



1. FELADAT. (4+2p)

a) Ismertessük a két konvergens sorozat összegéről szóló tételt és bizonyítsuk is be!

b) Adjuk meg az alábbi határértéket! $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n^3 - n + 2}{-n^3 + 5n^2 - 2n + 1}$

2. FELADAT. (6p) Adjuk meg az alábbi improprius integrál értékét (amennyiben konvergens)!

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(x-2)} dx = ?$$

3. FELADAT. (2+4p)

a) Mikor mondjuk egy egyváltozós függvényről, hogy konkáv egy (a, b) intervallumon?

b) Vizsgáljuk meg konkávitás-konvexitás szempontjából az $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ függvényt! Hol van lokális szélsőértéke és inflexiós pontja?

4. FELADAT. (3+3p)

a) Igazoljuk, hogy egy elsőrendű, lineáris, inhomogén, közönséges differenciálegyenlet két megoldásának különbsége megoldása lesz az egyenlethez tartozó homogén egyenletnek!

b) Adjuk meg az $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

5. FELADAT. (3+3p)

a) Adjuk meg a numerikus sorok konvergenciájának egy szükséges feltételét, és igazoljuk is azt!

b) Döntsük el, hogy konvergens vagy divergens az alábbi

sor! $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^5 + 1}}$

6. FELADAT. (3+3p)

a) Hogyan értelmezzük egy x_0 pontban tetszőlegesen sokszor deriválható függvény Taylor-sorát!

b) Adjuk meg az $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sora x^6 -os tagjának együtthatóját!

7. FELADAT. (3+3p)

a) Mikor mondjuk egy kétváltozós függvényről, hogy lokális minimuma van egy (x_0, y_0) pontban?

b) Hol és milyen lokális szélsőértéke van az alábbi függvénynek?

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3 y}{3} + 9y$$

8. FELADAT. (3-3p)

a) Egy ábrán szemléltetve adjuk meg a gömbi koordináták jelentését! Írjuk fel ezen koordinátákkal a szokásos Descartes-koordinátákat!

b) Adjuk meg az $f(x, y, z) = z^2$ függvény integrálját az origó középpontú, 3 sugarú gömb pozitív térfelcsojba ($x, y, z \geq 0$) eső részére!

9. FELADAT. (4+2p) Adjuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$$

2π -periodikus függvény Fourier-sorában a $\sin(3x)$ -es tag együtthatóját! Mekkora lesz a Fourier-sor összege az $x = 0$ pontban?