1. feladat (10 pont)
Írja fel az

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 4y \ , \qquad \frac{dy}{dt} = 9x - 2y$$

differenciálegyenlet-rendszer együttható mátrixának sajátértékeit, sajátvektorait valamint a differenciálegyenlet-rendszer összes megoldását!

$$\underline{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underline{x} \qquad \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 9 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 36 = 0 \quad (2)$$

$$2 + \lambda = \pm 6 \implies \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -8 \quad (1)$$

$$\underline{s}_1: \quad (\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}}) \underline{s}_1 = \underline{0} \quad (1) \qquad \begin{array}{cc|c} -6 & 4 & 0 \\ \cancel{9} & \cancel{-6} & \cancel{0} \end{array} \qquad -3s_{11} + 2s_{12} = 0$$

$$s_{12} := 3, \ s_{11} = 2$$

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{s}_2: \quad (\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}}) \underline{s}_2 = \underline{0}$$

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 0 \\ \cancel{9} & \cancel{6} & \cancel{0} \end{array} \qquad 3s_{21} + 2s_{22} = 0; \quad s_{22} := 3, \ s_{21} = -2$$

$$\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2. feladat (12 pont)
Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és határozza meg azok konvergencia sugarait!

$$f(x) = (1+x)^{-1/5} \ , \qquad g(x) = (1+3x^2)^{-1/5}$$

$g^{(5)}(0) = ?$, $\quad g^{(6)}(0) = ?$

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} u^n \ ; \quad R = 1 \quad \text{felhasználásával:}$$

$$f(x) = (1+x)^{-1/5} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} x^n \ (2); \qquad R_1 = 1 \ (1)$$

$$g(x) = (1+3x^2)^{-1/5} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} (3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} 3^n x^{2n} \quad (2)$$

$$|3x^2| = 3|x|^2 < 1 \implies |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \implies R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

an2 v10506091/1.

$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ felhasználásával:

$g^{(5)}(0) = 5!\, a_5 = 0$ (1), mert $a_5 = 0$ (1) (nincsenek páratlan hatványok a sorban)

$g^{(6)}(0) = 6!\, a_6 = 6! \binom{-1/5}{3} 3^3 = 6! \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)}{3!} 3^3$ (1) (2)

3. feladat (18 pont)

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(x^2 y\right), \qquad x_0 = 1, \quad y_0 = -1$$

a) Totálisan differenciálható-e f az adott pontban?
grad $f(x_0, y_0) = ?$

b) Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintő síkja egyenletét!

c) A $g(u,v)$ függvényt az f függvényből

$$x = u^5 v + e^{uv} + u^4 + v^7, \qquad y = u^3 + 7v^6 - \cos(uv)$$

helyettesítéssel kapjuk. Az összetett függvény deriválási szabályának felhasználásával határozza meg g-nek az $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ pontbeli, v szerinti parciális deriváltját!

$\boxed{6}$ a.) $f'_x = \frac{1}{1+(x^2y)^2}\, 2xy$ (1), $f'_y = \frac{1}{1+(x^2y)^2}\, x^2$ (1) } mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow$ mindenütt totálisan deriválható, tehát mindenütt létezik a gradiens(i

(Vagy f'_x, f'_y $\exists$ és folytonos $K_{(x_0,y_0)}$-ban $\Rightarrow$ f tot. deriválható (x_0,y_0)-ban)

$\operatorname{grad} f(1,-1) = f'_x(1,-1)\,\underline{i} + f'_y(1,-1)\,\underline{j}$ (1) $= -\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{j}$ (1)

$\boxed{4}$ b.) $f'_x(1,-1)(x-1) + f'_y(1,-1)(y+1) - (z - f(1,-1)) = 0$ (2)

$-(x-1) + \frac{1}{2}(y+1) - \left(z - \underbrace{\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\operatorname{arctg}(-1)}\right) = 0$ (2)

$\boxed{8}$ c.) $g'_v(u_0,v_0) = f'_x(x_0,y_0) \cdot x'_v(u_0,v_0) + f'_y(x_0,y_0) \cdot y'_v(u_0,v_0)$ (2)

$u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $x_0 = x(0,0) = 1$, $y_0 = y(0,0) = -1$ (2)

Tehát $g'_v(0,0) = f'_x(1,-1) \cdot x'_v(0,0) + f'_y(1,-1)\, y'_v(0,0)$ (1)

$x'_v = u^5 + u e^{uv} + 7v^6$ (1) $x'_v(0,0) = 0$

$y'_v = 42 v^5 + u \sin uv$ (1) $y'_v(0,0) = 0$

$g'_v(0,0) = -1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ (1)

4. feladat (10 pont)

A lokális szélsőérték definíciója és szükséges feltétele alapján döntse el, hogy hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van az $f(x,y) = x^3y^4$ függvénynek!

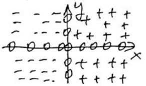
f mindenütt deriválható, tehát lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol $f'_x=0$ és $f'_y=0$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2y^4 = 0 \quad (1)\ (1) \\ f'_y &= x^3\cdot 4y^3 = 0 \quad (1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,y) \text{ és } (x,0) \text{ alakú pontokban}$$

($x=0$, ill. $y=0$ egyenesek) (2)

(Ugyanitt a Hesse determináns nulla lenne, tehát ezek kérdőjeles pontok.)

A függvényérték előjelét vizsgáljuk: (1)



Az $x=0$ és $y=0$ egyenesek pontjaiban: $f(0,y)=0$, $f(x,0)=0$. Tehát az a kérdés, hogy ez a 0 helyettesítési érték lehet-e lokális minimum, illetve maximum.

Az y tengely pontjaiban ($(0,y)$ pontok) nincs lokális szélsőérték, mert a pont minden környezetében a függvény felvesz + és − értéket is. (2)

sz.é.

Az $(x,0)$, $x<0$ pontokban $f(x,0)=0$ lokális (maximum), mert $\exists$ a pontnak olyan környezete, ahol $f(x,y)\le 0$. (1)

Az $(x,0)$, $x>0$ pontokban $f(x,0)=0$ lokális minimum, mert $\exists$ a pontnak olyan környezete, ahol $f(x,y)\ge 0$. (1)

5. feladat (10 pont)

Legyen $\underline{a}$ az m-változós f függvény értelmezési tartományának belső pontja.

A állítás: f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban $\Longrightarrow$ f folytonos $\underline{a}$-ban

B állítás: f folytonos $\underline{a}$-ban $\Longrightarrow$ f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban

Az igaz állítást bizonyítsa be!

Az A állítás igaz, a B hamis.
(1) (1)

Ⓑ $f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}$ (2), ahol $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \to \underline{0}$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$ (1)

$$\underbrace{\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} f(\underline{a}+\underline{h})}_{=\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \left(f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}\right) = f(\underline{a}) \quad (3)$$

Tehát a határérték = a helyettesítési értékkel. (2) ■

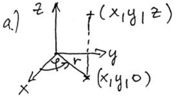
6. feladat (18 pont)*

a) Ismertesse a hengerkoordinátákat és kapcsolatukat a Decartes-féle koordinátákkal!!

b)

$$\iiint_V 2xyz \; \mathrm{d}V = ?$$

$V:\ x^2+y^2 \le z \le 6-x^2-y^2\ ,\ x\ge 0\ ,\ y \ge 0$ egyenlőtlenségekkel adott térrész

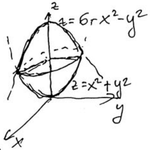
a.) 

Hengerkoordináták: r, φ, z

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

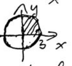
$z = z$ (2)



b.) $z = x^2+y^2$ és $z = 6-x^2-y^2$ metszésvonala:

$x^2+y^2 = 6-x^2-y^2$ (1)

$\Rightarrow x^2+y^2 = 3$ (a $z=3$ síkban)

Tehát a vetületpontok helye:  $x^2+y^2 \le 3$

Hengerkoordinátás transzformációval:

$|J| = r$ (1)

$r^2 \le z \le 6-r^2$ (2) $\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (1) $\quad 0 \le r \le \sqrt{3}$ (1)

$$\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/2}\int_{r^2}^{6-r^2} 2\, r\cos\varphi\ r\sin\varphi\ z\ r \,dz\,d\varphi\,dr = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/2} r^3 \underset{f'}{\cos\varphi}\ \underset{f^1}{\sin\varphi}\ \underbrace{z^2\Big|_{z=r^2}^{6-r^2}}_{(6-r^2)^2-r^4}\, d\varphi\, dr =$$

(1) (2) (2)

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{\left(36r^3 - 12r^5\right)}_{\frac{1}{2}\cdot 12\,(3r^3-r^5)} \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} dr = 6\left(3\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

(1) (2) (1)

$$= 6\left(\frac{3}{4}\cdot 9 - \frac{1}{6}\cdot 27\right) = 6\left(\frac{27}{4} - \frac{27}{6}\right) =$$

(1)

$$= 6\cdot 27\cdot\frac{1}{12} = \frac{27}{2}$$

an2 o10506091/4.

7. feladat (12 pont)*

Írja fel az alábbi komplex számok valós és képzetes részét!

$z_1 = e^j$, $z_2 = e^{-1+\frac{\pi}{6}j}$, $z_3 = \ln(-1)$, $z_4 = \ln(-5+5j)$, $z_5 = \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right)$

$z_1 = \cos 1 + j \sin 1$; $\operatorname{Re} z_1 = \cos 1$, $\operatorname{Im} z_1 = \sin 1$ (2)

$z_2 = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6} + j \sin\frac{\pi}{6}\right)$; $\operatorname{Re} z_2 = e^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{Im} z_2 = e^{-1}\frac{1}{2}$ (2)

$z_3 = \ln|-1| + j \operatorname{arc}(-1) = 0 + j(-\pi)$; $\operatorname{Re} z_3 = 0$, $\operatorname{Im} z_3 = -\pi$ (2)

$z_4 = \ln|-5+5j| + j \operatorname{arc}(-5+5j) = \ln\sqrt{25+25} + j\frac{3\pi}{4}$

$\operatorname{Re} z_4 = \ln\sqrt{50} \left(= \frac{1}{2}\ln 50\right)$

$\operatorname{Im} z_4 = \frac{3\pi}{4}$ (3)

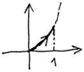
$z_5 = j \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Re} z_5 = 0$, $\operatorname{Im} z_5 = \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$ (3)

8. feladat (10 pont)*

$$\int_L \left(\bar{z}^2 + j\,z\right)\, dz = ?\,,$$

ahol L az $y = x^2$ parabola $x \in [0, 1]$ darabja az origóból irányítva.

$x := t$, $y = t^2$



$z(t) = t + jt^2 \quad t: 0 \to 1$ (2)

$z'(t) = 1 + j2t$ (1)

$f(z) = (x - jy)^2 + j(x + jy) = x^2 - j2xy - y^2 + jx - y = x^2 - y^2 - y + j(x - 2xy)$

$f(z(t)) = \cancel{t^2} - t^4 - \cancel{t^2} + j(t - 2t^3)$ (2)

$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_0^1 \left(-t^4 + j(t - 2t^3)\right)(1 + j2t)\,dt =$ (1) (1)

$= \dots = \int_0^1 \left(3t^4 - 2t^2 + j(t - 2t^3 - 2t^5)\right) dt =$ (1)

$= 3\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + j\left(\frac{t^2}{2} - 2\frac{t^4}{4} - 2\frac{t^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{2}{3} + j\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$ (2)

$\left(= -\frac{1}{15} - j\frac{1}{3}\right)$

Másik megoldás

$I = \underbrace{\int_L \bar{z}^2\,dz}_{\text{paraméterezéssel}} + \underbrace{\int_L jz\,dz}_{j\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{1+j}} = \frac{j}{2}(1+j)^2 = \dots$

an2.v1050609/5.

Pótfeladat (csak az elégséges (és esetleg a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 6y' + 8y = e^{-2x}$$

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$ (1)

(H): $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ (1) $(\lambda-2)(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$ (1)

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$ (2)

$8 \cdot \mid y_{ip} = A e^{-2x}$ (1)

$-6 \cdot \mid y_{ip}' = -2A e^{-2x}$

$1 \cdot \mid y_{ip}'' = 4A e^{-2x}$

$e^{-2x}(8A + 12A + 4A) = e^{-2x}$ (1)

$24A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{24} \Rightarrow y_{ip} = \frac{1}{24} e^{-2x}$ (2)

$y_{iá} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{24} e^{-2x}$ (1)

10. feladat (10 pont)

$$\lim_{x\to 3} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(n(x-3))}{3^{nx} + 27^n}}_{f_n(x)} = ?$$

$f_n \in C^0_{\mathbb{R}}$

$|f_n(x)| \le \frac{1}{27^n}$ (2) és $\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{27}\right)^n$ konv. (geom.) sor $\Rightarrow$ egyenletes a konv. $\mathbb{R}$-en (2)

Az előzőek miatt a sor összegfüggvénye mindenütt folytonos, ezért (2)

$$\lim_{x\to 3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-3)}{3^{nx} + 27^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 3} \frac{\cos n(x-3)}{3^{nx}+27^n} \ (1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{3^{3n}}_{=27^n} + 27^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{27}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{27}}$$

(3)