Zárthelyi dolgozat

M.Sc., Analízis C, 2009/2010, I. félév, 2. zh., javító.

1. Definiáljuk a Hankel-transzformáltat és fogalmazzuk meg Nehari tételét.

2. Legyen a szokásos bázisban
$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Határozzuk meg $A^\dagger$ márixát a szokásos bázisban.

3. Egy m tömegű pontszerű átfúrt üveggyöngy surlódás nélkül csúszik az $y = \sin x$ egyenletű dróton homogén (földi) gravitációs térben, ahol y a függőleges koordináta. Vezessük le az x koordinátára vonatkozó mozgásegyenletet a Hamilton-elv segítségével.

4. A D síkbeli origó középpontú egységsugarú zárt körlapon adott $g : \partial D \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre az $u|_{\partial D} = g$ határfeltételnek eleget tévő $u : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény által megadott kitérésű rugalmas membrán potenciális energiája a t időpontban
$$\iint_D \frac{k(x,y)}{2} u^2(x,y,t) - f(x,y,t)u(x,y,t) + p(x,y)\Big(1 + \frac{u_x^2(x,y,t) + u_y^2(x,y,t)}{2}\Big)\, dx\, dy,$$
mozgási energiája pedig
$$\iint_D \varrho(x,y) u_t(x,y,t)\, dx\, dy,$$
ahol k, f, p és ϱ adott függvények, így a Hamilton-elvből az
$$\int_{t_0}^{t_1} \iint_D L(x,y,t,u,u_x,u_y,u_t)\, dx\, dy\, dt \to \text{lok.min.}$$
variációs probléma adódik rá, ahol
$$L(x,y,t,u,u_x,u_y,u_t) = \frac{k(x,y)}{2} u^2(x,y,t) - f(x,y,t)u(x,y,t)$$
$$+ p(x,y)\Big(1 + \frac{u_x^2(x,y,t) + u_y^2(x,y,t)}{2}\Big) - \varrho(x,y)u_t(x,y,t).$$
Írjuk fel a morgásegyenletet.

5. Rugón függő m tömegű tömegpontot a legrövidebb idő alatt meg akarunk állítani, tehát $mh'' = -Dh - mg + w$, ahol D a direkciós erő és w a vezérlés, $|w| \le 1$, továbbá $h(t_0) = h_0$, $h'(t_0) = v_0$, $h(t_1)D + mg = 0$, $v(t_1) = 0$. Írjuk fel a vezérlési egyenleteket, a vezérlési funkcionált, a Pontrjagin-függvényt, az adódó differenciálegyenleteket és a transzverzalitási feltételeket.

6. Határozzuk meg az f függvény Fourier-transzformáltját, ahol $f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$ és nulla egyébként.

2.) $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

A képtér a bővítettal

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \left\| t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\| \rightarrow \min$

~~$b_1 = b_2 = b_3$~~

$x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, $x_3 = b_3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 = x_2 = x_3 \rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = \frac{1}{3}$ a min. miatt

ezzel $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

$r(A) = 1$

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b_1 = 1 \qquad b_2 = 0 \qquad D = [1 \;\; 0]$

$$\underline{\underline{A}}^+ = \underline{D}^T (D \underline{D}^T)^{-1} (\underline{C}^T C)^{-1} \underline{C}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[(1 \; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \left[(1 \; 1 \; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot (1 \;\; 1 \;\; 1) =$$

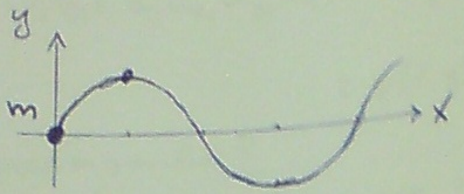
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot [1 \;\; 1 \;\; 1] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A^+ = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

10p

1.

3.)



Hamilton elv:

$H = \cancel{\ } U - K$

$\begin{cases} y = \sin(x) \\ x = x \end{cases}$

$U: \ mgh = mg\sin(x)$

$K: \ \frac{1}{2}mv^2$

$v_y = \cdot \cos(x) \cdot x'$

$v_x = x'$

$v^2 = v_y^2 + v_x^2 = (+\cos(x)\, x')^2 + (x')^2$

$\cancel{H} = \quad L = mg\sin(x) - \frac{1}{2}m\left((\cos^2(x) \cdot x')^2 + (x')^2\right)$

E-L.

$L_x - \frac{d}{dt}(L_{x'}) = 0$

$\cancel{L_x = mg - \frac{1}{2}m(-\sin x) \cdot x'} \quad L_x = mg - \frac{1}{2}m \cdot 2\cos(x) \cdot x' \cdot (-\sin(x)) \cdot x'$

$L_x = mg + m\cos(x) \cdot \sin(x) \cdot (x')^2 = mg + m\frac{1}{2}\sin(2x) \cdot (x')^2$

$L_{x'} = -\left(\frac{1}{2}m \cdot 2(\cos(x) \cdot x') \cdot \cos(x) + \frac{1}{2}m \cdot 2 \cdot x'\right) = -\left(m\cos^2(x) \cdot x' + mx'\right)$

$\cancel{mg} \quad \frac{d}{dt}L_{x'} = -\left(m \cdot 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) \cdot x' + m\cos^2(x)\, x'' + mx''\right)$

Euler - Lagrange:

$mg + \frac{1}{2}m\sin(2x) \cdot (x')^2 + m(-\sin(2x))\, x' + m\cos^2(x)\, x'' + mx''$

ez a mozgásegyenlet.

10p

4.)

$$L(x,y,t,u,u_x,u_y,u_t) = \frac{k(x,y)}{2} u^2(x,y,t) - f(x,y,t)\, u(x,y,t) + p(x,y)\left(1+\frac{u_x^2(x,y,t)+u_y^2(x,y,t)}{2}\right) - \rho(x,y)\, u_t(x,y,t)$$

mozgásegyenlet?

↳ Euler-Lagrange egyenlet

$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha L_{\partial^\alpha u}$ képlet alapján:

a fenti egyenletben csak elsőrendű parc. deriváltak szerepelnek →

$\underline{\underline{m=1}} \rightarrow \alpha$: 0,0,0
1,0,0
0,1,0
0,0,1

$$L_u = \frac{k(x,y)}{2}\, 2u(x,y,t) - f(x,y,t)$$

$$L_{u_x} = p(x,y)\, \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, u_x(x,y,t)$$

$$L_{u_y} = p(x,y)\, \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, u_y(x,y,t)$$

$$L_{u_t} = -\rho(x,y)$$

ezekkel:

az Euler-Lagrange egyenlet:

$$L_u - 1 \cdot \frac{\partial L_{u_x}}{\partial x} - 1 \cdot \frac{\partial L_{u_y}}{\partial y} - 1 \cdot \frac{\partial L_{u_t}}{\partial t} = 0$$

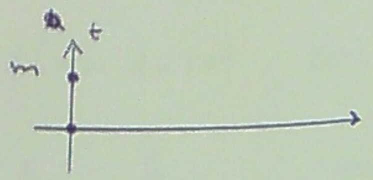
$$k(x,y)\cdot u(x,y,t) - f(x,y,t) - (p_x \cdot u_x + p\, u_{xx}) - (p_y u_y + p\, u_{yy}) - 0 = 0$$

$$k \cdot u - f - (p_x u_x + p\, u_{xx}) - (p_y u_y + p\, u_{yy}) = 0$$

egyenlet a mozgásegyenlet. A változók ugyanazok, mint a feladat kiírásában. A könnyebb átláthatóság miatt hagytam el a jelölést.

10

5.)



$$m h'' = -Dh - mg + w. \quad |w| \leq 1$$

$$h = x_1 \qquad h' = x_2$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \int_{t_0}^{t} x_2 \, dt + h_0 \\ x_2 &= \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{Dh}{m} - g + \frac{w}{m} \right) dt + v_0 \end{aligned}\right\} \text{ vezérlési egyenlet}$$

$$L = \int_{t_0}^{t} 1 \, dt \rightarrow \min \qquad \text{vezérlési funkcionál}$$

$$H = p f - \lambda L = p_1 \cdot x_2 + p_2 \left(-\frac{Dh}{m} - g + \frac{w}{m} \right) - 1 = 0 \qquad \text{Pontrjagin egyenlet.}$$

$$p' = -H_x \qquad p_0' = H_t$$
$$x' = H_p$$

$$p_0' = 0 \qquad x_1' = x_2 \qquad \text{az adódó diff egyenletek}$$
$$p_1' = 0 \qquad x_2' = -\frac{Dh}{m} - g + \frac{w}{m}$$
$$p_2' = -p_1$$

transzverzalitási felt:

$$g_{t_0} = -(\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0$$

7 ~

$$g_{t_1} = -(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = -(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha_1 D$$

6.)

$$f(x) = 1 - |x| \quad , \text{ ha } |x| \leq 1 \text{ , egyébként } 0$$

$$\hat{f}(y) = \int_{-1}^{1} (1-|x|)\, e^{-2\pi i x y}\, dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-2\pi i x y}\, dx + \int_{-1}^{1} |x|\, e^{-2\pi i x y}\, dx =$$

$$= \left[\frac{e^{-2\pi i y}}{-2\pi i y}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{0} -x \cdot e^{-2\pi i x y}\, dx + \int_{0}^{1} x \cdot e^{-2\pi i x y}\, dx =$$

$$= \frac{e^{-2\pi i y} - e^{2\pi i y}}{-2\pi i y} + \underset{Re}{2} \int_{0}^{1} x \cdot e^{-2\pi i x y}\, dx = \frac{\sin 2\pi y}{\pi y} + 2\, \mathrm{Re}\left\{ \int_{0}^{1} x\, e^{-2\pi i x y}\, dx \right\} =$$

$$= \frac{\sin 2\pi y}{\pi y} + 2\, \mathrm{Re}\left\{ \frac{-1}{2\pi i y} \right\} = \frac{\sin 2\pi y}{\pi y} + 2\, \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi y} \cdot i \right\} = \frac{\sin 2\pi y}{\pi y} + 2 \cdot 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{f}(y) = \frac{\sin 2\pi y}{\pi y}}$$

$$\int_{0}^{1} \overset{f}{x}\, \overset{g'}{e^{-2\pi i x y}}\, dx = \left[x \cdot \frac{e^{-2\pi i x y}}{-2\pi i y} \right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} e^{-2\pi i x y}\, dx =$$

$$= \frac{e^{-2\pi i y}}{-2\pi i y} - \left[\frac{e^{-2\pi i x y}}{-2\pi i y} \right]_{0}^{1} = \frac{e^{-2\pi i y}}{-2\pi i y} + \frac{1}{2\pi i y}$$

$$\int_{0}^{1} x \cdot e^{-2\pi i x y}\, dx = \cancel{\frac{e^{-2\pi i y}}{-2\pi i y}} - \cancel{\frac{e^{-2\pi i y}}{-2\pi i y}} - \frac{1}{2\pi i y} = \frac{-1}{2\pi i y}$$

6p