1. feladat — 10 pont

A komplex számsíkon egy négyzet középpontja $o = 1 + 2\imath$, egyik csúcspontja pedig $a = -1 + \imath$. Adja meg a többi csúcspontot!

Megoldás: Toljuk el a négyzetet úgy, hogy a középpontja az origó legyen! Ekkor az a csúcs eltoltja $a' = a - o = -2 - \imath$, és az eltolt négyzet többi csúcsa $b' = a' \cdot \imath = 1 - 2\imath$, $c' = b' \cdot \imath = 2 + \imath$, és $d' = c' \cdot \imath = -1 + 2\imath$.
Az eredeti négyzet csúcsai $a = -1+\imath$, $b = b'+o = 2$, $c = c'+o = 3+3\imath$ és $d = d'+o = 4\imath$.

2. feladat — 4+6+4 pont

Mondja ki és bizonyítsa be a konvergens sorozatok szorzatáról tanult tételt!

Adjon példát olyan a_n és b_n sorozatokra, melyekre $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ és

(a) $(a_n b_n) \to -2$ (b) $(a_n b_n) \to \frac{1}{2}$ (c) $(a_n b_n) \to \infty$

Megoldás: Tétel: Ha a_n és b_n konvergens, akkor $(a_n b_n)$ is az $\boxed{\textbf{2p.}}$, és ekkor $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

Bizonyítás: Legyen $A = \lim a_n$ és $B = \lim b_n$.
Ha $B = 0$, akkor a_n korlátossága miatt $\lim(a_n b_n) = 0$.
Ha $B \neq 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\dfrac{\varepsilon}{|B|} > 0$, így létezik $N \in \mathbb{R}$ küszöb, melyre ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{|B|}$, és így $|a_n B - AB| < \varepsilon$, ami definíció szerint adja, hogy $\lim(a_n B) = AB$.
$\lim(b_n - B) = 0$ miatt $0 = \lim(a_n(b_n - B)) = \lim(a_n b_n - a_n B) = \lim(a_n b_n) - AB$, ami adja az állítást $\boxed{\textbf{6p.}}$.

(a) $a_n = 2n$, $b_n = -1/n$;

(b) $a_n = n/2$, $b_n = 1/n$;

(c) $a_n = n^2$, $b_n = 1/n$.

3. feladat **4+8+6 pont**

(a) Mondja ki a Bolzano tételt!

(b) Hol és milyen szakadása van az $f(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 - x}$ függvénynek?

(c) Adja meg az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{x^2}\right)$ függvény első és második deriváltját!

Megoldás:

(a) Intervallum folytonos képe intervallum. $\boxed{\textbf{4p.}}$

(b) Folytonos, így csak a nevező zérushelyeiben van szakadás: $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x}\right) = 1 \cdot 1 = 1$, így ez egy megszüntethető szakadás $\boxed{\textbf{3p.}}$.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x}\right) = -\sin(-1) \cdot \infty = \infty$, így ez másodfajú szakadás $\boxed{\textbf{3p.}}$.

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x^2}} e^{x^2} 2x \boxed{\textbf{3p.}} = \dfrac{e^{x^2} 2x}{1+e^{2x^2}}$.

$f''(x) = \dfrac{(e^{x^2}2x2x + e^{x^2}2)(1+e^{2x^2}) - e^{x^2}2xe^{2x^2}4x}{(1+e^{2x^2})^2} \boxed{\textbf{3p.}} = \dfrac{e^{x^2}(4x^2+2) + e^{3x^2}(2-4x^2)}{(1+e^{2x^2})^2}$.

4. feladat **9+3 pont**

Vizsgálja monotonitás és konvexitás szempontjából az

$$f(x) = (x^2+1)e^{x+1}$$

függvényt! $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = ?$

Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2xe^{x+1} + (x^2+1)e^{x+1} = (x^2+2x+1)e^{x+1}$

$0 = f'(x)$ megoldása $x_1 = -1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$f''(x) = (2x+2)e^{x+1} + (x^2+2x+1)e^{x+1} = (x^2+4x+3)e^{x+1}$

$0 = f''(x)$ megoldásai $x_1 = -1$, $x_2 = -3$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{e^{-x-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{-e^{-x-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-x-1}} = 0$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

	$-\infty$	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,-1[$	-1	$]-1,\infty[$	∞	
f	0	↑∪	↑infl.	↑∩	↑infl.	↑∪	∞	**3p.**
f'		+	+	+	0	+		**1p.**
f''		+	0	−	0	+		**1p.**

, vagy

	$-\infty$	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,\infty[$	∞
f	0	↑	↑	↑	∞
f'		+	0	+	

	$-\infty$	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,-1[$	-1	$]-1,\infty[$	∞	
f	0	∪	infl.	∩	infl.	∪	∞	**3p.**
f''		+	0	−	0	+		**2p.**

5. feladat* — 4+8 pont

Mondja ki a Newton-Leibniz-tételt! $$\int_0^{1/2} \frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás: **Tétel:** Ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, és létezik F primitív függvénye is $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ $\boxed{\textbf{4p.}}$.

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\arccos(x))\boxed{\textbf{4p.}}\Big]_0^{1/2} = \ln\frac{3}{2}\ \boxed{\textbf{4p.}}.$$

6. feladat* — 8+8 pont

(a) $\int (2x+1)\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\int \frac{x^3+3x+4}{x^3+2x}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

(a) $$\int \underbrace{(2x+1)}_{f}\underbrace{\mathrm{e}^{2x+1}}_{g'\,\boxed{\textbf{2p.}}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{(2x+1)}_{f}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2}}_{g} - \int \underbrace{2}_{f'}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2}}_{g}\,\mathrm{d}x\boxed{\textbf{3p.}} = (2x+1)\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2} + c\boxed{\textbf{3p.}} = x\mathrm{e}^{2x+1} + c$$

(b) $\frac{x^3+3x+4}{x^3+2x} = 1 + \frac{x+4}{x(x^2+2)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$ Szorozva (x^3+2x)-szel kapjuk, hogy $x+4 = A(x^2+2) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + 2A$, amiből $A=2$, $C=1$ és $B=-2$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$$\int \frac{x^3+3x+1}{x^3+2x}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\boxed{\textbf{2p.}} = x + 2\ln|x| - \ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c\boxed{\textbf{2p.}} = x + 2\ln|x| - \ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

7. feladat* — 10 pont

$t = x^2+1$ helyettesítéssel határozza meg az $\int_0^1 2x^3\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: $x = \sqrt{t-1} \implies \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, így

$$\int_{x=0}^{1} 2x^3\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{t=0^2+1}^{1^2+1\,\boxed{\textbf{2p.}}} 2\left(\sqrt{t-1}\right)^3\sqrt{t}\frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t\boxed{\textbf{2p.}} = \int_1^2 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t^{3/2} - t^{1/2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\left[\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}\boxed{\textbf{2p.}}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{3}\right)\sqrt{2} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)\boxed{\textbf{2p.}}$$

8. feladat* **8 pont**

Mennyi a $[0,2]$ intervallumon az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának ívhossza?

Megoldás: $l = \int\limits_0^2 \sqrt{1 + (\operatorname{ch}' x)^2}\, \mathrm{d}x$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \int\limits_0^2 \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \operatorname{sh} 2$ $\boxed{\textbf{2p.}}$