ANALIZIS(2) VIZSGADOLGOZAT I. rész 2004. június 17.

VIK, Műszaki Informatika szak, Munkaidő: 90 perc

BME, Természet Tudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1) Feladat (15 pont).

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 6y' - 16y = e^{-2x}$$

2) Feladat (13 pont).

Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in [-\pi, 0) \\ 1, & \text{ha } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

2π szerint periódikus függvény Fourier sorát és adja meg Φ összegfüggvényének értékét a $\pi/2$ és a π pontokban!

3) Feladat (15 pont).

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2\sqrt{y})}{x}, \quad f(0,y) = 1, \qquad P_1(0,0), \; P_2(1/2, \pi^2)$$

a) Van-e határértéke f-nek a $P_1(0,0)$ pontban?

b) Differenciálható-e f a P_1 illetve a P_2 pontokban?

c) Írja fel az f függvény $P_2(1/2, \pi^2)$-beli gradiensét, amennyiben az létezik!

d) $df((1/2, \pi^2), (dx, dy)) =?$

4) Feladat (17 pont).

a) Írja le a kétváltozós függvény lokális szélsőértékének definícióját valamint szükséges feltételét! Az utóbbit bizonyítsa be!

b) A lokális szélsőérték definíciója és szükséges feltétele alapján döntse el, hogy van-e lokális szélsőértéke az $f(x,y) = x^2y^3$ függvénynek!

*** 5) Feladat (17 pont).**

Igazolja, hogy az alábbi improprius integrál konvergens és számolja ki az értékét polár koordinátákra való áttéréssel!

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx dy = ?$$

*** 6) Feladat (13 pont).**

Az $u(x,y) = y^3 - 3x^2y - y$ függvény egy reguláris komplex függvény valós része. Határozza meg ezt (ezeket) a reguláris függvényeket!

7) Feladat (10 pont).

$$\oint_{|z|=3} \bar{z}\, dz = ?$$

A *-os feladatokból legalább 16 pontot kell elérni!

Pótfeladat. Csak az elégséges, esetleg a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8) Feladat (10 pont).

Igaz-e, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{x + \cos(n^3x^2)}{3^{3n-1}}\, dx \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x + \cos(n^3x^2)}{3^{3n-1}} \right) dx$$

9) Feladat (10 pont).

Írja fel a $f(x) = (1+x)^{-1/4}$ és a $g(x) = (1+5x^2)^{-1/4}$ függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és határozza meg azok konvergencia sugarait! $g^{(6)}(0) =?$

ANALIZIS(2) VIZSGADOLGOZAT I. rész 2004. június 17.
VIK, Műszaki Informatika szak, Munkaidő: 90 perc
BME, Természet Tudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (15 pont).

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 6y' - 16y = e^{-2x}$$

$y'' - 6y' - 16y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$ (1)

$(\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = -2$ (1)

(3) $y_{HA'} = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-2x}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

$y_{ip} = A x e^{-2x}$ (2) (rezonancia)

$y_{ip}' = A e^{-2x} - 2Ax e^{-2x}$ (1)

$y_{ip}'' = -2A e^{-2x} - 2A e^{-2x} + 4Ax e^{-2x}$ (1)

$-10A e^{-2x} = e^{-2x}$ (2)

$A = -\frac{1}{10}$ (1)

$y_{ip} = -\frac{1}{10} x e^{-2x}$ (1)

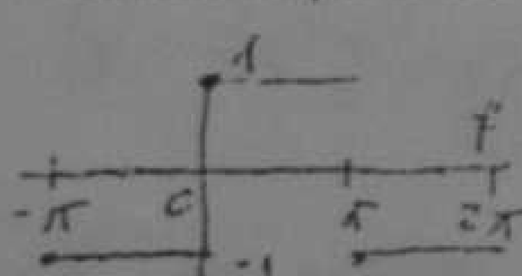
$y_{iA'} = y_{HA'} + y_{ip} = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{10} x e^{-2x}$ (1) (1)

2) Feladat (13 pont).

Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in [-\pi, 0) \\ 1, & \text{ha } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

2π szerint periódikus függvény Fourier sorát és adja meg Φ összegfüggvényének értékét a $\pi/2$ és a π pontokban!



f páratlan $\Rightarrow \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ alakú (2)

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{ptl.}} \underbrace{\sin kx}_{\text{ptl.}}}_{\text{ps.}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} =$ (1) (2) (1)

$= \frac{2}{\pi k} \left(-\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} + 1 \right) = \frac{2}{\pi k} \left((-1)^{k+1} + 1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ ps.} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{ha } k \text{ ptl.} \end{cases}$ (1) (1)

Tehát $k := 2n+1 \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$\Phi(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \ldots \right)$ (2)

Dirichlet tétele alapján: $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ mert f $\frac{\pi}{2}$-ben folytonos (1)

$\Phi(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0$ (1) (1)

+2 pont

3) Feladat (15 pont).

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 \sqrt{y})}{x}, \quad f(0, y) = 1, \quad P_1(0, 0), \quad P_2(1/2, \pi^2)$$

a) Van-e határértéke f-nek a $P_1(0,0)$ pontban?
b) Differenciálható-e f a P_1 illetve a P_2 pontokban?
c) Írja fel az f függvény $P_2(1/2, \pi^2)$-beli gradiensét, amennyiben az létezik!
d) $df((1/2, \pi^2), (dx, dy)) = ?$

a, $\lim\limits_{\substack{x=0 \\ y \to 0}} f(0, y) = 1$ (1)

ha $x \neq 0$

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(x^2 \cdot \sqrt{y})}{x} = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \underbrace{\frac{\sin(x^2 \cdot \sqrt{y})}{x^2 \sqrt{y}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x\sqrt{y}}_{\to 0} = 0$ (3)

Tehát f-nek nincs határértéke P_1-ben (1)

b, f-nek nincs határértéke P_1-ben $\Rightarrow$ f nem folytonos P_1-ben $\Rightarrow$

f nem diff.-ható P_1-ben. (2)

$f_x' = \frac{2x^2 \cdot \sqrt{y} \cos(x^2 \sqrt{y}) - \sin(x^2 \sqrt{y}) \cdot 1}{x^2}$ (2) $x \neq 0$ P_2-ben

$f_y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \cos(x^2 \cdot \sqrt{y})$ (2)

f differenciálható P_2-ben, mert a parciálisok léteznek P_2 egy környezetében és folytonosak P_2-ben. (2)

$f_x'\left(\frac{1}{2}, \pi^2\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \pi \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) 4 = \sqrt{2}(\pi - 2)$ (1)

$f_y'\left(\frac{1}{2}, \pi^2\right) = 2 \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot \pi} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi}$ (1)

$\operatorname{Grad} f\left(\frac{1}{2}, \pi^2\right) = \sqrt{2}(\pi - 2)\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \underline{j}$ (1)

$df\left(\left(\frac{1}{2}, \pi^2\right), (dx, dy)\right) = \sqrt{2}(\pi - 2)\,dx + \frac{\sqrt{2}}{8\pi}\,dy$ (1)

4) Feladat (17 pont).

a) Írja le a kétváltozós függvény lokális szélsőértékének definícióját valamint szükséges feltételét! Az utóbbit bizonyítsa be!

b) A lokális szélsőérték definíciója alapján döntse el, hogy van-e lokális szélsőértéke az $f(x,y)=x^2y^3$ függvénynek!

a, $f(x,y)$-nak lokális maximuma (minimuma) van $P(x_0,y_0)$-ban, ha $\exists\,\delta>0$ úgy, hogy ha $(x,y)\in K_{(x_0,y_0),\delta}$ (2)

akkor $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $\big(f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\big)$

Szükséges feltétel: $f'_x(x_0,y_0)=0$

$f'_y(x_0,y_0)=0$ (2)

Biz. Ha f-nek lokális szélsőértéke van (x_0,y_0)-ban, akkor

x_0-ban $f(x,y_0)$ egyváltozós függvénynek is (2) $\Rightarrow f'_x(x_0,y_0)=0$ (1)

hasonlóan:

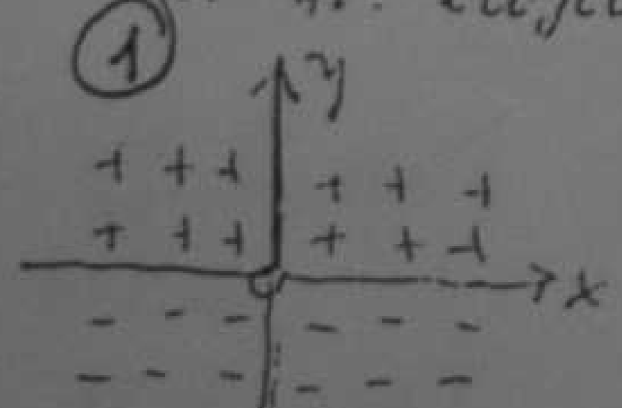
y_0-ban $f(x_0,y)$ egyváltozós függvénynek is $\Rightarrow f'_y(x_0,y_0)=0$ (1)

b, $f'_x=2xy^3=0$ (1) $\Rightarrow$ csak az $x=0$ (1) vagy az $y=0$ (1) egyenes pontjaiban

$f'_y=3x^2y^2=0$ (1) lehet lok. sz.é.

A tengelyek mentén a függvényérték: 0 (1)

(1) A fv. előjele a különböző negyedekben.



Lok. min. van az y tengely pozitív felének pontjaiban. (1)

Lok. max. van az y tengely negatív felének pontjaiban (1)

Az x tengely pontjaiban nincs szélsőérték.

(Az origóban sincs) (1)

5) Feladat (17 pont).

Igazolja, hogy az alábbi improprius integrál konvergens és számolja ki az értékét polár koordinátákra való áttéréssel!

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=?$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\lim_{\delta\to 0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=\delta}^{1}\frac{\ln r}{r}\cdot r\,dr\,d\varphi$$

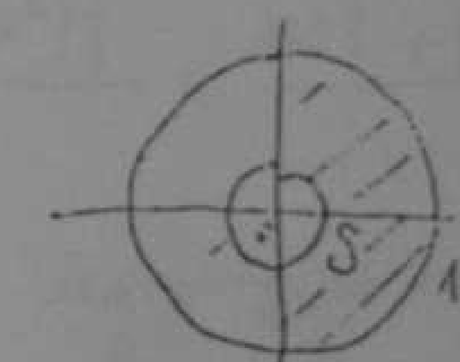
(1) (1) (1) (1) (1)

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$|J|=r$ (1)

$x^2+y^2=r^2$



$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\cdot\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{1}\underbrace{1}_{v'}\cdot\underbrace{\ln r}_{u}\,dr=2\pi\cdot\lim_{\delta\to+0}\big[r\ln r-r\big]_{\delta}^{1}=$$

(1) (1) (3) (1)

$v=r\quad u'=\frac{1}{r}$

$$=2\pi\lim_{\delta\to+0}\Big(\underbrace{\ln 1}_{=0}-1-\underbrace{\boxed{\delta\ln\delta}}_{\text{KISZÁMÍTJUK}\ \to\ 0}+\delta\Big)=-2\pi$$ (1) (2)

$$\lim_{\delta\to+0}\delta\ln\delta=\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\delta}{\frac{1}{\delta}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{1}{\delta}}{-\frac{1}{\delta^2}}=\lim_{\delta\to+0}(-\delta)=0$$ (2)

6) Feladat (13 pont).
Az $u(x,y) = y^3 - 3x^2y - y$ egy reguláris komplex függvény valós része. Határozza meg ezt (ezeket) a reguláris függvényeket!

7) Feladat (10 pont).

$$\oint_{|z|=3} \bar{z}\, dz = ?$$

Pótfeladat. Csak az elégséges, esetleg a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8) Feladat (10 pont).
Igaz-e, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{x+\cos(n^3x^2)}{3^{3n-1}}\,dx\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x+\cos(n^3x^2)}{3^{3n-1}}\right)dx$$

9) Feladat (10 pont).
Írja fel a $f(x) = (1+x)^{-1/4}$ és a $g(x) = (1+5x^2)^{-1/4}$ függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és határozza meg azok konvergencia sugarait! $g^{(6)}(0) = ?$

6, A C-R egyenletek alapján:

$$2\left\{\begin{array}{ll} I. & v_x' = (-u_y') = -3y^2+3x^2+1 \quad 1 \\ II. & v_y' = (u_x') = -6xy \quad 1 \end{array}\right.$$

Két lehetőség van:

a, Az I egyenletből indulunk ki: $V(x,y) = \int -3y^2+3x^2+1\,dx + \varphi(y)$ 1 } 3

$$\underline{L = -3xy^2 + x^3 + x + \varphi(y)} \quad 1$$

$$(-3xy^2+x^3+x+\varphi(y))_y' = -6xy \quad 2$$

$$-6xy + \varphi'(y) = -6xy \quad 1$$

$\varphi(y) = C$ 1 Tehát: $v(x,y) = -3xy^2+x^3+x+C$ $(C\in\mathbb{R})$ 1 } 4

b, A II. egyenletből indulunk ki,

$$V(x,y) = \int -6xy\,dy + \varphi(x) = \underline{-3xy^2 + \varphi(x)}$$

$$(-3xy^2+\varphi(x))_x' = -3y^2+3x^2+1$$

$$-3y^2 + \varphi'(x) = -3y^2+3x^2+1$$

$\varphi(x) = x^3+x+C$ Tehát $v(x,y) = \underline{\underline{-3xy^2+x^3+x+C}}$ $(C\in\mathbb{R})$

Ezért az összes reguláris függvény:

$$\boxed{f(z) = y^3-3x^2y-y + j(-3xy^2+x^3+x+C)} \quad (C\in\mathbb{R}) \quad \boxed{1}$$

$$\oint_{|z|=3} \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} 3e^{-j\varphi}\cdot 3je^{j\varphi}\,d\varphi = 9j\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 18\pi j$$

2 1 1

$z(\varphi) = 3e^{j\varphi}$ 1 $0\le\varphi\le 2\pi$ 1, $\bar{z} = 3e^{-j\varphi}$ 1

$\dot{z}(\varphi) = 3je^{j\varphi}$ 1

$$\oint_L f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt.$$

2

8, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x+\cos(n^3x^2)}{3^{3n-1}}$ egyenletesen konv. a $[0,1]$ intervallumon

mert $\displaystyle\frac{|x+\cos(n^3x^2)|}{3^{3n-1}} \le \frac{|x|+|\cos(n^3x^2)|}{3^{3n-1}} \le \frac{1+1}{3^{3n-1}} = \frac{2}{\frac{27^n}{3}} = \frac{6}{27^n}$

2 1 1 $x\in[0,1]$

és $6\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^n$ konvergens majoráns 2

⇓ WEIERSTRASS TÉTELE

a sor egyenletesen konv. a $[0,1]$ intervallumon, így az összegfv. integrálja a tagok (folytonos függvények) integráljainak összegeként számítható. 2 2

9, $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{4}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{4}}{k}x^k$ 2 $|x|<1$ 1 $R=1$

$g(x) = (1+5x^2)^{-\frac{1}{4}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{4}}{k}(5x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{4}}{k}5^k x^{2k}$

1

$5|x|^2<1$ 1

$|x|<\frac{1}{\sqrt{5}}$ $R=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 1

$g^{(6)}(0) = ?$

Összehasonlítva a Taylor sor ált. alakját a most kapott sorral: (együtthatók egyezése)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{4}}{k}5^k x^{2k}$$

$n=2k$ most $n=6$, tehát $k=3$

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = \binom{-\frac{1}{4}}{3}5^3 \Rightarrow g^{(6)}(0) = 6!\,\underbrace{\frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})(-\frac{9}{4})}{1\cdot2\cdot3}}\cdot 5^3$$

1 1