Sztochasztika vizsga
2012. január 3.
Felsőbb matematika tárgy, Villamosmérnök MSc

Munkaidő: 100 perc

1. (2 pont) Definiálja a lineáris szűrő fogalmát. Mutassa meg, hogy hat a kiindulási folyamat spektrumára a szűrő.

2. (5 pont) Kétfajta instant kávé oldódási idejét tesztelték, melyekből minden alkalommal azonos mennyiséget tettek 1 dl forrásban lévő vízbe. A mért oldódási időket (percben) az alábbi táblázat tartalmazza:

Mokka Makka	0,82	0,50	0,68	0,67	0,58	0,73	0,64	0,78
Koffe In	0,51	0,42	0,34	0,37	0,61	0,47		

Korábbi kísérletekből tudjuk, hogy mindkét kávé oldódási ideje normális eloszlású, és a szórásuk azonos.

A Mokka Makka gyártója azt állítja, hogy terméke semmivel sem oldódik lassabban, mint a Koffe In. Vizsgáljuk meg ezt az állítást 95%-os szinten!

3. (5 pont) Egy város napi energiafogyasztása normális eloszlású ismeretlen σ szórással és (a korábbi tapasztalatok alapján) ismert $m = 20000 kWh$ várható értékkel. A fogyasztásra 6 napon keresztül végeztünk méréseket 20000, 20300, 19800, 19900, 20100, illetve 20200 kWh eredménnyel. Adjunk maximum likelihood becslést σ-ra!

4. (3 pont) Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét. Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.

5. (11 pont) Tekintsük a következő „minél leterheltebb, annál népszerűbb" kiszolgáló rendszert. Egy kiszolgálónk van, amely egyszerre egy igényt szolgál ki. Minden igény kiszolgálása exponenciális eloszlású ideig tart $\mu = 1$ paraméterrel. Ha i igény van benn (ahol $i = 1, 2, \ldots, 6$), akkor a következő igény beérkezéséig exponenciális eloszlású ideig kell várni i paraméterrel (azaz minél nagyobb i, annál kisebb a várakozási idő). Ha 0 igény van benn, akkor a várakozási idő az első beérkezőre szintén exponenciális eloszlású 1 paraméterrel. A pufferben legfeljebb 7 igény tartózkodhat, ebbe beleszámít az az igény is, amelyik éppen kiszolgálás alatt van. Ha 7 igény van benn, akkor az esetleges további beérkező igények elvesznek.

Jelölje $X(t)$ a t időben bent lévő igények számát $t \geq 0$ esetén.

(a) Írjuk fel az $X = (X(t), t \geq 0)$ folytonos idejű Markov-lánc infinitezimális generátorát. Határozzuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixát, továbbá az X tartózkodási idő paramétereit.

(b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását (szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat).

(c) Megközelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy a kezdés után 3000 időegységgel pontosan 7 igény tartózkodik a rendszerben?

(d) Az idő hány százalékában nincs egyetlen igény sem a rendszerben?

(e) A költségráta függvény az i állapotban $i + 1$. Határozzuk meg a kiszolgáló működésének hosszútávú átlagos költségét.

(f) Hosszú működés után ránézve a rendszerre, mi a valószínűsége annak, hogy azt látjuk, hogy 5 időegységen keresztül folyamatosan 6 igény tartózkodik a rendszerben?