1. feladat (5+12=17 pont)
a) Adja meg a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ definícióját! (Az x_0 a D_f torlódási pontja.)
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5-3x}{x^2+4x+4} = \infty$!

Mo. *a*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ha minden $P > 0$ számhoz létezik $\delta(P) > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta(P)$ esetén $f(x) > P$. **(5p)**
b) Legyen $P > 0$. Ekkor, ha $|x + 2| < 2$ **(3p)**

$$\frac{5-3x}{x^2+4x+4} = \frac{5-3x}{|x+2|^2} > \frac{5}{|x+2|^2} > P \qquad \textbf{(5p)}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$|x+2| < \sqrt{\frac{5}{P}}, \qquad \textbf{(2p)},$$

így $\delta(P) = \min\left(2, \sqrt{\frac{5}{P}}\right)$. **(2p)**

---

2. feladat (19 pont)
Osztályozza az $f(x) = \dfrac{|x+2|\sin(x^2-3x)}{x^3+x^2-2x}$ függvény szakadási helyeit!

Mo. A függvény az $0, -2, 1$ pontok kivételével folytonos. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2-3x)}{x^2-3x} \cdot \frac{(x-3)|x+2|}{x^2+x-2} = 3 \qquad \textbf{(3p)}$$

így a 0 pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van **(2p)**

$$\lim_{x\to -2\pm} f(x) = \lim_{x\to -2\pm} \frac{|x+2|}{x+2} \cdot \frac{\sin(x^2-3x)}{x^2-x} = \pm\frac{\sin 10}{6} \qquad \textbf{(4p)}$$

így az -2 pontban a függvénynek véges ugrása van **(2p)**

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{|x+2|\sin(x^2-3x)}{x^2+2x} \cdot \frac{1}{x-1} = \mp\infty \qquad \textbf{(4p)}$$

így az 1 pontban a függvénynek lényeges szakadása van **(2p)**

---

3. feladat (18 pont)
Hol differenciálható az $f(x) = 3^{x^2-2} \arcsin \frac{x+3}{4}$ függvény? Határozza meg az érintőegyenesének egyenletét az $x = -1$ pontban!

Mo. $D_f = [-7, 1]$ **(2p)** . $f(-1) = \dfrac{\pi}{18}$ **(2p)**

$$f'(x) = \ln 3 \cdot 2x \cdot 3^{x^2-2} \arcsin \frac{x+3}{4} + \frac{3^{x^2-2}}{\sqrt{16-(x+3)^2}} \qquad \textbf{(5p)}$$

$D_{f'} = (-7, 1)$ **(2p)** . $f'(-1) = \dfrac{-\pi \ln 3}{9} + \dfrac{1}{3\sqrt{12}}$ **(3p)** , így az érintőegyenes egyenlete $y = \left(\dfrac{-\pi \ln 3}{9} + \dfrac{1}{3\sqrt{12}} \right)(x+1) + \dfrac{\pi}{18}$ **(4p)**

---

4. feladat (18 pont)
Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = e^{-2x^2+5x-3}$ függvény konvex, illetve konkáv! Hol vannak a függvény inflexiós pontjai?

Mo. $D_f = \mathbb{R}$, $f''(x) = \left(e^{-2x^2+5x-3}(-4x+5) \right)' = e^{-2x^2+5x-3}((-4x+5)^2 - 4)$ **(6p)** , és $f''(x) = 0$ ha $x = \frac{3}{4}$, $x = \frac{7}{4}$ **(4p)** .

	$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$	$\frac{7}{4}$	$\left(\frac{7}{4}, \infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	infl. p.	$\cap$	infl. p.	$\cup$

(6p)

tehát a függvény konvex a $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ és a $\left[\frac{7}{4}, \infty\right)$ intervallumon, konkáv a $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]$ intervallumon, és a $x = \frac{3}{4}$, $x = \frac{7}{4}$ pontokban inflexiós pontja van **(2p)**

---

5. feladat (9+10+9=28 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{ctg}(5x^3)\mathrm{arctg}(2x^3)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to -1+} (x+1)^{x^2+2x+1}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{ch}(3x+2)}{\mathrm{ch}(5-3x)}$

Mo. a) $\infty \cdot 0$ típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{ctg}(5x^3)\,\mathrm{arctg}(2x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(2x^3)}{\mathrm{tg}(5x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x^2}{1+4x^6}}{\frac{15x^2}{\cos^2(5x^3)}} = \frac{2}{5} \qquad \textbf{(7p)}$$

b) 0^0 típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to -1+} (x+1)^{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1+} \left(e^{\ln(x+1)}\right)^{x^2+2x+1} = e^{\lim_{x\to -1+}(x^2+2x+1)\ln(x+1)} \qquad \textbf{(3p)}$$

és

$$\lim_{x\to -1+}(x^2+2x+1)\ln(x+1) = \lim_{x\to -1+}\frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to -1+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{-2}{(x+1)^3}} = 0 \qquad \textbf{(4p)}$$

tehát a keresett határérték $e^0 = 1$ **(1p)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{ch}(3x+2)}{\operatorname{ch}(5-3x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x+2}+e^{-3x-2}}{e^{5-3x}+e^{3x-5}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}}\cdot\dfrac{e^{2}+e^{-2-6x}}{e^{5-6x}+e^{-5}} = e^7$ **(9p)**

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Igazolja, hogy az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ függvény egyenletesen folytonos az értelmezési tartományán!

Mo. $D_f = \mathbb{R}$. **(1p)** Ha egy függvény deriváltja (létezik és) korlátos (egy $K < \infty$ korláttal), akkor a függvény egyenletesen folytonos **(1p)** , hiszen a Lagrange-féle középérték-tétel szerint:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |(x_2 - x_1)f'(\xi)| \le |x_2 - x_1|K, \qquad x_1, x_2 \in D_f, \xi \in (x_1, x_2)$$

így bármely $\varepsilon > 0$ esetén ha $|x_2 - x_1| < \frac{\varepsilon}{K} = \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. **(2p)**

Esetünkben $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$ **(1p)** korlátos **(1p)** , hiszen folytonos, és $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ **(2p)** . (Egy alkalmas $[-\Omega, \Omega]$ intervallumon kívül $|f'(x)| < \varepsilon$, és az intervallumon belül Weierstrass I. tétele értelmében f' korlátos.)
