ANALÍZIS(2) — Műszaki Informatika szak

VIZSGADOLGOZAT I. rész

2005. május 26. — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' - 2y'' - 8y' = 8\sin 2x$$

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$

(H): $y''' - 2y'' - 8y' = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 8\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda+2)(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 4$

$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{4x}$ $\quad C_i \in \mathbb{R}$

(I): $y_{ip} = A\sin 2x + B\cos 2x$

$-8\cdot \mid y_{ip}' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

$-2\cdot \mid y_{ip}'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

$1\cdot \mid y_{ip}''' = -8A\cos 2x + 8B\sin 2x$

$\cos 2x(-16A + 8B - 8A) + \sin 2x(16B + 8A + 8B) = 8\sin 2x$

$-24A + 8B = 0 \Rightarrow B = 3A$

$8A + 24B = 8 \qquad 80A = 8 \Rightarrow A = \frac{1}{10}, \ B = \frac{3}{10}$

$y_{ip} = \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{3}{10}\cos 2x$

$y_{iá} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{4x} + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{3}{10}\cos 2x$

an2 v1050526/1

2. feladat (13 pont)

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{2n^2x^2+1}$$

a) Mely x esetén konvergens a függvénysorozat és

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$$

b)

$$||f_n - f|| = ?\,, \qquad \text{ha} \quad x \in [1,4]$$

(uniform norma). Egyenletes-e a konvergencia az $[1,4]$ intervallumon?

a.) $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0 = f(0)$

Ha $x \neq 0$: $\quad f_n(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} = f(x)$

Tehát

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad H = D_f = \mathbb{R}$$

b.) $$||f_n - f||_{[1,4]} = \sup_{x\in[1,4]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,4]} \left| \frac{n^2x^2}{2n^2x^2+1} - \frac{1}{2} \right| =$$

$$= \sup_{x\in[1,4]} \left| \frac{2n^2x^2 - 2n^2x^2 - 1}{2(2n^2x^2+1)} \right| = \sup_{x\in[1,4]} \frac{1}{2(2n^2x^2+1)} = \frac{1}{2(2n^2+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{[1,4]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(2n^2+1)} = 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f \quad [1,4]\text{-en} \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f \quad [1,4]\text{-en}$$

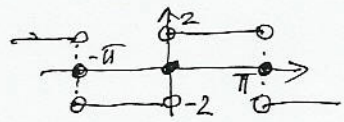
3. feladat (12 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha} \quad x \in (-\pi, 0) \\ 2, & \text{ha} \quad x \in (0, \pi) \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0\,,\ \text{vagy } x = \pi \end{cases} \quad , \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Írja fel az 2π szerint periódikus f függvény Fourier sorát!
Hol állítja elő a Fourier sor a függvényt?

f páratlan $\Rightarrow a_k = 0$, ha $k = 0, 1, 2, \dots$



$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2 \sin kx \, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left. \frac{-\cos kx}{k} \right|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi k} \left(\underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k} - 1 \right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ ps} \\ \frac{8}{\pi k}, & \text{ha } k \text{ ptl.} \end{cases}$$

au2 v1050526/2

A Fourier sor:

$$\frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right) := \phi(x)$$

f monoton $(-\pi, 0)$-án és $(0, \pi)$-n és f korlátos $[-\pi, \pi]$-n

$\Rightarrow$ a Fourier sor mindenütt konvergens.

$\forall$ x-re $f(x) = \phi(x)$, mert a szakadási pontokban

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

4. feladat (13 pont)

Folytonos-e, differenciálható-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{2x^2 + y^2}, \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{és} \qquad f(0,0) = 1$$

$f'_y(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

Pl. $y = x$ egyenes mentén:

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x^2 + x^2}{2x^2 + x^2} = \lim_{x \to 0} 2 = 2 \neq f(0,0) = 1$$

Tehát f nem folytonos $(0,0)$-ban $\Rightarrow$ f nem differenciálható $(0,0)$-ban (szükséges feltétel nem teljesül).

$$f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{k^2}{k^2} - 1}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0$$

5. feladat (10 pont)

Ismertesse és bizonyítsa be a függvénysor egyenletes konvergenciájára vonatkozó Weierstrass kritériumot!

Ⓣ Ha $\exists (b_k)$, hogy $\lvert f_k(x) \rvert \le b_k$; $x \in H$; $k = 0, 1, \dots$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen és abszolút konvergens H-n.

Ⓑ (s_n) uniform normában konvergál s-hez, mert (s_n) uniform normában Cauchy sorozat. Ugyanis

$$\| s_n - s_m \| = \sup_{x \in H} \lvert f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x) \rvert \le \sup_{x \in H} \left(\lvert f_{n+1}(x) \rvert + \dots + \lvert f_m(x) \rvert \right) \le$$

$$\le \sup_{x \in H} \lvert f_{n+1}(x) \rvert + \dots + \sup_{x \in H} \lvert f_m(x) \rvert \le b_{n+1} + \dots + b_m < \varepsilon, \qquad \text{ha } m > n > N(\varepsilon),$$

mert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ teljesíti a Cauchy kritériumot, ugyanis $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens. Ebből következik az abszolút és az egyenletes konvergencia is.

6. feladat (10 pont)*

Hol teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges illetve az elégséges feltétele az

$$f(x,y) = 4x^2 + 8x + 9y^2 - 18y + 1$$

függvény esetén?

$f'_x = 8x + 8$, $f'_y = 18y - 18$

$f'_x = 0 \wedge f'_y = 0$; ha $x = -1$ és $y = 1$. Tehát a $P_1(-1,1)$ pontban lehet lokális szélsőérték.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}$$

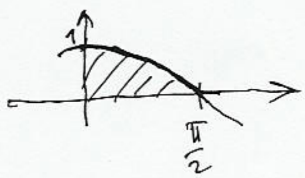
$D(P_1) > 0$ és $f''_{xx}(P_1) > 0$: P_1-ben lokális minimum van.

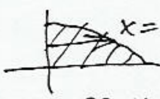
7. feladat (10 pont)*

Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá az alábbi kettősintegrált és az egyik módon számítsa ki:

$$\iint_T y \sin x \, dx \, dy = ?,$$

ha $T : y \leq \cos x$, $y \geq 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$



a.) 

$$\int_0^1 \int_0^{\arccos y} y \cdot \sin x \, dx \, dy$$

b.) 

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x \, dy \, dx$$

a.)-ból : $\int_0^1 y(-\cos x)\Big|_{x=0}^{\arccos y} dy = \int_0^1 \underbrace{y(-y+1)}_{-y^2+y} dy =$

$= -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$

an2 v1050526/4.

Vagy b.)-ből:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{\cos x} dx = \frac{1}{2}(-1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{-\sin x}_{f'}\, \underbrace{\cos^2 x}_{f^2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{\cos^3 x}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}$$

8. feladat (20 pont)*

a) Írja fel az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény $z_0 = j$ körüli azon Laurent sorfejtését, amely $\frac{j}{2}$-ben konvergens!

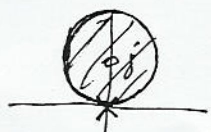
b) $g(z) = \frac{1}{(z-j)^2\, z}$

Mely tartományokon lehet g-t $z_0 = j$ körüli Laurent sor alakban felírni? Határozza meg g-nek azt a Laurent sorát, amelyik $\frac{j}{2}$ - ben konvergens!

c)

$$\operatorname*{res}_{z=j} g(z) = ?\,, \qquad \oint_{|z-j|=3/4} g(z)\ \mathrm{d}z = ?\,, \qquad \oint_{|z-2j|=3/4} g(z)\ \mathrm{d}z = ?$$

a.) $$f(z) = \frac{1}{(z-j)+j} = \frac{1}{j}\,\frac{1}{1-\frac{-(z-j)}{j}} =$$



$$= -j\,\frac{1}{1-j(z-j)} = -j\sum_{n=0}^{\infty}\left(j(z-j)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -j^{n+1}(z-j)^n$$

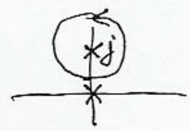
K.T.: $|j(z-j)| = |z-j| < 1$

b.) $$g(z) = \frac{1}{(z-j)^2}\,f(z) = \frac{1}{(z-j)^2}\sum_{n=0}^{\infty} -j^{n+1}(z-j)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -j^{n+1}(z-j)^{n-2}$$

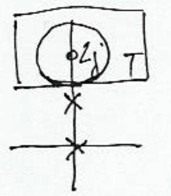
K.T.: $0 < |z-j| < 1$

c.) $$\operatorname*{res}_{z=j} g(z) = c_{-1} = -j^2 = 1$$

$$\oint_{|z-j|=\frac{3}{4}} g(z)\,dz = 2\pi j \operatorname*{res}_{z=j} g(z) = 2\pi j$$



$$\oint_{|z-2j|=\frac{3}{4}} g(z)\,dz = 0,$$ mert g reg T e.ö.t.-n.
(Cauchy-féle alaptétel)



Pótfeladat (csak az elégséges (és indokolt esetben a közepes) jegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = e^{4x-xy^2}, \qquad x_0 = 1, \ \ y_0 = 2$$

Írja fel az f függvény $Q(1,\,2)$-beli gradiensét, amennyiben az létezik!
Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintősíkja egyenletét!

$f'_x = e^{4x-xy^2}\,(4-y^2)$; $f'_y = e^{4x-xy^2}\,(-2xy)$

f'_x, f'_y mindenütt $\exists$ és folytonos $\Rightarrow$ grad f mindenütt $\exists$

$\operatorname{grad} f(1,2) = f'_x(1,2)\,\underline{i} + f'_y(1,2)\,\underline{j} = 0\cdot\underline{i} - 4\underline{j}$

Érintősík

$$f'_x(1,2)\,(x-1) + f'_y(1,2)\,(y-2) - (z - f(1,2)) = 0$$
$$-4\,(y-2) - (z-1) = 0$$

10. feladat (10 pont)
Adja meg az

$$y' = \frac{(y^2-7)}{y\ \sqrt{1+x^2}\ (\operatorname{arsh} x)^4}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!
Van-e az $y(1) = \sqrt{7}$ kezdeti értékhez tartozó megoldása?

$y \equiv \pm\sqrt{7}$ megoldás

Ha $y \neq \pm\sqrt{7}$:

$$\int \frac{y}{y^2-7}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(\operatorname{arsh} x)^4}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2y}{y^2-7}}_{\frac{f'}{f}}\,dy = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,(\operatorname{arsh} x)^{-4}}_{f'\,f^{-4}}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-7| = \frac{(\operatorname{arsh} x)^{-3}}{-3} + C \quad \text{ill.} \quad y \equiv \pm\sqrt{7}$$

$y(1) = \sqrt{7}$: $y \equiv \sqrt{7}$ megoldás halad át az adott ponton.

an2 v1050526/6.