IV. előadás

2010. XI. 04.

Generátorfüggvények

Emlékeztető: Ha X egy nemnegatív értékű valváltozó, akkor generátorfgv-e:

$$G_X(z) = P(X=0) + P(X=1)z + P(X=2)z^2 + \dots$$

hatványsor.

A gyakran előforduló valváltozókra generátorfgv-ekkel számolunk.

Alkalmazások

1. ~~Eloszlással~~ Eloszlásra felírt egyenletek megoldása
2. Egyszerű elágazó folyamat

1. Egyenletek eloszlásokra

Van valamilyen valváltozónk, s fel lehet írni a valváltozó eloszlására egy egyenletet a teljes valószínűség tételével.

$X =$ eloszlásban $= g(X)$, ahol g egy véletlen fgv.

$\downarrow$

Ilyenkor sok esetben X generátorfgv-e meghatározható (ha nemnegatív egész értékű, akkor Laplace-transzformáltjára mondjuk ezt. Illetve a karakterisztikus fgv-re is $\to$ meghatározható).

példa: Legyen egy diszkrét idejű kiszolgálórendszer. 2 óraütés kell $\forall$ csomag kiszolgálásáig. $\forall$ óraütésben vagy érkezik egy csomag, vagy nem. Egymástól függetlenek.

A beérkező folyamat: minden időegységben p valószínűséggel érkezik egy csomag és $(1-p)$ valószínűséggel nem érkezik.

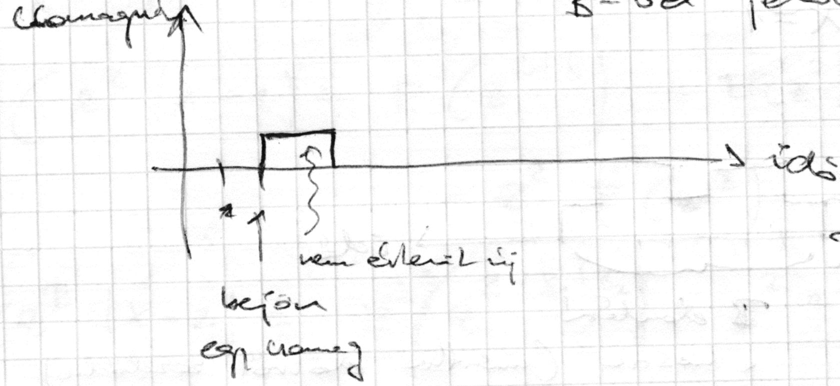
A kiszolgálási idő: $\forall$ csomag kiszolgálása 2 időegységig tart.

A beérkezések egymástól függetlenek.

Ami érdekel minket: mi a foglaltsági idő hosszának eloszlása? (busy period)

$\downarrow$

B-vel jelöljük ezt a hosszat.



$$F(z) = G_B(z) = ?$$

Legyen X = az első csomag kiszolgálása alatt érkezett csomagok száma.

$$G_B(z) = E(z^B) \overset{\substack{\text{A teljes várható}\\ \text{érték tétele } X\text{-re}}}{=}$$

(0, 1, vagy 2 csomag tud érkezni)

$$= E(z^B \mid X=0)\,P(X=0) + E(z^B \mid X=1)\,P(X=1) +$$
$$+ E(z^B \mid X=2)\,P(X=2)$$

X eloszlása ismert: binomiális: Binom$(2, p)$

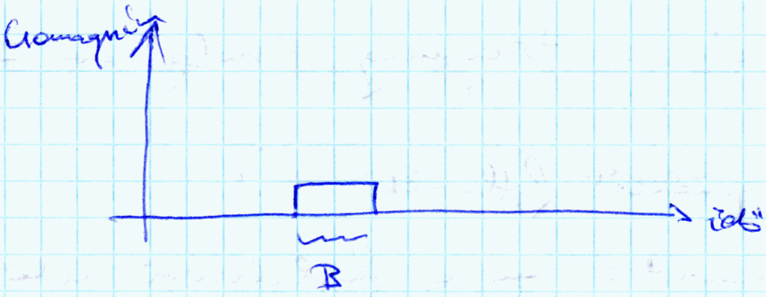
$P(X=0) = (1-p)^2$

$P(X=1) = 2p(1-p)$

$P(X=2) = p^2$

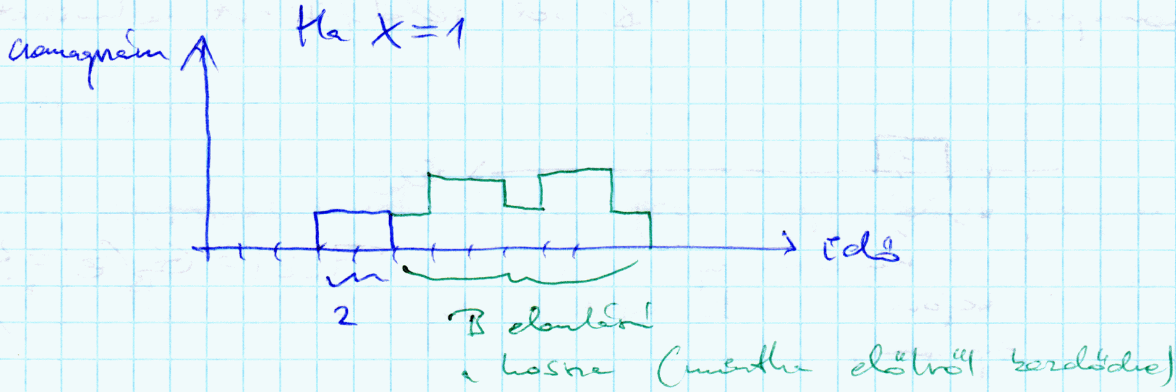
Az $X = i$ feltételek mellett mi lesz B eloszlása?

Ha $X=0$ (nem érkezik be új csomag):

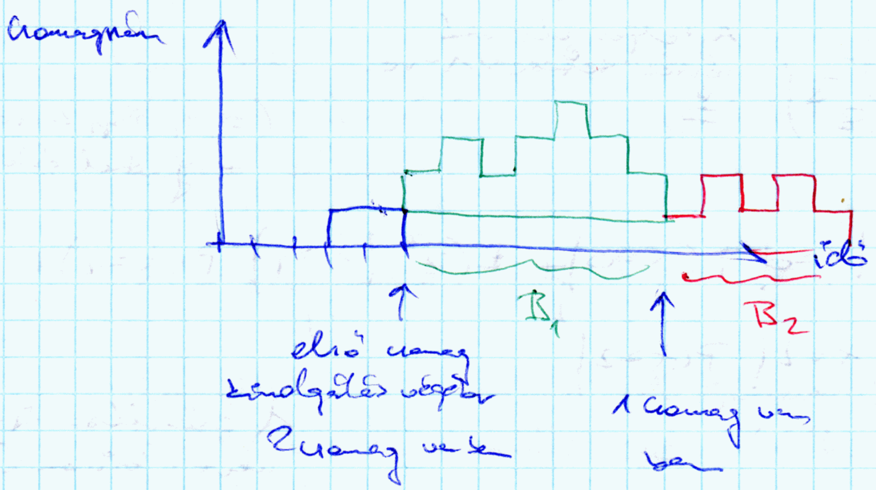


$$(A\ B \text{ eloszlása} \mid X=0) = 2$$

Ha $X=1$



Ha $X=2$:



B_1 és B_2 függetlenek és eloszlásuk megegyezik B eloszlásával.

Összefoglalva:

$(B \text{ eloszlása} \mid X=0) = 2$

$(B \text{ eloszlása} \mid X=1) = 2 + B$ eloszlása

$(B \text{ eloszlása} \mid X=2) = 2 + B_1 + B_2$ eloszlása

$$E(z^B \mid X=0) = E(z^2) = z^2$$

$$E(z^B \mid X=1) = E(z^{2+B}) = E(z^2 \cdot z^B) =$$

$$= z^2 \cdot E(z^B)$$

$$E(z^B \mid X=2) = E(z^{2+B_1+B_2}) = z^2 E(z^{B_1+B_2}) =$$

ezek függetl.-ek

$$= z^2 E(z^B) E(z^B)$$, mert B_1 és B_2 eloszlása ugyanaz.

Vagyis:

$$G_B(z) = E(z^B) = E(z^B \mid X=0) P(X=0) + E(z^B \mid X=1) P(X=1) +$$

$$+ E(z^B \mid X=2) P(X=2) = z^2(1-p)^2 + z^2 G_B(z) 2p(1-p) +$$

$$+ z^2 [G_B(z)]^2 p^2$$

Ebből $G_B(z)$ kifejezhető: ez egy másodfokú egyenlet $G_B(z)$-re.

$G_B(z)$

A megoldás tehát:

$$G_B(z) = \frac{1 - z^2 2p(1-p) - \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p^2 z^2}$$

Ez leírja B eloszlását.

$$E(B) = G_B'(1)$$

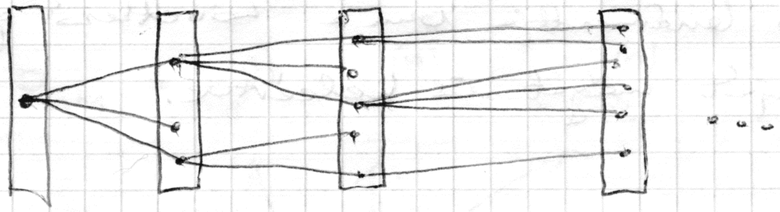
Az X = eloszlásban = $g(X)$ -nek megfelelő alakot:

$$B \overset{\text{eloszlásban}}{=} 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indikátor}}}{I} \{X=0\} + (2+B_\epsilon)\, I\{X=1\} + (2+B_1+B_2)\, I\{X=2\}$$

Ha így fel tudjuk írni, akkor sok esetben fel lehet írni B generátorfgv-ét, Laplace-transzformáltját, karakterisztikus fgv-ét.

② Egyszerű elágazó folyamat

- kép elágazó folyamatokról
- egyszerű elágazó folyamat
- az n-edik generáció nagysága mellere
- kihalási valószínűség



0. generáció 1. generáció 2. generáció 3. generáció

Kérdések:

- mekkora az n-edik generáció (elemszám)
- mi a valószínűsége a kihalásnak
- a kihalásig eltelő ~~lépés~~ idő eloszlása

Modellek, általánosítások:

- az egyedek egymástól függetlenül szaporodnak
- az utódeloszlás függ a populáció méretétől
- kétnemű elágazó folyamat
- a szaporodásig eltelő idő valószínűségi változó (nem egységnyi ideig).
- több típusos elágazó folyamat

<u>Az egynemű elágazó folyamat</u>

↓ önmegtermékenyítés útján szaporodik mindenki

Az utódeloszlás mindenkinek ugyanaz és egymástól ~~függetlenek~~ és az őröktől is függetlenül szaporodnak.

↓

ezek alapján az egészet jellemzi az utódeloszlás: $p_0, p_1, p_2, \ldots$

p_j: azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy j darab leszármazottja van a következő generáció-ban, saját magát is beleértve.

$p_0 = P$(az ág kihal a következő generációban).

$p_1 = P$(nincs leszármazottja, de ő maga megmarad a köv. generációba)

Az n-edik generáció nagysága ill. kihalási valószínűsége az, amit akarunk.

Legyen ~~Z_n~~ $Z_0 = 1$, ahol Z_n = az n-edik generációban az egyedek száma

$$Z_1 = X_1^{(0)}$$ az ős leszármazottai

Legyen $X_i^{(n)}$ $\forall n$-re $\forall i$-re függetlenek és eloszlásuk megegyezik az utódeloszlással.

$X_i^{(n)}$ ← jelenti az n-edik generáció i-edik elemét: hány utóddal járul hozzá az $(n+1)$ edik generációhoz

Ezekkel a jelölésekkel:

$$Z_2 = X_1^{(1)} + X_2^{(1)} + \dots + X_{Z_1}^{(1)}$$

Hasonlóan:

$$Z_{n+1} = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \dots + X_{Z_n}^{(n)}$$

egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak. Véletlen számú tag összege → véletlen összeg.

↓

generátorfgv-nyel tudjuk kezelni

$G_n(z) =$ az n-edik generáció utódszámának (Z_n) generátorfgv-e.

$P(z)$ = a utóddeloszlás generátorfüggvénye.

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

A véletlen tagszámra:

Z_{n+1} generátorfüggvénye:

$$G_{n+1}(z) = G_n(P(z)) =$$

ez egy rekurzió

$$= G_{n-1}(P(P(z))) = ,$$ mert $G_n(z) = G_{n-1}(P(z))$, s ezt helyettesítjük.

$$= G_{n-2}(P(P(P(z)))) = \dots = \underbrace{P(P(\dots P(P(z))))\dots)}_{n+1 \text{ darab } P}$$

Következésképp:

$$\boxed{G_{n+1}(z) = P(G_n(z))}$$

$E(Z_n)$ kiszámítható.

Legyen $m = P'(1)$ az utódeloszlás várható értéke (várhatóan hány utódja lesz egy egyednek).

$$E(Z_n) = G_n'(1)$$

↑ ez egy n-szeresen összetett fgv.

$$\big(f(g(z))\big)' = f'(g(z))\,g'(z)$$

$$G_n'(z)\Big|_{z=1} = \big(P(P(\dots P(z))\dots)\big)'\Big|_{z=1} =$$

$$= P'(\underbrace{P(\dots P(1))\dots}_{n-1})$$

Legyen $m_n = G_n'(1) = E(Z_n)$

$$G_{n+1}'(1) = P'(\underbrace{G_n(1)}_{=1}) \cdot G_n'(1)$$

Így

$$m_{n+1} = \underbrace{P'(1)}_{m} \cdot \underbrace{G_n'(1)}_{m_n}$$

vagyis rekurzív.

$$m_{n+1} = m \cdot m_n = m \cdot m \cdot m_{n-1} = \dots$$

ezt folytatva: $m_n = m^n$

Ha $m > 1$ $\rightarrow$ akkor a várható érték exp. gyorsan nő. Szuperkritikus eset

Ha $m < 1$ $\rightarrow$ akkor exp. gyorsan csökken. Szubkritikus eset.

$m = 1$ $\rightsquigarrow$ kritikus eset.

A kihalás valószínűsége:

- mi a valószínűsége, hogy az n-edik generációban már nincs senki $\rightarrow$ $P(Z_n = 0) = \pi_n$
- mi a valószínűsége, hogy véges időben kihal.

$$P(\exists n : Z_n = 0) = \pi$$

$$G_n(z) = P(Z_n = 0) + P(Z_n = 1) z + \dots$$

$$\text{így } \pi_n = G_n(0)$$

Tekintsünk egy konkrét példát:
legyen az utódok leszármazottjának az utódszám Binom $(2, p)$ eloszlású.

így $p_0 = (1-p)^2$
$\uparrow$
nincs utódja valakinek

$$p_1 = \binom{2}{1} \cdot p(1-p)$$

$$p_2 = p^2 \qquad (2\text{-nél nem lehet több})$$

Ennek a generátorfgv-e (a binomiális tétel):

$$P(z) = (1 - p + pz)^2.$$

Így annak a valószínűsége, hogy a 2. generáció már kihal:

$$\pi_2 = P(Z_2=0) = P(\text{2. generáció kihal}) =$$

$$= P(P(0)) = \left(G_2(0)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$G_2(z) = \left(1-p+p\,(1-p+pz)^2\right)^2$$

Így $\pi_2 = G_2(0) = \left(1-p+p(1-p)^2\right)^2$

A végesidőben kihalás:

$\pi = ?$

$$P(\exists n : Z_n=0) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n=0) =$$

benne van az is, hogy bármely korábbi generációban is meghalhatott.

$$= \lim_{n\to\infty} G_n(0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(G_{n-1}(0)) = P\left(\lim_{n\to\infty} G_n(0)\right)$$

$G_n(0) \to \pi$

$G_{n-1}(0) \to \pi$

Így $\pi = P(\pi)$

a kihalás valószínűsége egy ilyen egyenlet megoldása.

Tétel: Az egyszerű elágazó folyamatban a kihalás valószínűsége.

Legyen adott az utódeloszlás valószínűsége: $P(z)$

A kihalás valószínűsége a $P(z)=z$ fixpont-egyenlet legkisebb megoldása.

$P(z)$ szigorúan monoton nő: $P'(z)>0$, ha $z>0$

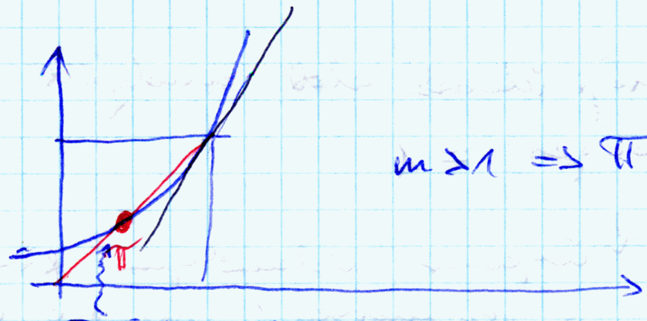
$P(z)$ konvex, mert $P''(z)>0$, ha $z>0$.

$P(1)=1$

$P'(1)=m$ az érintő meredeksége egy az 1-ben m.

3 eset van:

- $m>1$

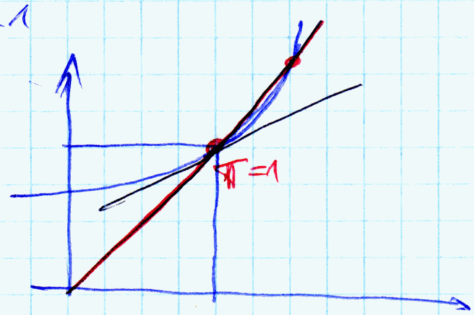


$m>1 \Rightarrow \pi<1$

$P(z)=z$ legkisebb megoldása

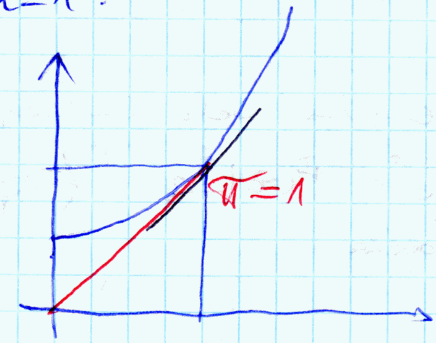
Van olyan eset tehát, hogy sosem hal ki

- $m<1$



$m<1 \Rightarrow \pi=1$, így 1 valószínűséggel véges időben kihal.

• $m=1$:



$m=1 \Rightarrow \pi=1$, vagy
1 valószínűséggel véges
időben kihal.

M/M/1

exp(μ) a kiszolgálásra

Exp(λ) időnként jönnek a csomagok

Milyen paraméter-összeállítás esetén lesz a foglaltsági idő alatt kiszolgált csomagok száma véges 1 valószínűséggel:

P(foglaltsági időnek alatt kiszolgált csomagok száma véges) $= 1$

↓ ilyenkor valamilyen stabilitás van a rendszerben. (pozitív a valószínűsége, hogy egy kiszolgálási folyamat sosem ér véget).