = 0{,}55}$

$1-p = 0{,}45$

$$\boxed{P(X>600) = \sum_{k=601}^{1000} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}55^k \cdot 0{,}45^{1000-k}}$$

$D(X) = \sqrt{n \cdot p(1-p)} \approx 15{,}7$

Közelítés: NORMÁLIS

$Y \sim N(\mu = 550, \sigma = 15{,}7)$

$$P(Y > 600{,}5) = P\left(Z > \frac{600{,}5 - 550}{15{,}7}\right) \quad 1 - \Phi\left(\frac{50{,}5}{15{,}7}\right) = 0{,}0007$$

b.) GEOMETRIAI ELOSZLÁS

4.-re átmegy $\boxed{0{,}45^3 \cdot 0{,}55}$

! DEC 7. PÓTZH !