# Villamosmérnök A3 (2015 ősz) 3. ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** Oldja meg az $x' = 5x + 4y$, $y' = x + 2y$ differenciálegyenlet-rendszert!

**2.** $\int_F 2r\, df = ?$, ahol $F$ azon $\pi/4$ félnyílásszögű kúp kifelé irányított felszíne, melynek csúcsa az origóban van, szimmetriatengelye a $z$ tengely és alaplapja $0 < R$-ben metszi a $z$ tengelyt.

**3.** $\int_L v\, dr = ?$, ahol $v(x, y, z) = (x^2 + z, y + z + \sin x, x^2 + y + z)$, $L$ pedig az $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ háromszögvonal (ezzel az irányítással).

**4.** $\int_K \frac{1}{z(z^2 - 7z + 10)}\, dz = ?$, ahol $K$ az origó középpontú, 4 sugarú, pozitívan irányított körvonal.

**5.** (a) Van-e olyan $L$ pozitívan irányított zárt görbe a komplex síkon, melyre $\int_L \operatorname{sh}^2 z\, dz = 2\pi j$?

(b) Fejezze ki a $\sin z$ függvényt az exponenciális függvény segítségével!

(c) Periodikus-e a komplex exponenciális függvény, és ha igen, mi az alapperiódusa?

(d) Definiálja a komplex logaritmusfüggvényt és mutassa meg, hogy ez pozitív valós számokra megegyezik a valós logaritmusfüggvénnyel!

# Villamosmérnök A3 (2015 ősz) 3. ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** Oldja meg az $x' = 5x + 4y$, $y' = x + 2y$ differenciálegyenlet-rendszert!

**Megoldás.** Az egyenletrendszer $\underline{\underline{A}} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ mátrixának sajátértékei $0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$ gyökei: $\lambda = 1, 6$. Az 1-hez tartozó egyik sajátvektor $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ magterének egy eleme, pl. $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. A 6-hoz tartozó egyik sajátvektor $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ magterének egy eleme, pl. $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Így a megoldás alaprendszere $e^t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $e^{6t} \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, vagyis az általános megoldás $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} e^t & 4e^{6t} \\ -e^t & e^{6t} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c_1 e^t & 4c_2 e^{6t} \\ -c_1 e^t & c_2 e^{6t} \end{smallmatrix}\right)$.

**2.** $\int_F 2r\, df =?$, ahol $F$ azon $\pi/4$ félnyílásszögű kúp kifelé irányított felszíne, melynek csúcsa az origóban van, szimmetriatengelye a $z$ tengely és alaplapja $0 < R$-ben metszi a $z$ tengelyt.

**Megoldás.** A Gauss-Osztrogradszkij tétel miatt $\int_F 2r\, df = \iiint_V \operatorname{div}(2r)\, dV = \iiint_V 6\, dV = 6 \cdot (\text{a kúp térfogata}) = 6\frac{1}{3}\pi R^3 = 2\pi R^3$, ahol $V$ az $F$ által határolt térrész.

Vagy: a paláston az integrál 0, mert az integrandus merőleges a felületi normálisra. Ezért $\int_F 2r\, df = \int_K 2r\, df$ (ahol $K$ az alaplap) és ezt a felületi integrál definíciója segítségével ki lehet számolni: K egyenlete $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, R)$ ($u \in [0, R]$, $v \in [0, 2\pi]$), amiből $r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, u)$, tehát

$$\begin{aligned}
\int_K 2r\, df &= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r(u,v)(r_u \times r_v)\, dv\, du \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} (2u\cos v, 2u\sin v, 2R)(0, 0, u)\, dv\, du \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2Ru\, dv\, du = \int_0^R 4\pi Ru\, du = 4\pi R[u^2/2]_0^R = 2\pi R^3.
\end{aligned}$$

**3.** $\int_L v\, dr =?$, ahol $v(x, y, z) = (x^2 + z, y + z + \sin x, x^2 + y + z)$, $L$ pedig az $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ háromszögvonal (ezzel az irányítással).

**Megoldás.** Az integrál 0 az $(0, 0, 1)$ $(0, 1, 0)$ és a $(1, 0, 0)$ $(0, 0, 1)$ szakaszokon; az elsőn azért, mert az $x = 0$ síkban halad és $v_2(0, y, z) = v_3(0, y, z)$ miatt $v(0, y, z)$ merőleges a szakasz $(0, -1, 1)$ irányára, a másodikon hasonló okból: a szakasz az $y = 0$ síkban halad és $v_1(x, 0, z) = v_2(x, 0, z)$ miatt $v(x, 0, z)$ merőleges a szakasz $(1, 0, -1)$ irányára. Tehát $\int_L v\, dr = \int_{L_3} v\, dr$, ahol $L_3$ a $(0, 1, 0)$ $(1, 0, 0)$ szakasz. Ennek egy egyenlete $r(t) = (t, 1 - t, 0)$ ($t \in [0, 1]$), ezért

$$\begin{aligned}
\int_{L_3} v\, dr = \int_0^1 v(r(t))\dot{r}(t)\, dt &= \int_0^1 (t^2, 1 - t + \sin t, t^2 + 1 - t)(1, -1, 0)\, dt \\
&= \int_0^1 t^2 + t - 1 - \sin t = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \cos t\Big|_0^1 = \cos(1) - \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

Vagy Stokes-tétellel: $\int_L v\, dr = \int_H \operatorname{rot} v\, df$, ahol $H$ az $L$ által határolt háromszög úgy irányítva, hogy a normálisa felől nézve $L$ irányítása pozitív legyen. $H$ egyenlete $r(u, v) = (v, u, 1 - u - v)$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 1 - u]$, tehát $r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$, következésképp $\operatorname{rot} v = (0, 1 - 2x, \cos x)$ miatt

$$\begin{aligned}
\int_H \operatorname{rot} v\, df &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (0, 1 - 2v, \cos v)(-1, -1, -1)\, dv\, du \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} 2v - 1 - \cos v\, dv\, du = \int_0^1 v^2 - v - \sin v\Big|_0^{1-u} du = \int_0^1 v^2 - v - \sin v\Big|_0^{1-u} du \\
&= \int_0^1 u^2 - u - \sin(1 - u)\, du = u^3/2 - u^2/2 - \cos(1 - u)\Big|_0^1 = \cos(1) - \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

**4.** $\int_K \frac{1}{z(z^2-7z+10)}\,dz = ?$, ahol $K$ az origó középpontú, 4 sugarú, pozitívan irányított körvonal.

**Megoldás.** Legyen $K_0$ és $K_2$ az origó ill. a 2 középpontú, 1/2 sugarú, pozitívan irányított körvonal. Akkor $\int_K \frac{1}{z(z^2-7z+10)}\,dz = \int_{K_0} \frac{\frac{1}{(z-2)(z-5)}}{z}\,dz + \int_{K_2} \frac{\frac{1}{z(z-5)}}{z-2}\,dz = 2\pi j(1/10 - 1/6) = -2/15\pi j$ a Cauchy integrálformula miatt, ami azért alkalmazható, mert $\frac{1}{(z-2)(z-5)}$ holomorf egy $K_0$-t, $\frac{1}{z(z-5)}$ pedig egy $K_2$-t a belsejével együtt tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon.

**5.** (a) Van-e olyan $L$ pozitívan irányított zárt görbe a komplex síkon, melyre $\int_L \operatorname{sh}^2 z\,dz = 2\pi j$?
(b) Fejezze ki a $\sin z$ függvényt az exponenciális függvény segítségével!
(c) Periodikus-e a komplex exponenciális függvény, és ha igen, mi az alapperiódusa?
(d) Definiálja a komplex logaritmusfüggvényt és mutassa meg, hogy ez pozitív valós számokra megegyezik a valós logaritmusfüggvénnyel!

**Megoldás.** (a) Nincs, mert $\operatorname{sh}^2$ holomorf $\mathbb{C}$-n, és így a Cauchy integráltétel miatt $\int_L \operatorname{sh}^2 z\,dz = 0$.
(b) $\sin z = \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$
(c) Igen: $e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y)$ miatt $2\pi j$ periódusa, de minden $\lambda \in (0,1)$-re $2\pi j\lambda$ már nem az, mert akkor speciálisan $e^x = e^{x+j0} = e^{x+j(2\lambda\pi)} = e^x(\cos(2\lambda\pi) + j\sin(2\lambda\pi)) \rightsquigarrow 1 = \cos(2\lambda\pi)$, ami ellentmondás.
(d) $w \neq 0$-ra $\operatorname{Ln} w = \ln|w| + j\arg w$ ($\arg w \in (-\pi,\pi]$), ahol az egyenlőség jobboldalán a valós logaritmusfüggvény áll. Ha $0 < w \in \mathbb{R}$, akkor $|w| = w$ és $\arg w = 0$ miatt $\operatorname{Ln} w = \ln w$.