$\boxed{2008.09.19.}$

Reichard András
V_1 - 513
reich@evt.bme.hu
www.evtc.bme.hu/~reich/
/stuff/reich

PI Belépő-e $u[k] = \varepsilon[k-2]$?
- igen, mert $k<0$-ra $u[k]=0$

Belépő-e $x(t) = \sin 2(t-1)$?
- nem, mert $t<0$-ra $x(t) \neq 0$

Belépő-e $y(t) = \varepsilon(t-1) \sin 2(t-1)$?
- igen

Belépő-e $x[k] = \varepsilon[k+1] \sin 3(k+1)$?
- igen

PI Periodikus-e $\cos(4t+5)$ $\quad x[k+K] = x[k]$
- igen, $\frac{2\pi}{T} = 4 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ $\quad x(t+T) = x(t)$

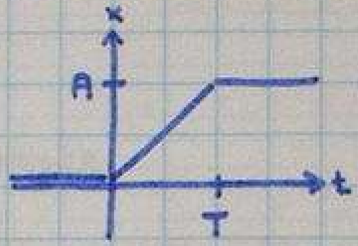
Periodikus-e $\cos 0{,}2k$
- nem, $\frac{2\pi}{L} = 0{,}2 \Rightarrow L = 10\pi$; $\frac{\pi}{N}\cdot 2\pi = L$

Periodikus-e $\cos 0{,}2\pi k$
- igen, $\cancel{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{L} = 0{,}2\pi \Rightarrow L = 10$

~~PI Abt~~

PI Ablakozott jelek:

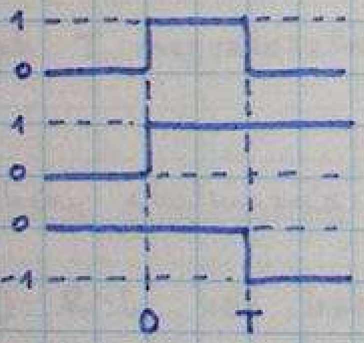
$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ \frac{A}{T}\cdot t, & \text{ha } 0 \leq t < T \\ A, & \text{ha } t \geqslant T \end{cases}$$



$$x(t) = \varepsilon(t-T)A + \frac{A}{T}\cdot t\cdot\left(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right) =$$
$$= \varepsilon(t-T)\cdot A + \frac{A}{T}\cdot t\cdot\varepsilon(t) - \underbrace{\frac{A}{T}\cdot t\cdot\varepsilon(t-T)}_{\downarrow}$$

$$-\frac{A}{T}(t-T+T)\cdot\varepsilon(t-T) = -\frac{A}{T}(t-T)\varepsilon(t-T) -$$
$$\cancel{-\frac{A}{T}\cdot T(\varepsilon(t-T))}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{A}{T}\cdot t\cdot\varepsilon(t) - \frac{A}{T}(t-T)\varepsilon(t-T$$



PI Általánosított derivált:

$$v(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]e^{-\alpha t}$$
$$\varepsilon'(t) = \delta(t)$$
$$\Rightarrow v(t) = \underbrace{\varepsilon(t)e^{-\alpha t}}_{\downarrow} - \underbrace{\varepsilon(t-T)e^{-\alpha t}}_{\downarrow}$$

$$\underbrace{\delta(t)e^{-\alpha t}}_{\delta(t)} + \varepsilon(t)(t\cdot\alpha)e^{-\alpha t} \qquad \underbrace{-\delta(t-T)e^{-\alpha t}}_{-\delta(t-T)e^{-\alpha t}} - \varepsilon(t-T)(t\alpha)e^{-\alpha t}$$

$$v'(t) = (\delta(t) - \delta(t-T))e^{-\alpha T} - \alpha e^{-\alpha t}(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T))$$
$$(\varepsilon(t)e^{-\alpha t})' = \delta(t) - \alpha\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$$
$$[(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\sin\frac{\pi t}{T}]' = [\overbrace{\delta(t)\sin\frac{\pi}{T}}^{0} - \overbrace{\delta(t-T)\sin\frac{\pi}{T}\cdot t}^{0} +$$
$$+ \left(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right)\frac{\pi}{T}\cos\frac{\pi t}{T} = \frac{\pi}{t}\cdot\left(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right)\cos\frac{\pi t}{T}$$

Javítás: $v(t) = \delta(t) - \delta(t-T)e^{-\alpha T} + \ldots$

PI DI rendszer

$$y[k] = 3\cdot k\cdot \sum_{i=0}^{k+1} u[i]$$

a.) lineáris-e?

$$H\{Au_1[k] + Bu_2[k]\} = A\cdot H\{u_1k\} + B\cdot H\{u_2[k]\}$$
$$3k\sum_{i=0}^{k+1}(Au_1[k] + Bu_2[k]) =$$
$$= A\cdot 3k\cdot\sum u_1[k] + B\cdot 3k\cdot\sum u_2[k] \Rightarrow \text{igen}$$

b.) invariáns-e?

$$H\{u(k-L)\} = H\{u(k)\}\big|_{k\leftarrow k-L} = y[k]$$
$$3k\sum_{i=0}^{k+1} u(i-L) \neq 3(k-L)\sum_{i=0}^{k-L+1} u(i) \Rightarrow \text{variáns}$$

c.) kauzalitás-e?

$$\cancel{3k\sum_{i=0}^{k+1}} H\{\varepsilon[k]u[k]\} = 0, \quad k<0$$
$$3k\sum_{i=0}^{k+1} u[i]\,\varepsilon[i] = 3k\sum_{i=0}^{k+1} u[i] \neq 0$$

pl.: $k=-1 \Rightarrow u[0]=2$

$$y[-1] = -3\cdot 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{akauzális}$$

PI $y(t) = u(t-1)\int_{-\infty}^{t} 3u(\tau)d\tau$

a.) lineáris-e?

$$u(t) = Au_1(t) + Bu_2(t)$$
$$[Au_1(t-1) + Bu_2(t-1)]\int_{-\infty}^{t} 3[Au_1(\tau) +$$
$$+ Bu_2(\tau)]d\tau = Au_1(t-1)\int_{-\infty}^{t}[3Au_1(\tau) +$$
$$+ 3Bu_2(\tau)]d\tau = Bu_2(t-1)\int_{-\infty}^{t}[3Au_1(\tau) +$$
$$+ 3Bu_2(\tau)d\tau \Rightarrow \text{nem}$$

b.) Invariancia

$$H\{u(t-T)\} = u(t-T-1)\int_{-\infty}^{t} 3u(\tau-T)d\tau$$
$$q = \tau - T:\ q_{max} = \tau_{max} - T = t-T$$
$$q_{min} = \tau_{min} - T = -\infty$$
$$H\{u(t-T)\} = u(t-T-1)\int_{-\infty}^{t-T} 3u(q)dq = H\{u(t)\}\Big|_{t\leftarrow t-T}$$

$\Rightarrow$ Invariáns

c.) Kauzalitás $\Rightarrow$ kauzális

<u>Konvolúció</u>: $y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i]$

ált. kauzális $\rightarrow$ a jövőbeli gerjesztés nem számít

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i]$$

$\hookrightarrow k-i \leq k \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty\ k} = \sum_{\substack{i=-\infty \\ i=0}}^{k}$ kauzalitás
nem belépő
belépő

~~Wtt~~

$$y(t) = \int_{-\infty\ 0}^{\infty\ t} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty\ 0}^{\infty\ t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$\boxed{?1}$ DI konvolúció: $h[k] = -1{,}5 \cdot 0{,}8^k\, \varepsilon[k] + 2{,}5\, \delta[k]$

$u[k] = \varepsilon[k] \cdot 0{,}6^k$

$u[k]$ adott, belépő

$y[2] = h[2]\, u[0] + h[1]\, u[1] + h[0] \cdot u[2]$

belép, kauz.: $y[k] = \sum_{i=0}^{k} h[k-i]\, u[i] = \sum_{i=0}^{k} \left(-1{,}5\, \varepsilon[k-i]\, 0{,}8^k + 2.5\, \delta[k-i]\right) \cdot 0{,}6^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} -1{,}5 \cdot 0{,}8^{k-i} \cdot 0{,}6^i}_{\star_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k} 2{,}5 \cdot 0{,}6^i \cdot \delta[k-i]}_{\star_2} =$

$$\star_1: -1{,}5 \cdot 0{,}8^k \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{0{,}6^i}{0{,}8^i}}_{\left(\frac{3}{4}\right)^i} = -1{,}5 \cdot 0{,}8^k \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{3}{4}} = -6 \cdot 0{,}8^k \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k\right) = -6 \cdot 0{,}8^k + 4{,}5 \cdot \cancel{0{,}8^k} \cdot \frac{0{,}6^k}{\cancel{0{,}8^k}}$$

$$\star_2: \sum_{i=0}^{k} 2.5 \cdot 0{,}6^i \cdot \delta[k-i] = 2{,}5 \cdot \left(\underbrace{0{,}6^0 \cdot \delta[k] + 0{,}6^1 \cdot \delta[k-1] + \ldots}_{0} + \underbrace{0{,}6^k \cdot \delta[0]}_{0{,}6^k}\right) = 2.5 \cdot 0{,}6^k$$

$$\Rightarrow y[k] = \star_1 + \star_2 = -6 \cdot 0{,}8^k + 4{,}5 \cdot 0{,}6^k + 2{,}5 \cdot 0{,}6^k = \cancel{-6{,}1}\; -6 \cdot 0{,}8^k + 7 \cdot 0{,}6^k$$

$\boxed{2008.\ 09.\ 23.}$ Hiányzik

$\boxed{2008.09.25.}$

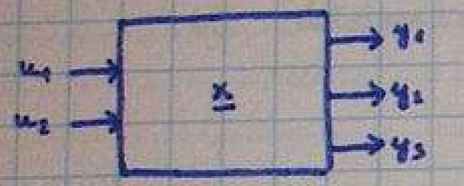
VEGYES TÉMAKÖRÖK

1.) Aszimptotikus stabilitás

def: $u(t) = 0,\ t \geq 0$ és tetszőleges $\underline{x}(+0)$ esetén $\underline{x}(t) \to 0$, ha $t \to \infty$

$$\boxed{\text{Aszimpt. stabilitás} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{G-V stabilitás}}$$

2.) MIMO általánosítás



$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x} + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}$$

3.) Új állapotváltozók bevezetése

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}u$$
$$y = \underline{c}^T\underline{x} + du$$

legyen $\underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{x}$, $\underline{\underline{T}}$ transzformációs mátrix (kvadratikus, invertálható) $\Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{x}}$

$$\Downarrow$$

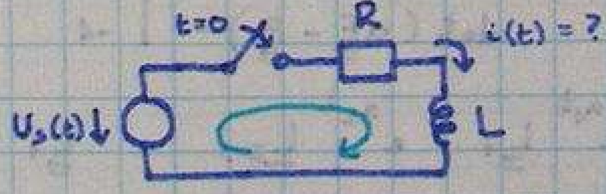
$$\underline{\underline{T}}\,\underline{x}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{\tilde{x}} + \underline{\underline{T}} \cdot \underline{b} \cdot u \qquad \text{de} \quad \underline{\tilde{x}}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{x}'$$
$$y = \underline{c}^T\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{x}} + du$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\tilde{x}}' = \underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{b}}u, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{\tilde{A}}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}, \quad \underline{\tilde{b}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{b}, \quad \underline{\tilde{c}}^T = \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}, \quad \tilde{d} = d$$
$$y = \underline{\tilde{c}}^T\underline{\tilde{x}} + \tilde{d}u$$

pl. T megválasztásával: $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ legyen diagonális

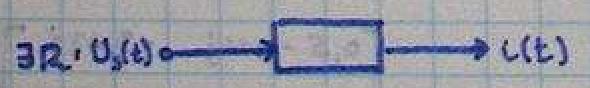
4.) Néhány alkalmazás



$U_s(t) = U_0 = 5V$
$R = 4\Omega$
$L = 20mH$

ⓐ R-L kör bekapcsolása

Kirchoff II. $\Rightarrow \quad -U_s(t) + Ri(t) + L\frac{di}{dt} = 0$



$u \equiv u_s,\ y \equiv i \ \Rightarrow x \equiv i$ $\qquad [\Omega, V, A, mH, ms]$

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -0{,}2\,x(t) + 0{,}05\,u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}\right\} \text{állapotváltozós leírás}$$

$\underline{\underline{A}} = a = -0{,}2$, $\quad \underline{b} = b = 0{,}05$, $\quad \underline{c}^T = c = 1$, $\quad d = 0$

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{x}(-0)}_{=0, \text{ az áramkör még nyitott}} + \int_{-0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)} \cdot \underline{b}u(\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0$$

$\searrow$ helyettesíthető $\int_0^t$-vel, ha nincs δ

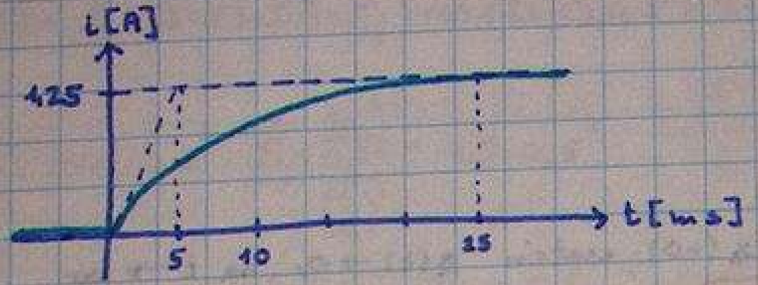
$$\Downarrow$$

$$x(t) = \int_0^t e^{-0{,}2(t-\tau)} \cdot 0{,}05 \cdot 5 \cdot d\tau = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}2t} \int_0^t e^{0{,}2\tau}\,d\tau = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}2t}\left[\frac{e^{0{,}2\tau}}{0{,}2}\right]_0^t =$$

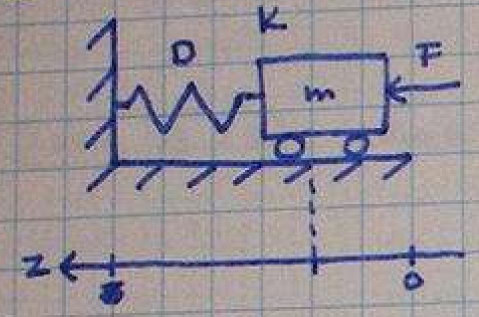
$$= 0{,}25 \cdot e^{-0{,}2t}\left(e^{0{,}2t} - 1\right) = 1.25\left(1 - e^{-0{,}2t}\right)$$

$i(t) = \varepsilon(t) \cdot 1{,}25\left(1 - e^{-0{,}2t}\right)$ [A], [t] = ms időállandó: $\tau = \frac{1}{-0.2} = 5\,ms$

exponenciális fv 5. tagnál lecseng (bár ténylegesen ∞.-nél, már. 5 után elhagyható)



Ⓑ „Csillapított rezgés"



m: tömeg

D: rugóállandó

K: közegellenállási tényező

z: kitérés

F: külső erő

$m = 1\,kg$

$D = 50\,\frac{N}{m}$

$K = 3\,\frac{kg}{s}\ \left[\frac{N}{m/s}\right]$

a) $h(t) = ?$

b) $h(t)$ értelmezése, mérése

b) Mozgásegyenlet: $m \cdot \frac{d^2 z}{d^2 t} = -Dz - K\frac{dz}{dt} + F$, legyen $v = \frac{dz}{dt}$

$$\left.v' = -\frac{K}{m}\cdot v - \frac{D}{m}\cdot z + \frac{1}{m}\cdot F \quad \text{és} \quad z' = v\ \right\}\ \text{állapotváltozós leírás}$$

$$\text{JR: } u \equiv F \longrightarrow \underset{\underline{x} = \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}}{\boxed{}} \longrightarrow y \equiv z \qquad [\text{SI alapegységek}]$$

$$\Rightarrow \quad x_1' = -3x_1 - 50x_2 + u, \qquad x_2' = x_1, \qquad y = x_2$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -3 & -50 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = 0$$

megoldás: $h(t) = \varepsilon(t)\,\underline{c}^T e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{b} + d\,\delta(t)$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = \ldots \qquad \det(\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 50 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 50 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1{,}5 \pm 6{,}9j$$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{\lambda_1 t}\underline{\underline{L}}_1 + e^{\lambda_2 t}\underline{\underline{L}}_2, \qquad \underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_1\underline{\underline{E}}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{-1{,}5+6{,}9j-(-1{,}5-6{,}9j)}\begin{bmatrix} -1{,}5-6{,}9j & -50 \\ 1 & 1{,}5+6{,}9j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5+0{,}11j & 3{,}62j \\ -0{,}07j & 0{,}5-0{,}11j \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{L}}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5-0{,}11j & -3{,}62j \\ 0{,}07j & 0{,}5+0{,}11j \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_1^{*}$$

$$\underline{c}^T \cdot \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}t}}_{\underline{\underline{\phi}}}\,\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{\underline{\phi}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \phi_{21} = e^{\lambda_1 t}(\underline{\underline{L}}_1)_{21} + e^{\lambda_2 t}(\underline{\underline{L}}_2)_{21} =$$

$$= -0{,}07j \cdot e^{(-1{,}5+6{,}9j)t} + 0{,}07j \cdot e^{(-1{,}5-6{,}9j)t} = 0{,}14\,e^{-1{,}5t} \cdot \frac{e^{6{,}9jt} - e^{-6{,}9jt}}{2j} =$$

$$= 0{,}14\,e^{-1{,}5t} \cdot \sin(6{,}9t)$$

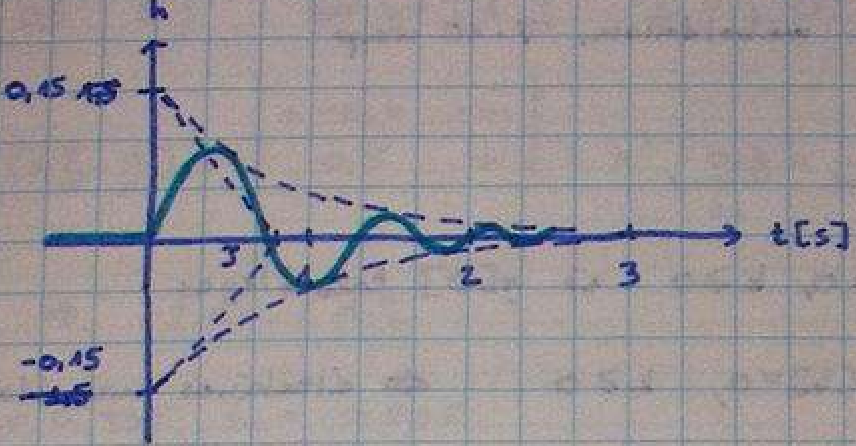
$h(t) = \varepsilon(t) \cdot 0{,}14\,e^{-1{,}5t} \cdot \sin(6{,}9t)$ impulzusválasz

felhasznál: $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow [z] = [F][h][t] \rightarrow [h] = \frac{m}{Ns} = \frac{s}{kg}$

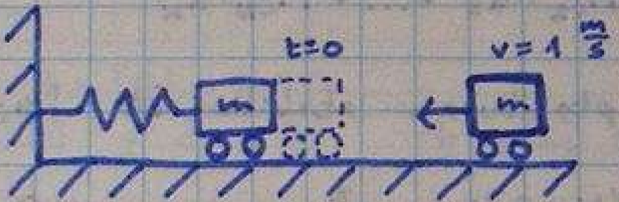
burkolás: ~~z(t)=~~ $z(t) \cdot 0{,}14 \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (\pm 1)$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega \Rightarrow \tau = \frac{1}{-1{,}5} = 0{,}67\,s, \quad \omega = 6{,}9\,\frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}91\,s$$



b.) értelmezés:



$\boxed{2008.09.30.}$ Zh: www.evt.bme.hu

Oktatás → Alapképzés → VIMVA214

8^{15}, ültetési rend

korábbi Zh-t átnéz

konvolúció

eredmeny a weboldalon, 7-10 nap

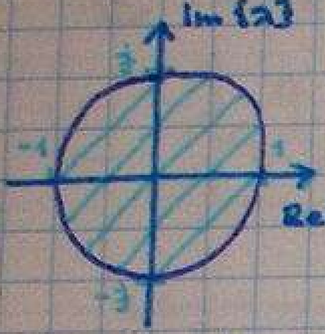
30pont · 4

közös jegy ⇒ 120p

min 53 pont

Aszimptotikus stabilitás vizsgálata:

1.) **DI:** $\lim_{k\to\infty} \underline{x}[k] = \underline{0}$, ha $u[k]=0$, $k \geq 0$ és $\underline{x}[0]$ tetszőleges



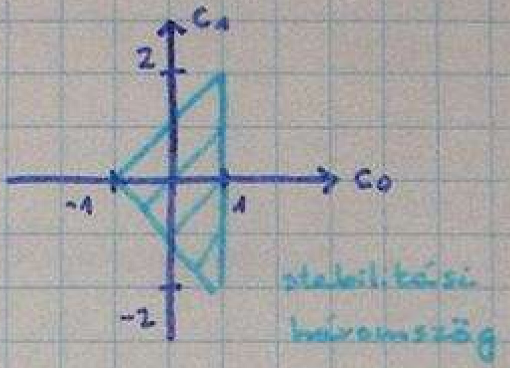
$\underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \cdot x[0]$, ha $u[k]=0$, $k \geq 0$ ⇐ általános megoldási forma

$x_i[k] = M_{i1} \cdot \lambda_1^k + M_{i2} \cdot \lambda_2^k + \ldots + M_{iN} \cdot \lambda_N^k$

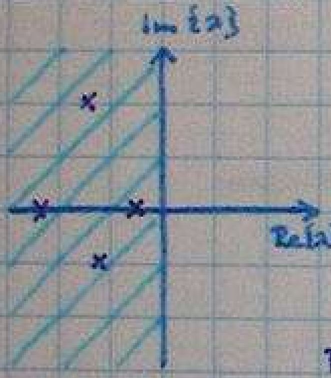
DI rendszer aszimptotikusan stabilis ⇔ $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, N$

⟶ Jury kritérium (N=2): $\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$

$|\lambda_{1,2}| < 1$, ha



2.) **FI:** $\lim_{t\to\infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$, ha $u(t)=0$, $t \geq 0$ és $\underline{x}(0)$ tetszőleges



$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot \underline{x}(0)$, ha $u(t)=0$, $t \geq 0$ ⇐ általános megoldási forma

$x_i(t) = M_{i1} \cdot e^{\lambda_1 t} + M_{i2} \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots + M_{iN} \cdot e^{\lambda_N t}$

$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + j\omega)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{j\omega t}$

FI rendszer aszimpotikusan stabilis ⇔ $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$, $i = 1, \ldots, N$

⟶ Hurwitz kritérium: $\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$

$\mathrm{Re}\{\lambda_{1,2}\} < 0 \iff c_1 > 0, \quad c_0 > 0$

$\boxed{P1}$ FI:

$$x_1'(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t)$$
$$x_2'(t) = -x_1(t) + m \cdot x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) - u(t)$$

m=?, melyben a rendszer stabil (aszimptotikusan)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & m \end{bmatrix} \quad \det(\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 1 & \lambda - m \end{bmatrix} = \lambda^2 + \underbrace{(3-m)}_{c_1}\lambda \underbrace{-3m+2}_{c_0} = 0$$

Hurwitz:

$$\left.\begin{array}{l} 3-m > 0 \rightarrow m < 3 \\ -3m+2 > 0 \rightarrow m < \frac{2}{3} \end{array}\right\} \underline{\underline{m < \frac{2}{3}}}$$

$\boxed{P1}$ O1. $x_1[k+1] = 0{,}4\,x_1[k] + m\cdot x_2[k] + 0{,}8\,u[k]$ a.) $m = ?$ melyben a rendszer stabil

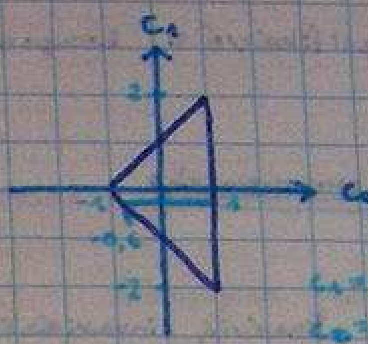
$x_2[k+1] = 0{,}5\,x_1[k] + u[k]$ b.) $m = 1$, $u[k] = \varepsilon[k] \Rightarrow$ válaszjel?

$y[k] = x_2[k]$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & m \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

a.) ~~det~~

$$\det(\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = \begin{vmatrix} \lambda - 0{,}4 & -m \\ -0{,}5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \underbrace{-0{,}4}_{c_1}\lambda \underbrace{-0{,}5m}_{c_0} = 0$$



$c_1 = -0{,}4$

$c_0 = -0{,}5m$

$\Rightarrow -0{,}6 < c_0 < 1$

$-0{,}6 < -0{,}5m < 1$

$-2 < m < 1{,}2$

$$\Rightarrow \quad -2 < m < 1{,}2$$

b.) $\lambda_1 = 0.935$, $\lambda_2 = -0.535$

$u[k] = \varepsilon[k]$

I. $y[k] = \underline{c}^T\cdot\underline{x}[0] + d\cdot\underline{u}[0]$, $k = 0$

$\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{A}}^k\cdot\underline{x}[0] + \underline{c}^T\sum_{i=0}^{k-1}\cdot\underline{\underline{A}}^{k-i-1}\cdot\underline{b}\cdot\underline{u}[i] + d\cdot u[k]$, $k \geq 1$

II. $h[k] = \varepsilon[k-1]\cdot\underline{c}^T\cdot\underline{\underline{A}}^{k-1}\cdot\underline{b} + d\,\delta[k] \rightarrow y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]\cdot u[k-i]$

$$\underline{\underline{A}}^{k-1} = \lambda_1^{k-1}\cdot\underline{\underline{L}}_1 + \lambda_2^{k-1}\cdot\underline{\underline{L}}_2$$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_2\underline{\underline{E}}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 0{,}636 & 0{,}68 \\ 0{,}34 & 0{,}364 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{L}}_2 = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{L}}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}364 & -0{,}68 \\ -0{,}34 & 0{,}636 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T\underline{\underline{A}}^{k-1}\cdot\underline{b} = \underline{c}^T\cdot\underline{\underline{L}}_1\cdot\underline{b}\cdot\lambda_1^{k-1} + c^T\cdot\underline{\underline{L}}_2\cdot b\cdot\lambda_2^{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}636 & 0{,}68 \\ 0{,}34 & 0{,}364 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}34 & 0{,}364 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}636$$

$$h[k] = \varepsilon[k-1]\left\{0{,}636\cdot(0{,}935)^{k-1} + 0{,}364\cdot(-0{,}535)^{k-1}\right\}$$

$k \geq 1$, $y[k] = 0{,}636\cdot\sum_{i=1}^{k} 0{,}935^{i-1} + 0{,}364\cdot\sum_{i=1}^{k}(-0{,}535)^{k-1}$, legyen $m = i - 1$

$$y[k] = 0{,}636\cdot\sum_{m=0}^{k-1} 0{,}935^m + 0{,}364\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(-0{,}535)^m$$

$$y[k] = 0{,}636\cdot\frac{0{,}935^k - 1}{0{,}935 - 1} + 0{,}364\cdot\frac{(-0{,}535)^k - 1}{-0{,}535 - 1}$$

$$y[k] = \varepsilon[k-1]\left\{-9{,}13\cdot(0{,}935)^{k-1} - 0{,}13\cdot(-0{,}535)^{k-1} + 8{,}6\right\}$$

$x_1 = \underline{\underline{A}}_{11}\,x_1[k] + \underline{\underline{A}}_{12}\,x_2[k] + \underline{b}_{11}\,u[k]$

$x_2 = \underline{\underline{A}}_{21}\,x_1[k] + \underline{\underline{A}}_{22}\,x_2[k] + \underline{b}_{21}\,u[k]$

$y[k] = \underline{c}^T_{11}\,x_1[k] + \underline{c}^T_{12}\,x_2[k]$

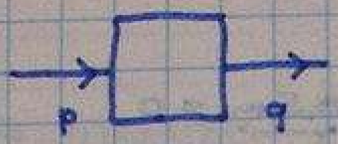
$y[k] = c^T\cdot x[0] + d\cdot u[0]$

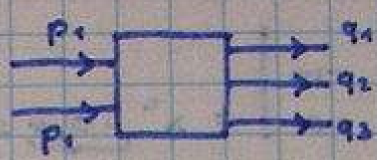
$h[k] = c^T\cdot\underline{\underline{A}}^{k-1}\cdot b + d\,\delta[k]$

Jelfolyam hálózatok (JFH)

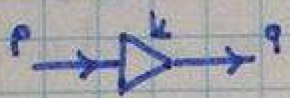
Specifikáció = komponensek definiálása + összekapcsolás megadása

1.) Komponensek:





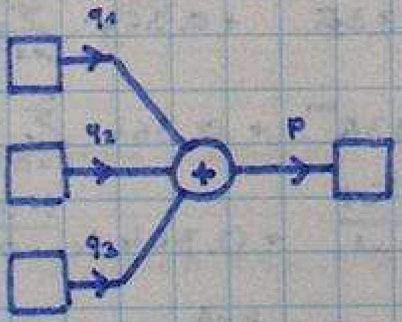
lineáris, invariáns, kauzális (folyamatos idejű differenciális is) rendszer ⇒ 4 komponens

NÉV	RAJZJEL	DI KARAKTERISZTIKA	FI KARAKTERISZTIKA
forrás		$q[k] = u[k]$ (adott)	$q(t) = u(t)$ (adott)
nyelő		(keresett) $y[k] = p[k]$	(keresett) $y(t) = p(t)$
erősítő		$q[k] = K \cdot p[k]$	$q(t) = K \cdot p(t)$
késleltető integrátor		$q[k] = p[k-1]$ —	— $q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) d\tau$

2.) Összekapcsolás:

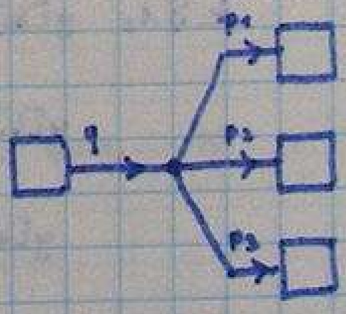
- Csomópontok:

a.) Összegző



$p = q_1 + q_2 + q_3$

b.) Elágazó



$p_1 = q$

$p_2 = q$

$p_3 = q$

c.) Egyszerű csomópont

$p = q$ (kaszkád kapcsolás)

d.) Összetett

$8^{15} - 9^{15}$, október 6

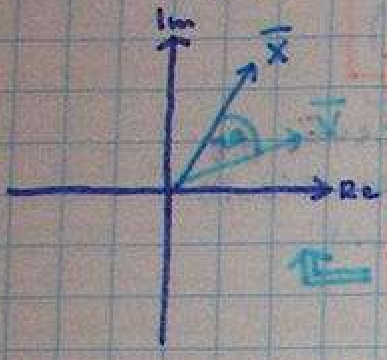
A - Koroknai	E1B
Korsós - Sütő	StNagy
Szabó - Tóth	IB025
Uri - Szabó - Zs	IB026

2008. ~~08~~. 10. 09.

OpenGL Super Bible; ~~ot~~ nov 4 -ig 1. lecke

Műveletek DI jeleken:

tfh. $x[k]$, $x_1[k]$, $x_2[k]$ és $v[k]$ DI szinuszos jelek



$$\boxed{x[k] = x_1[k] + x_2[k] \Leftrightarrow \overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2}$$ (komplex jelölése)

$$\boxed{v[k] = K \cdot x[k],\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{V} = K \cdot \overline{X}}$$

$$\Leftarrow \boxed{v[k] = x[k-1] \Leftrightarrow \overline{V} = e^{-j\vartheta}\,\overline{X}}$$

$\boxed{Pl}$ FI: $x_1(t) = 3\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$ és $x_2(t) = 5\cos(\omega t + 1{,}1[rad])$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = ?$

$e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta \Rightarrow e^{i\Theta} = \frac{\pi}{j}$

I. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

II. $\overline{X}_1 = 3\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} = 1{,}5 - 2{,}6j$; $\overline{X}_2 = 5\cdot e^{j1{,}1} = 2.27 + 4{,}46j$

$\overline{X}_a = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 = 3{,}77 + 1{,}86j = 4{,}2\cdot e^{0{,}46j}$

$\Downarrow$

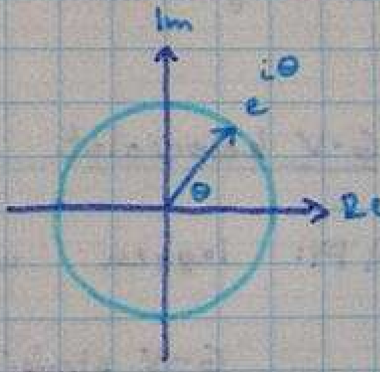
$x(t) = 4{,}2\cos(\omega t + 0{,}46)$

$$\boxed{\begin{array}{c} e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta \Rightarrow \\ z = a + ib = e^{i\Theta} \\ Re = \cos\Theta,\ Im = \sin\Theta i \end{array}}$$

$\boxed{Pl}$ DI: $x_1[k] = 2\cos(\vartheta k)$, $\vartheta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_2[k] = 3\cdot x_1[k-2]$

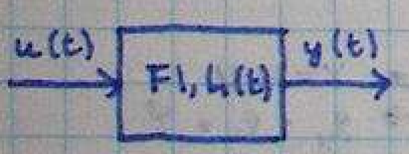
$\overline{X}_1 = 2\cdot e^{0j} \Rightarrow \overline{X}_2 = 3\,\overline{X}_1\cdot e^{-2\vartheta j} = 6\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}j}$

$x_2[k] = 6\cdot\cos(\vartheta k - \frac{2\pi}{3})$, $\vartheta = \frac{\pi}{3}$



A rendszer szinuszos állandósult állapota

1.) A válaszjel szabad és gerjesztett összetevője



rendszer: Li, kauzális, differenciális, egyszeres sajátértékek

$u(t) = \varepsilon(t)\, U\cos(\omega t + \rho_u)$, $y(t) = ?$

$$h(t) = \varepsilon(t)\cdot \underline{c}^T\cdot e^{\underline{A}t}\cdot\underline{b} + d\delta(t) = \varepsilon(t)\left(K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + K_N e^{\lambda_N t}\right) + d\delta(t)$$

$$u(t) = \varepsilon(t)\cdot Re\{u\cdot e^{j(\omega t + \rho_u)}\} = \varepsilon(t)\cdot Re\{u\cdot e^{j\rho_u}\cdot e^{j\omega t}\} = \varepsilon(t)\, Re\{\overline{u}\cdot e^{j\omega t}\},\ \overline{u} = u e^{j\rho_u}$$

$$y(t) = \varepsilon(t)\int_{-0}^{t} h(t-\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau = \varepsilon(t)\int_0^t \sum_{i=1}^{N} K_i e^{\lambda_i(t-\tau)}\cdot Re\{\overline{u}\cdot e^{j\omega t}\}\,d\tau + \underbrace{\varepsilon(t)\int_0^t d\delta(t-\tau)\cdot Re\{\overline{u}e^{j\omega\tau}\}\,d\tau}_{\varepsilon(t)\, d\cdot Re\{\overline{u}\, e^{j\omega t}\}}$$

$$y(t) = \varepsilon(t) Re\left\{\overline{u}\cdot\sum_{i=1}^{N} K_i e^{\lambda_i t}\right\}\cdot \underbrace{\int_0^t e^{(j\omega - \lambda_i)\tau}\,d\tau}_{\left[\frac{e^{(j\omega-\lambda_i)\tau}}{j\omega - \lambda_i}\right]_0^t = \frac{e^{(j\omega-\lambda_i)t}}{j\omega - \lambda_1}}\Big\} + \varepsilon(t) Re\{d\cdot\overline{u}\cdot e^{j\omega t}\} =$$

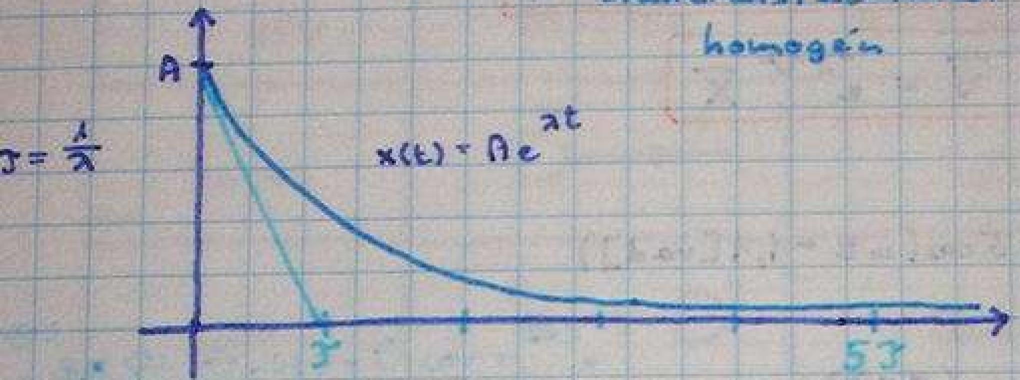
$$y(t) = \varepsilon(t)\,\mathrm{Re}\left\{\bar{u}\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{j\omega-\lambda_i}\left(e^{j\omega t}-e^{\lambda_i t}\right)\right\} + \varepsilon(t)\,\mathrm{Re}\left\{d\bar{u}e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \varepsilon(t)\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\mathrm{Re}\left\{\frac{\bar{u}\cdot k_i}{j\omega-\lambda_i}\right\}}_{\substack{\text{valós konstans}\\ M_i}}\cdot e^{\lambda_i t} + \varepsilon(t)\,\mathrm{Re}\left\{\bar{u}\cdot\underbrace{\left[d+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{j\omega-\lambda_i}\right]}_{\substack{\text{komplex konstans}\\ \overline{H}}}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$\overline{Y} = \overline{U}\cdot\overline{H} = Y\cdot e^{j\rho_y}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(t) = \varepsilon(t)\underbrace{\left(M_1e^{\lambda_1 t}+M_2e^{\lambda_2 t}+\ldots+M_Ne^{\lambda_N t}\right)}_{\substack{\text{szabad összetevő, } y_f\\ \text{tranziens/átmeneti}\\ \text{homogén}}} + \varepsilon(t)\underbrace{Y\cos(\omega t+\rho_y)}_{\substack{\text{gerjesztett összetevő, } y_g\\ \text{stacioner / állandósult}\\ \text{partikuláris}}}}$$



öt időtag után ~~[illegible]~~ lecseng

Def: állandósult állapot $\Rightarrow$ állandósult állapot: $\underline{x}(t)$, $t\to\infty$ } praktikusan
állandósult válasz: $y(t)$, $t\to\infty$ } $t > 5\tau_{max}$
(gerjesztett)

Zh megtekintés: okt 14, 10:00-11:00, V1-5 em

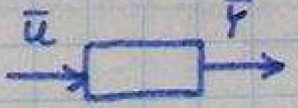
2.) G-V kapcsolat szinuszos állandósult állapotban

a.) FI: legyen $u(t) = U\cdot\cos(\omega t+\rho_u)$, nem belépő

G-V stabil rendszer esetén $y(t) = y_g(t) = Y\cos(\omega t+\rho_y)$

$\Rightarrow u(t) = \mathrm{Re}\{\overline{U}e^{j\omega t}\}$, $\overline{U} = U\cdot e^{j\rho_u}$

$y(t) = \mathrm{Re}\{\overline{Y}\cdot e^{j\omega t}\}$, $\overline{Y} = Y\cdot e^{j\rho_y}$



Def: $\boxed{\overline{H} = \overline{Y}/\overline{U}}$ átviteli tényező, amellyel $\overline{Y} = \overline{H}\cdot\overline{U}$

ha $\overline{H} = H\cdot e^{j\varphi}$, $\overline{Y} = \overline{H}\overline{U} = He^{j\varphi}\cdot Ue^{j\rho_u} = Ye^{j\rho_y}$ $\Rightarrow$ $Y = H\cdot U$, $\rho_y = \rho_u+\varphi$

$H \equiv |H|$ erősítés; $\varphi \equiv \mathrm{arc}(\overline{H})$ fázistolás

Spec: Li, kauzális differenciális (FI), G-V stabil, egyszerves a

$\boxed{\overline{H} = d+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{j\omega-\lambda_i}}$ függ ω-tól; $j\omega$-nak racionális ~~fv.-je~~ törtfv.-je b.) DI: $u[k] = U\cos(\vartheta k + \rho_u) = \mathrm{Re}\{\overline{U} \cdot e^{j\vartheta k}\}, \quad \overline{U} = U \cdot e^{j\rho_u}$

$y[k] = Y\cos(\vartheta k + \rho_y) = \mathrm{Re}\{\overline{Y} \cdot e^{j\vartheta k}\}, \quad \overline{Y} = Y \cdot e^{j\rho_y}$

def: $\boxed{\overline{H} = \overline{Y} / \overline{U}}$ átviteli tényező, amellyel $\overline{Y} = \overline{H} \cdot \overline{U}$

spec: Li, kauzális, G-V stabil, egyszeres λ

$\boxed{\overline{H} = d + \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{1-\lambda_i e^{-j\vartheta}}}$ $\Rightarrow$ függ ϑ-tól; $e^{j\vartheta}$ racionális törtfv.-je

$\boxed{2008.10.14.}$

Az átviteli karakterisztika

1.) FI: a.) def.: $H(j\omega) = \overline{Y} / \overline{U}$

b.) felbontás: $H(j\omega) = |H(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \text{arc}\,|H(j\omega)|$

c.) normálalak:

$$H(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_{m-1}(j\omega) + b_m}{(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(j\omega)^1 + a_n}, \quad n \geqslant m$$

2.) DI: a.) def.: $H(e^{j\vartheta}) = \overline{Y} / \overline{U}$, mint ϑ függvénye (csak G-V stabilis rendszerre)

tulajdonság: $H(e^{-j\vartheta}) = H^*(e^{j\vartheta})$ konjugált
$H(e^{j(\vartheta + 2\pi)}) = H(e^{j\vartheta})$ $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$-re $\Rightarrow$ periodikus

b.) felbontás: $H(e^{j\vartheta}) = H(\vartheta) \cdot e^{j\varphi(\vartheta)}$

$H(\vartheta) \equiv |H(e^{j\vartheta})|$ amplitúdó karakterisztika (páros, periodikus)
$\varphi(\vartheta) \equiv \text{arc}(H(e^{j\vartheta}))$ fázis karakterisztika (páros, periodikus)

G-V stabil $\Rightarrow$ $H(\vartheta) < K, \ \vartheta \in \mathbb{R}$

c.) normálalak:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta} + \ldots + b_m e^{-jm\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta} + a_2 e^{-j2\vartheta} + \ldots + a_n e^{-jn\vartheta}}$$

Mj.: $H(j\omega)$, $H(e^{j\vartheta})$ rendszerjellemző függvény

Az átviteli karakterisztika kapcsolata más rendszerleírással

1.) Állapotegyenletből $H()$ előállítása

a.) FI: $\underline{x}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t)$; $y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + du(t)$

tfh.: szinuszos állandósult állapot $\Rightarrow$ $\underline{x}(t) = \text{Re}\{\overline{\underline{X}} e^{j\omega t}\}$, $u(t) = \text{Re}\{\overline{U} e^{j\omega t}\}$,
$y(t) = \text{Re}\{\overline{Y} e^{j\omega t}\}$
felülvonás: komplex

$\boxed{j\omega \overline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}\,\overline{\underline{X}} + \underline{b}\,\overline{U}, \quad \overline{Y} = \underline{c}^T \overline{\underline{X}} + d\overline{U}}$ transzformált alak, algebrai egyenletek

$\hookrightarrow (j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\overline{\underline{X}} = \underline{b}\overline{U} \quad \Rightarrow \quad \overline{\underline{X}} = (j\omega\,\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{b}\overline{U} \quad \Rightarrow \overline{Y} = \underline{c}^T (j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{b}\overline{U} + d\overline{U}$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \overline{Y} / \overline{U} = \underline{c}^T (j\omega \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{b} + d}$$

b.) **DI:** $\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{b}\,u[k]$; $y[k] = \underline{c}^T\underline{x}[k] + d\,u[k]$

tfh.: szinuszos állandósult állapot ⇒ $u[k] = \mathrm{Re}\{\overline{U}e^{j\vartheta k}\}, \ldots$

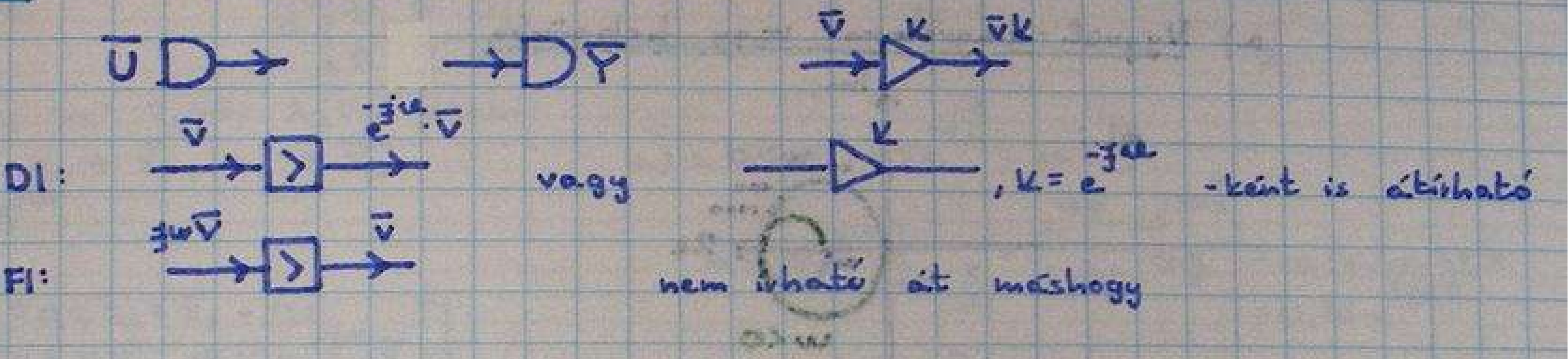
$$\boxed{e^{j\vartheta}\,\overline{X} = \underline{\underline{A}}\,\overline{X} + \underline{b}\overline{U}\,,\quad \overline{Y} = \underline{c}^T\overline{X} + d\overline{U}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{H(e^{j\vartheta}) = c^T(e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b} + d}$$

2.) Jelfolyamhálózatból H() előállítása

a.) közvetett: JFH → állapotegyenlet → H()

b.) közvetlen: „a hálózat transzformálása"



vagy , $k = e^{-j\vartheta}$ -ként is átírható

nem írható át máshogy

3.) Impulzusválasz és H() kapcsolata

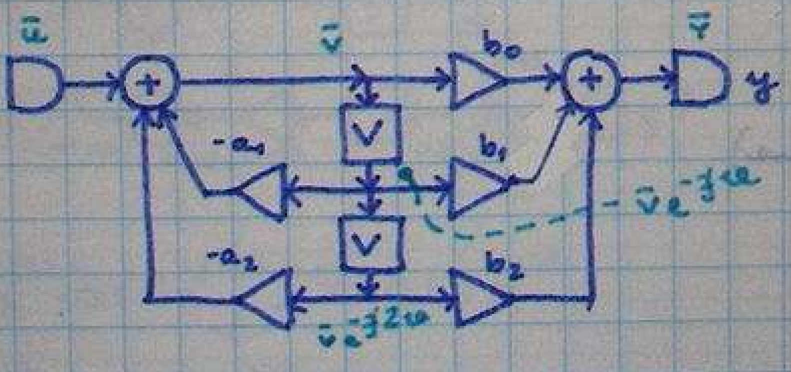
Impulzusválasz → H() } ld. később
H() → impulzusválasz

4.) H()-ból JFH előállítása

„realizáció", nem egyértelmű

a.) direkt realizáció (kanonikus hálózat, sablon)

$$H(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^2 + b_1(j\omega)^1 + b_2}{(j\omega)^2 + a_1(j\omega)^1 + a_2}\,; \qquad H(e^{j\vartheta}) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\vartheta} + b_2e^{-j2\vartheta}}{1 + a_1e^{-j\vartheta} + a_2e^{-j2\vartheta}}$$



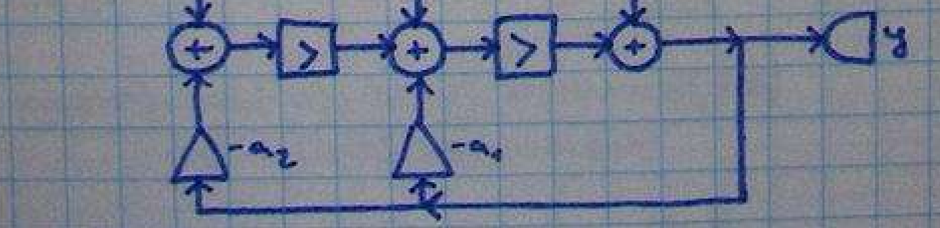
$$\overline{Y} = b_0\overline{v} + b_1\overline{v}e^{-j\vartheta} + b_2\overline{v}e^{-j2\vartheta}$$
$$\overline{v} = \overline{U} - a_1\overline{v}e^{-j\vartheta} - a_2\overline{v}e^{-j2\vartheta}$$

$$\overline{v} = \frac{1}{1 + a_1e^{-j\vartheta} + a_2e^{-j2\vartheta}}\cdot\overline{U}$$

$$\overline{Y} = \frac{b_0 + b_1e^{-j\vartheta} + b_2e^{-j2\vartheta}}{1 + a_1e^{-j\vartheta} + a_2e^{-j2\vartheta}}\cdot\overline{U}$$

VAGY

duális hálózat



$$\overline{Y} = b_0\overline{U} + b_1\overline{U}e^{-j\vartheta} + b_2\overline{U}e^{-j2\vartheta} - a_1\overline{Y}e^{-j2\vartheta}$$

$$\overline{Y}(1 + a_1e^{-j\vartheta} + a_2e^{-j2\vartheta}) = \overline{U}(b_0 + b_1e^{-j\vartheta} + b_2e^{-j2\vartheta})$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \overline{Y}/\overline{U} = \ldots$$

5.) H()-ból állapotegyenlet előállítása

a.) **közvetett:** $H() \rightarrow \exists HF \rightarrow$ állapot egyenlet (nem egyértelmű)

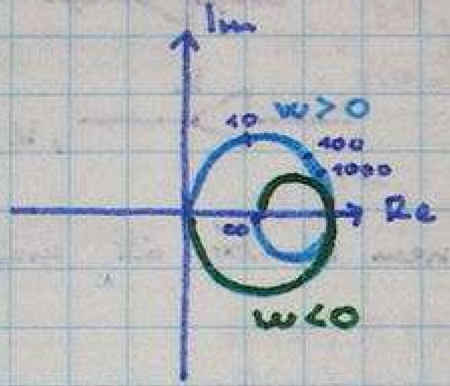
Az átviteli karakterisztika ábrázolása

1.) **DI:** páros, 2π-re periodikus $\Rightarrow$ elegendő a $\vartheta \in [0, \pi]$-t ábrázolni
$H(e^{j\vartheta})$ komplex $\Rightarrow$ 2 diagramm $\longrightarrow$ $H(\vartheta)$ és $\varphi(\vartheta)$
erősítés ↵ ↳ fázistolás

2.) **FI:** paritás miatt elegendő a $\omega = [0, +\infty[$-t vizsgálni

a.) Nyquist-diagramm vagy helygörbe

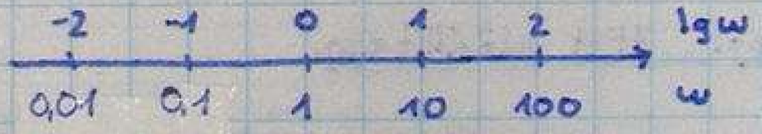
pl.:



b.) Bode-diagramm vagy logaritmikus ábrázolás

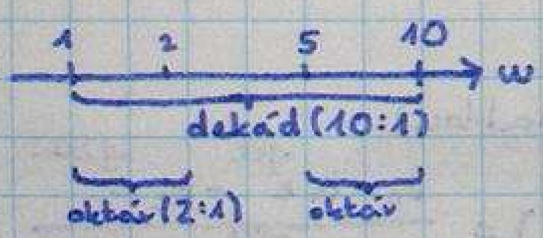
- amplitúdó diagramm: $k(\omega) = 20\log_{10}|H(j\omega)|$ [dB]
- fázis diagramm: $\varphi(\omega) = \text{arc}\,H(j\omega)$ [rad]

logaritmikus ω-skála:



ω=0 nem szerepel rajta!

10:1 dekád



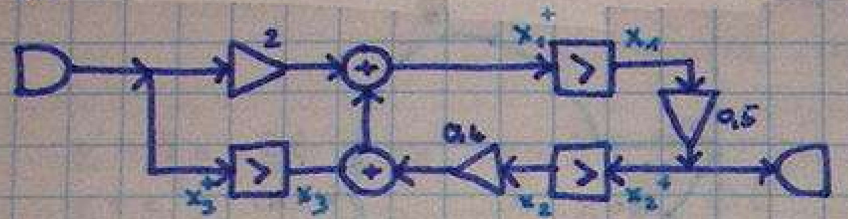
MATLAB/OCTAVE
bode(num, name)
nyquist(num, name)

2008. 10. 16.

Gyakorlat

Szinuszos állandósult állapot

P1 DI: [redacted]



a.) $H(e^{j\vartheta}) = ?$ b.) $y[k] = ?$ $u[k] = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot k - \frac{\pi}{6}\right)$

a.) $x_1^+ = 0{,}4\,x_2 + x_3 + 2u$

$x_2^+ = 0{,}5\,x_1$

$x_3^+ = u$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0{,}45;\ \lambda_2 = -0{,}45;\ \lambda_3 = 0$ stabil

$x_1 \to \overline{X}_1,\ x_2 \to \overline{X}_2,\ x_3 \to \overline{X}_3$

$x_1^+ \to \overline{X}_1 \cdot e^{j\vartheta}, \ldots$

Fr.t.

$\Rightarrow e^{j\vartheta}\cdot\overline{X}_1 = 0{,}4\,\overline{X}_2 + \overline{X}_3 + 2\overline{U}$

$e^{j\vartheta}\cdot\overline{X}_2 = 0{,}5\,\overline{X}_1 \Rightarrow \overline{X}_2 = e^{-j\vartheta}\cdot\overline{X}_1$

$e^{j\vartheta}\cdot\overline{X}_3 = \overline{U} \Rightarrow \overline{X}_3 = e^{-j\vartheta}\cdot\overline{U}$

$y = 0{,}5\,x_1 \Rightarrow \overline{Y} = 0{,}5\,\overline{X}_1$

$e^{j\vartheta}\cdot\overline{X}_1 = 0{,}4\cdot 0{,}5\,e^{-j\vartheta}\cdot\overline{X}_1 + e^{-j\vartheta}\cdot\overline{U} + 2\overline{U}$

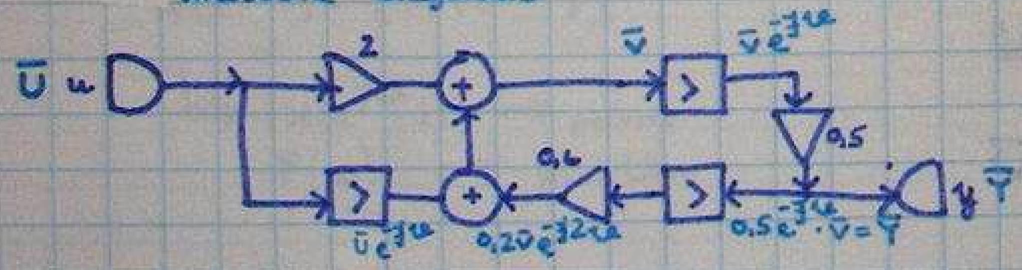
$\overline{X}_1\left(e^{j\vartheta} - 0{,}2\,e^{-j\vartheta}\right. = \overline{U}\cdot\left(2 + e^{-j\vartheta}\right)$

$$\overline{X}_1 = \frac{2 + e^{-j\vartheta}}{e^{j\vartheta} - 0{,}2\,e^{-j\vartheta}}\cdot\overline{U}$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{0{,}5\,\overline{X}_1}{\overline{U}} = \frac{1 + 0{,}5\,e^{-j\vartheta}}{e^{j\vartheta}\left(1 - 0{,}2\,e^{-j2\vartheta}\right)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^{-j\vartheta} + 0{,}5\,e^{-j2\vartheta}}{1 - 0{,}2\,e^{-j2\vartheta}}}}$$

második megoldás:



$\overline{v} = 2\overline{U} + \overline{U}e^{-j\vartheta} + 0{,}2\,\overline{v}e^{-j2\vartheta}$; $\overline{Y} = 0{,}5\,\overline{v}e^{-j\vartheta}$

$\Downarrow$

$\left(1 - 0{,}2\,e^{-j2\vartheta}\right)\overline{v} = \left(2 + e^{-j\vartheta}\right)\overline{U}$

$$\overline{v} = \frac{2 + e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}2\,e^{-j2\vartheta}}\cdot\overline{U} \Rightarrow H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = 0{,}5\,e^{-j\vartheta}\cdot\frac{2 + e^{-j\vartheta}}{1 - 0{,}2\,e^{-j2\vartheta}} =$$

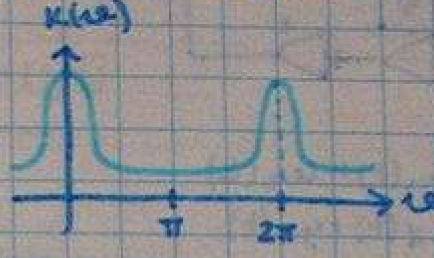
$$= \underline{\underline{\frac{e^{-j\vartheta} + 0{,}5\,e^{-j2\vartheta}}{1 - 0{,}2\,e^{-j2\vartheta}}}}\ ;\quad H(e^{j\vartheta}) = \underbrace{K(\vartheta)}_{\text{amplitúdó}}\cdot e^{j\overbrace{\varphi(\vartheta)}^{}_{\text{fázis}}}$$

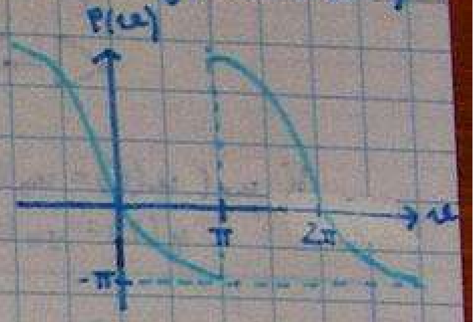
$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\cos(-\vartheta) + j\sin(-\vartheta) + 0{,}5\cos(-2\vartheta) + 0{,}5\,j\sin(-2\vartheta)}{1 - 0{,}2\cos(-2\vartheta) - 0{,}2\,j\sin(-2\vartheta)} =$$

$$= \frac{\left(\cos\vartheta + 0{,}5\cos(2\vartheta)\right) + j\left(-\sin\vartheta - 0{,}5\sin(2\vartheta)\right)}{\left(1 - 0{,}2\cos(2\vartheta)\right) + j\,0{,}2\sin(2\vartheta)}$$

$$K(\vartheta) = \left|H(e^{j\vartheta})\right| = \frac{\sqrt{(\cos\vartheta + 0{,}5\cos 2\vartheta)^2 + (\sin\vartheta + 0{,}5\sin 2\vartheta)^2}}{\sqrt{(1 - 0{,}2\cos 2\vartheta)^2 + (0{,}2\sin 2\vartheta)^2}}$$

$$\varphi(\vartheta) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sin\vartheta - 0{,}5\sin 2\vartheta}{\cos\vartheta + 0{,}5\cos\vartheta}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{0{,}2\sin 2\vartheta}{1 - 0{,}2\cos 2\vartheta}\right)$$





b.) $u[k] \to \overline{U} = 5\,e^{-j\frac{\pi}{6}}$; $\vartheta = \frac{\pi}{3}$

$$\overline{H} = H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta = \frac{\pi}{3}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}} + 0{,}5^{-j2\frac{\pi}{3}}}{1 - 0{,}2\,e^{-j2\cdot\frac{\pi}{3}}} = -0{,}25 - j0{,}72 =$$

$$= 0{,}76\cdot e^{-j1{,}9}$$

$$\overline{Y} = \overline{H}\cdot\overline{U} = 5\,e^{-j\frac{\pi}{6}}\cdot 0{,}76\cdot e^{-j1{,}9} = 3{,}8\,e^{-j2{,}42}$$

$$y[k] = 3{,}8\cos\left(\frac{\pi}{3}k - 2{,}42\right)$$

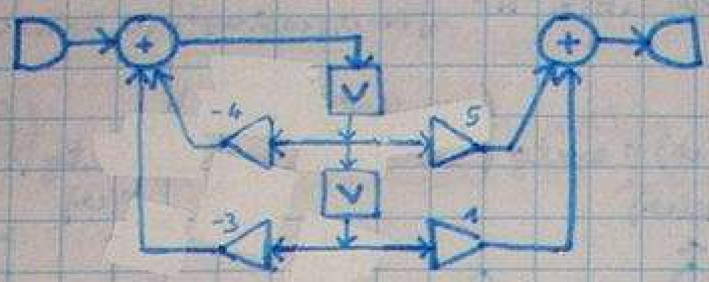
P1 Fl: $H(j\omega) = \dfrac{5(j\omega+1)}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}$

a.) hálózati realizáció

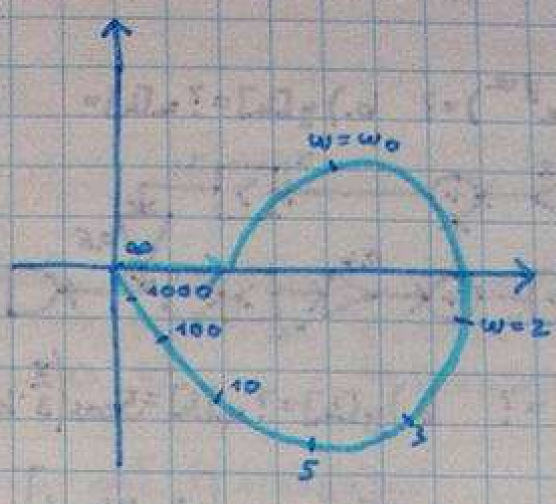
b.) $u(t) = 5+3\cos(\omega_0 t)+\cos(2\omega_0 t-\frac{\pi}{3})$, ahol $\omega_0 = 0,4$

c.) Bode + Nyquist

a.)



Nyquist- diagramm



b.) $u(t) = u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)$

$y(t) = y_0(t)+y_1(t)+y_2(t)$

i	$u_i(t)$	$\overline{U}_i$	$\overline{H}_i$	$\overline{Y}_i$	$y_i(t)$
0	5	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
1	$3\cos(\omega_0 t)$	3	$0{,}7e^{j0{,}6}$	$2{,}1e^{j0{,}6}$	$2{,}1\cos(\omega_0 t+0{,}6)$
2	$\cos(2\omega_0 t-\frac{\pi}{3})$	$1e^{-j\frac{\pi}{3}}$	$1{,}04e^{j0{,}4}$	$1{,}04e^{-j0{,}65}$	$1{,}04\cos(2\omega_0 t-0{,}65)$

$H_i = H(j\omega)|_{\omega=i} \Rightarrow H_0 = H(j\omega)|_{\omega=0} = \dfrac{5j0+1}{(j0)^2+4(j0)+3} = \dfrac{1}{3}$

$\overline{Y}_i = \overline{H}_i \cdot \overline{U}_i$

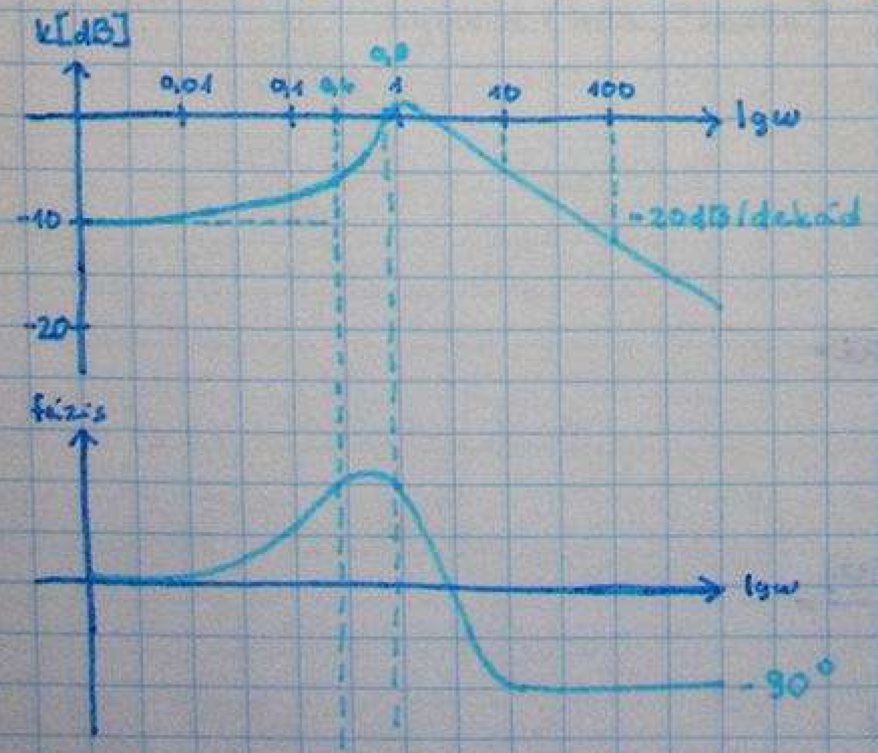
$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{3}+2{,}1\cos(\omega_0 t+0{,}6)+1{,}04\cos(2\omega_0 t-0{,}65)$

ha ω_i hiányzik a gerjesztésben, a válaszban is hiányozni fog

c.) Bode- diagramm

$H(j\omega) = k(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}$; $k(\omega) = 20\lg|H(j\omega)|$

$\Rightarrow k(\omega) = 20\lg\dfrac{\sqrt{(5\omega)^2+1^2}}{\sqrt{(3-\omega)^2+(4\omega)^2}} = 10\lg\dfrac{25\omega^2+1}{(3-\omega)^2+16\omega^2}$



$\boxed{2008.10.21.}$

1.) **Gerjesztés speciális:** $\left.\begin{matrix} U\cos(\omega t+\varphi) \\ U\cos(\vartheta k+\varphi) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} U\text{: amplitúdó} \\ \varphi\text{: fázis} \end{matrix}$

lineáris, invariáns, g-v stabilis

$$\begin{matrix} \underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u \\ y = \underline{c}^T\underline{x} + Du \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} j\omega\overline{X} = \underline{\underline{A}}\,\overline{X} + \underline{B}\overline{U} \\ \overline{Y} = \underline{c}^T\overline{X} + D\overline{U} \end{matrix}$$

$$\overline{Y} = \underbrace{\left[\underline{c}^T(j\omega\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{B} + D\right]}_{\overline{H}}\overline{U}$$

$$\begin{matrix} x[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}u[k] \\ y[k] = \underline{c}^T\underline{x}[k] + Du[k] \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} e^{j\vartheta}\overline{X} = \underline{\underline{A}}\,\overline{X} + \underline{B}\overline{U} \\ \overline{Y} = \underline{c}^T\overline{X} + D\overline{U} \end{matrix}$$

$$\overline{Y} = \underbrace{\left[\underline{c}^T(e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{B} + D\right]}_{\overline{H}}\overline{U}$$

$H(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_0} = \overline{H}_{\omega_0}$ $\quad H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \overline{H}_{\vartheta_0}$ $\Leftarrow$ átviteli karakterisztika

$H(j\omega) = [H(-j\omega)]^*$, $*$: komplex konjugált $\quad (\cos(\omega t - \varphi) = \cos(-\omega t + \varphi))$

$\hookrightarrow$ $|H(j\omega)|$: amplitúdókarakterisztika → páros
- $\varphi(\omega)$: fáziskarakterisztika → páratlan
- $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$ → páros
- $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$ → páratlan

$H(e^{j\vartheta}) = H(e^{j(\vartheta + m2\pi)})$ $\quad \Big(\cos((\vartheta+2\pi)k+\varphi) = \overbrace{\cos 2\pi k}^{=1}\cos(\vartheta k+\varphi) - \underbrace{\sin 2\pi k}_{=0}\sin(\vartheta k+\varphi)\Big)$

$H(e^{j\vartheta}) = [H(e^{j\vartheta})]^*$ $\quad \hookrightarrow \cos((\vartheta+2\pi)k+\varphi) = \cos(\vartheta k+\varphi)$

$\hookrightarrow$ $|H(e^{j\vartheta})|$ → páros
- $\varphi(\omega)$ → páratlan
- ⋮
- periódusos

Periódikus: $x(t) = x(t-T)$ $\quad$ periódushossz: $T_{min} \neq 0$, $K_{min} \neq 0$

$x[k] = x[k-K]$ $\quad$ K egész

G-V stabilis

Fourier-sor:

DI: $$\boxed{\begin{gathered} x[k]=x[k-K],\quad \vartheta_0=\frac{2\pi}{K} \\ \overline{X}_i^c=\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}x[k]\,e^{-jki\vartheta_0} \\ x[k]=\sum_{k=0}^{K-1}\overline{X}_i^c\,e^{jki\vartheta_0}\end{gathered}}$$

$\overline{X}_i^c=|\overline{X}_i^c|e^{j\varphi_i}$

komplex Fourier-együttható (egy perióduson át összegez)

X_0^c: valós szám; $e^{-jk\frac{K}{2}\vartheta_0}=e^{-jk\frac{K}{2}\frac{\pi}{2}}=e^{-jk\pi}=(-1)^k$

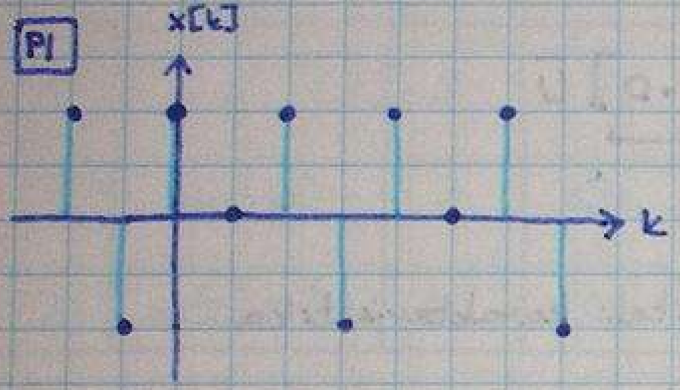
ha $x[k]$ valós $\Rightarrow$ $\overline{X}_i^c=(\overline{X}_{K-i}^c)^*=\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}x[k]\,e^{jik\vartheta_0}$;

$$x[k]=\sum_{i=0}^{K-1}\overline{X}_i^c\,e^{jik\vartheta_0}=X_0^c+\sum_{i=1}^{\frac{K-1}{2}}2|\overline{X}_i^c|\cos(i\vartheta_0k+\varphi_i),\ \text{ha } K \text{ páratlan}$$

$$=X_0^c+\sum_{i=1}^{\frac{K}{2}-1}2|\overline{X}_i^c|\cos(i\vartheta_0k+\varphi_i)+X_{\frac{K}{2}}^c\underbrace{(-1)^k}_{},\ \text{ha } K \text{ páros}$$

$=\cos\frac{K}{2}\vartheta_0k=\cos k\pi=(-1)^k$

$\boxed{\text{Pl}}$



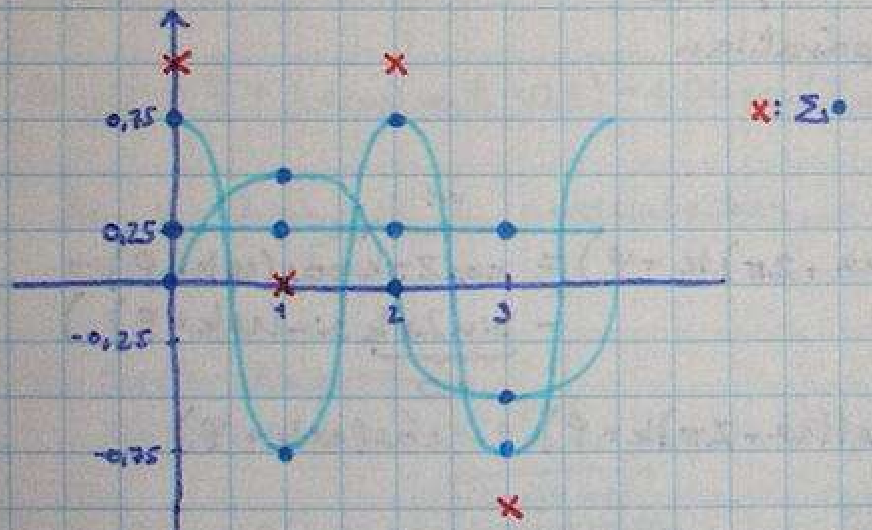
$x[k]=x[k-4]$, $\vartheta_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

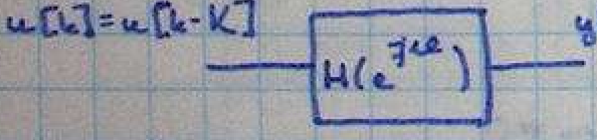
$x_0=\frac{1}{4}[1+0+1-1]=0{,}25$

$\overline{X}_1^c=\frac{1}{4}[1+0e^{-j\frac{\pi}{2}}+1e^{-j\frac{2\pi}{2}}-1e^{-j\frac{3\pi}{2}}]=-0{,}25j=0{,}25e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$X_2=\frac{1}{4}[1+0e^{-j\pi}+1e^{-j2\pi}-1e^{-j3\pi}]=0{,}75$

Fourier-sor: $x[k]=0{,}25+0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}k-\frac{\pi}{2}\right)+0{,}75\,(-1)^k$





$u[k]=U_0+\sum_{i=0}^{n}U_i\cos(i\vartheta_0k+\varphi_i)$

$H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=0,\vartheta_0,2\vartheta_0,\dots,n\vartheta_0}\Rightarrow H_0,\overline{H}_1,\overline{H}_2,\dots,\overline{H}_n$

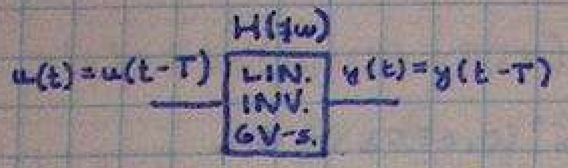
i	$\overline{U}$	$\overline{H}$	$\overline{Y}$
0	U_0	H_0	$Y_0=H_0U_0$
1	$U_1e^{j\varphi_1}=\overline{U}_1$	$\overline{H}_1=\lvert\overline{H}_1\rvert e^{j\delta_1}$	$Y_1=\overline{H}_1\overline{U}_1=\lvert\overline{H}_1\rvert\lvert\overline{U}_1\rvert e^{j(\varphi_1+\delta_1)}$
…			
n	$U_ne^{j\varphi_n}=\overline{U}_n$	$\overline{H}_n=\lvert\overline{H}_n\rvert e^{j\delta_n}$	$Y_n=\overline{H}_n\overline{U}_n=\lvert\overline{H}_n\rvert\lvert\overline{U}_n\rvert e^{j(\varphi_n+\delta_n)}$

$y[k]=H_0U_0+\sum_{i=1}^{n}|\overline{H}_i||\overline{U}_i|\cdot$

$\cdot U_i\cos(i\vartheta_0k+\varphi_i+\delta_i)$

$\boxed{2008.10.28.}$

F1 periodikus gerjesztéses rendszerek válaszának számítása



Mj.: belépő jel nem tud periodikus lenni

Állandósult állapot

$x(t) = x(t-T);\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T};\qquad \overline{X}_i^c = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-ji\omega_0 t}\,dt$ (egy periódusra vett integrál)

$$\boxed{x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \overline{X}_i^c\, e^{ji\omega_0 t}}$$ (x(t) lehet komplex értékű is)

ha x(t) valós értékű: $\overline{X}_0^c = X_0$ valós $\Rightarrow x(t) = \ldots = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\overline{X}_i^c e^{ji\omega_0 t} + \underbrace{(\overline{X}_i^{-c})^*}_{=\overline{X}_i^c} e^{-ji\omega_0 t}\right)$

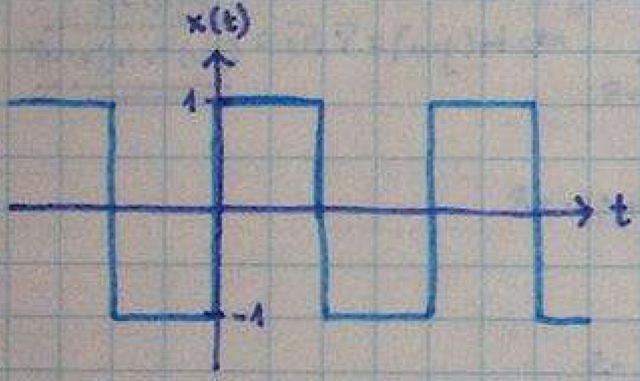
$\overline{X}_i^c = (\overline{X}_i^{-c})^*$

$$\overline{X}_i^c = X_i^c e^{j\varphi_i} \Rightarrow \boxed{x(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2X_i^c \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)}$$ Valós Fourier-sor

Matematikai felírás: $x(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(X_i^A \cos i\omega_0 t + X_i^B \sin i\omega_0 t)$

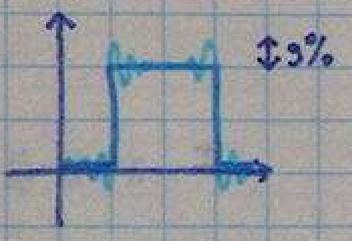
$$X_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt;\quad X_i^A = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos i\omega_0 t\,dt$$

$$X_i^B = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin i\omega_0 t\,dt$$



első fokú szakadásos jel
(nem folytonos)
jobbról +1, balról -1 a határértéke

Közelítsük Fourier-sorral



$$x_N(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{N} 2X_i^c \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t) - x_N(t)|^2\,dt \xrightarrow[\infty]{N} 0$$

$$X_i = 2|X_i^c|,\quad \varphi_i = \mathrm{arc}\{X_i^c\}$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt;\quad P_x = X_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}X_i^2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} X_p\cos(p\omega_0 t + \varphi_p)X_q\cos(q\omega_0 t + \varphi_q)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}X_pX_q\cos[(p+q)\omega_0 t + \varphi_p + \varphi_q] + \frac{1}{2}X_pX_q\cos[(p-q)\omega_0 t + \varphi_p - \varphi_q]\,dt = \text{ha } p \neq q \Rightarrow 0$$

ha $p = q \Rightarrow \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}X_pX_q\cos(\varphi_p - \varphi_q)\,dt = \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\underbrace{\varphi_p - \varphi_q}_{0})}_{1}\underbrace{X_pX_q}_{X_p^2} = \frac{1}{2}X_p^2$ (a bázis ortogonális)

$$u(t) = U_0 + \sum_{i=1}^{N} U_i\cos(i\omega_0 t + \varphi_i);\quad \overline{H}_i = H(j\omega)\big|_{\omega = i\omega_0};\quad \overline{U}_i = U_i e^{j\varphi_i}$$

i	$\overline{U}_i$	$\overline{H}_i$	$\overline{Y}_i = \overline{H}_i\overline{U}_i$	$y_i(t)$
0	U_0	H_0	$Y_0 = H_0U_0$	U_0
1	$\overline{U}_1$	$\overline{H}_1$	$\overline{Y}_1 = \overline{H}_1\overline{U}_1$	$Y_1\cos(\omega_0 t + \rho_1)$
⋮				
N	$\overline{U}_N$	$\overline{H}_N$	$\overline{Y}_N = \overline{H}_N\overline{U}_N$	$Y_N\cos(N\omega_0 t + \rho_N)$

$$y(t) = Y_0 + \sum_{i=1}^{N} Y_i\cos(i\omega_0 t + \rho_i)$$

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A\,dt = \frac{A}{2}$$

$$\overline{X}_i^c = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} Ae^{-ji\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}A\left[\frac{e^{-j\omega_0 i t}}{-ji\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{T}A\frac{e^{-ji\omega_0 T/2} - 1}{-ji\omega_0} =$$

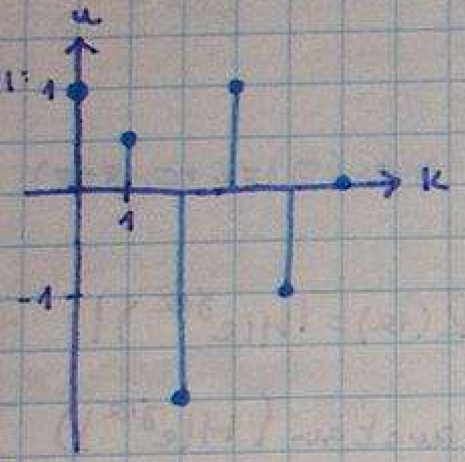
$$= -\frac{A}{2}e^{-ji\omega_0 T/4}\cdot\frac{\sin i\omega_0 T/4}{i\omega_0 T/4}$$

ZH: 16^{15}
A-Koroknai 1B028
Korsós-Szabó StNagy
Szakács 1B026

Gyakorlat

- Együtthatók közti összefüggés (sorfejtés)
- Átvitel: karakterisztika
- JFH

P1 D1:



a.) Fourier-sorfejtés, előállítás
b.) $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{1+e^{-j\vartheta}}{1+0,8e^{-j\vartheta}+0,4e^{-j2\vartheta}}$
u[k]-val gerjesztve, y[k]=?
c.) energiatartalom mekkora része kerül átvitelve?

D1 Fourier-sor konkrét érték,
a P1 Fourier-sor közelítés

a) $L=6, \quad x[k] = \sum_p X_p^c e^{jk\Theta p}$

$\Theta = \frac{2\pi}{L}$

$X_p^c = \frac{1}{L}\sum_k x[k] e^{-jk\Theta p}$

$X_p^c e^{jp\Theta k} + X_{L-p}^c \underbrace{e^{j(L-p)\Theta k}}_{=e^{-jp\Theta k}}$

$X_p^c = (X_{L-p}^c)^*$

X_0^c valós

$e^{j(L/2)\Theta k} = e^{j(L/2)(2\pi/L)k} = e^{j\pi k} =$

$= (-1)^k \Rightarrow X_{L/2}^c$ valós, ha $\frac{L}{2}$ egész

$x = \{1; 0,5; -2; 1; 0\}$

$X_0 = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[k] = \frac{1}{6}(1+0,5-2+1+0) =$
$= -(0,5/6) = -0,0833$

$X_1^c = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} x[k] e^{-j\frac{\pi}{3}k} = \ldots = 0,3005\, e^{j0,24}$

$X_2^c = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{3}k} = \ldots = 0,5833 \cdot e^{-j0,38}$

$X_3^c = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} x[k] e^{-j\pi k} = \ldots = -0,5833$

$X_4^c = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} x[k] e^{-j\frac{4\pi}{3}k} = \ldots = 0,5833 \cdot e^{j0,38}$

$X_5^c = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} x[k] e^{-j\frac{5\pi}{3}k} = \ldots = 0,30 \cdot e^{-j0,24}$

$X_p^c = A_p e^{jS_p}, \quad X_{L-p}^c = A_p e^{-jS_p}$

$A_p e^{jS_p} \cdot e^{jp\Theta k} + A_p e^{-jS_p} \cdot e^{-jp\Theta k} =$
$= 2A_p \cos(p\Theta k + S_k)$

$u[k] = -0,0833 + 2 \cdot 0,3 \cos\left(\frac{\pi}{3}k + 0,24\right) +$
$+ 2 \cdot 0,5833 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - 0,38\right) +$
$+ (-0,5833)\underbrace{(-1)^k}_{=\cos \pi k}$

b.)

Θ	k	$\overline{U}$	$\overline{H}$	$\overline{Y}$
0	0	0,0833	0,909 ~~1,1129~~	0,075 ~~0,595~~ $e^{j\pi} = -0,075$ ~~-0,595~~
$\frac{\pi}{3}$	1	$0,6 \cdot e^{j0,24}$	$1,5131\, e^{j2,14}$	$0,9092\, e^{j2,38}$
$\frac{2\pi}{3}$	2	$1,166 \cdot e^{-j0,38}$	$0,734\, e^{-j3,08}$	$0,8567\, e^{j2,81}$
π	3	$0,5833\, e^{j\pi}$	0	0

$y[k] = -0.075$ ~~-0,595~~ $+ 0,9092 \cos\left(\frac{\pi}{3}k + 2,38\right) + 0,8567 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k + 2,81\right)$

c.) $P_u = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} |u[k]|^2 = \sum_{p=0}^{L-1} |U_p^c|^2$

$P_u = 2,068$

$P_y = 1,5547$

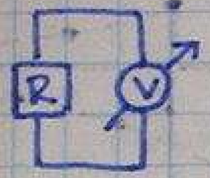
$\frac{P_y}{P_x} = 0,7518 \Rightarrow 75\%$ került átvitelve

Gyimóthy Szabolcs
Kozi: V1-504
www.evt.bme.hu
4db ZH: okt 6, okt 31,
nov 12, dec 12
csütörtök: felváltva gyakorlat

Tananyag:
1.) Bevezető
2.) Időtartományzbeli analízis (t)
3.) Frekvenciatartomány (ω)
4.) Komplex frekvencia (s)

1.) Bevezető: a.) Jelek

A jel fogalma: fizikai mennyiségek matematikai leírása a változó
a változók az idő függvényében módosulnak
a változó kivonata a jel

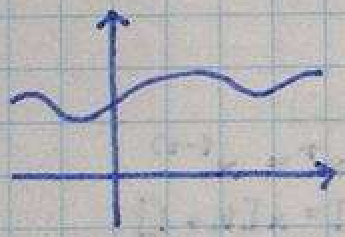


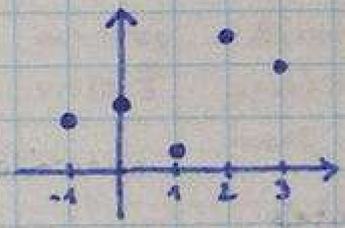
változó: - $u(t)[V] = (3V) \cdot \cos(2\pi \cdot (50Hz) \cdot t[s] + 0,4)$
jel: - $x(t) = u(t)$
- $[V, s, Hz]$ $x(t) = 3\cos(314t + 0,4)$
- mintavétel

$x(kT) = 3 \cdot \cos(314 \cdot kT + 0,4)$
pl.: $T = 1ms = 10^{-3}s$
$x[k] = 3\cos(0,314k + 0,4)$

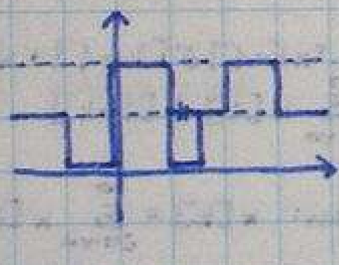
Jelek osztályozása:

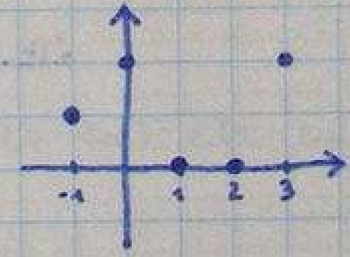
a.) folytonos idejű diszkrét idejű





folytonos értékű





diszkrét értékű

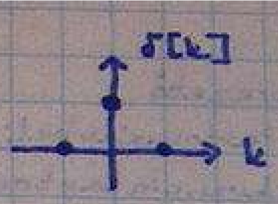
FI: folytonos idejű, folytonos értékű (valós)
$x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ vagy $-\infty < t < \infty$

DI: diszkrét idejű folytonos értékű
$x = x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$ vagy $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

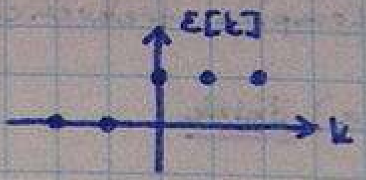
b.) determinisztikus: értéke előre ismert ⇒ EZZEL FOGLALKOZUNK
sztochasztikus: csak statisztikailag jellemezhető

Néhány DI jel:

a.) **Egységimpulzus:** $\delta[k] = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 0 \\ 0, & \text{ha } k \neq 0 \end{cases}$

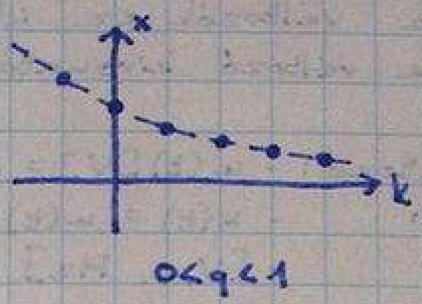


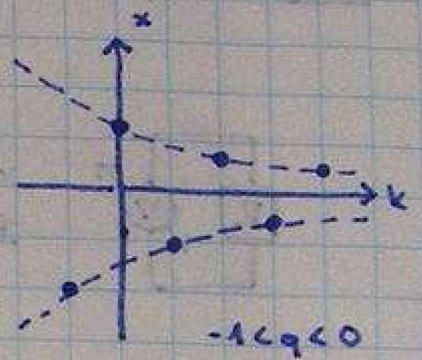
b.) **Egységugrás:** (=fésűfüggvény) $\varepsilon[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0 \\ 1, & \text{ha } k \geq 0 \end{cases}$



$\Rightarrow \quad \varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[i]$

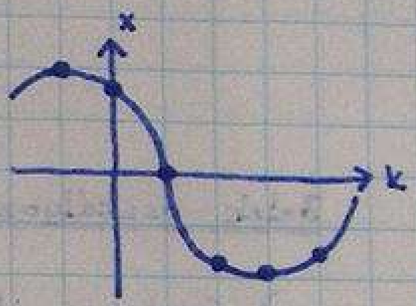
c.) **Exponenciális:** $x[k] = A \cdot q^{k}$





d.) „**Szinuszos**”: $x[k] = A \cdot \cos(\vartheta k + \varphi)$

amplitúdó ↵ ↓ körfrekvencia ↳ kezdőfázis

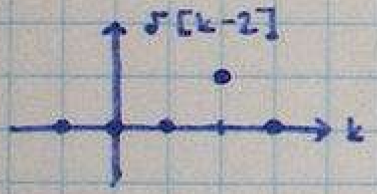


Műveletek DI jeleken

d.) **Eltolás:** $x^{(i)}[k] = x[k-i]$ speciális: $x' \equiv x^{+} \equiv x^{(-1)}$

ha $i > 0 \Rightarrow$ késleltetés $x'[k] = x[k+1]$

pl.:



Felhasználás: $\varepsilon[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i]$

ált.: $x[k] = \ldots + x[-1]\delta[k+1] + x[0]\delta[k] + \ldots =$

$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[i-k]$ konvolúció

másképpen: $x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[k-i]$

$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[k-i]\delta[i]$

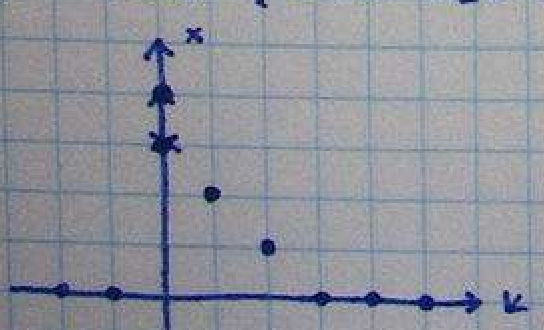
$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]$

e.) **Levágás/ablakozás:** $y[k] = \varepsilon[k] \cdot x[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0 \\ x[k], & \text{ha } k \geq 0 \end{cases}$

Derékszögű ablak:

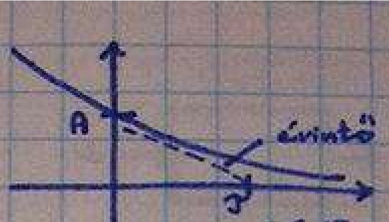
$y[k] = \varepsilon[k-a] - \varepsilon[k-(b+1)] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < a \\ 1, & \text{ha } a \leq k \leq b \\ 0, & \text{ha } k > b \end{cases}$

pl.: $x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]\} \cdot 4 \cdot (0{,}5)^{k}$



Néhány FI jel:

a) **Exponenciális:** $x(t) = A \cdot e^{at}$

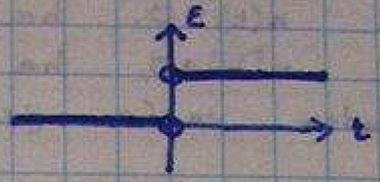


$a \in \mathbb{R}$, $a < 0$

$\tau = -\frac{1}{a}$ (időállandó)

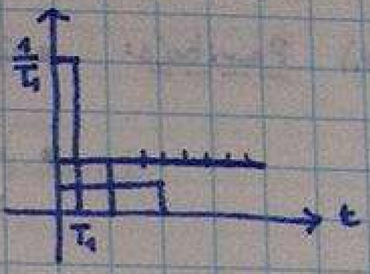
b.) „**Szinuszos**” $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

c.) **FI egységugrás** $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$



d.) **Egységnyi intenzitású impulzus:**

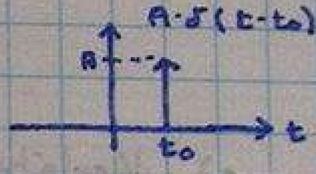
$$\delta(t,T) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ \frac{1}{T}, & \text{ha } 0<t<T \\ 0, & \text{ha } t>T \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t,T)\,dt = 1; \qquad T \to 0\ ?$$

e) **Dirac-impulzus:** szemléletesen $\delta(t) = \lim\limits_{T\to 0} \delta(t,T)$ (nem korrekt)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t=0 \end{cases} \quad \text{de} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)\,dt = 1$$



matematikai def: $x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt \xrightarrow[\tau \to t]{t \to t_0} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

konvolúció

pl.:

$m = 10\,kg$

$v = 10\,\frac{m}{s}$

$\Delta(mv)_2 = 100\,\frac{kg \cdot m}{s} = 100\,Ns = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$

praktikus: $F(t) = 100Ns \cdot \delta(t)$

mert $\int_{-0}^{+0} 100Ns\,\delta(t)\,dt = 100Ns \Rightarrow [\delta] = \frac{1}{idő} = \frac{1}{s}$

Műveletek FI jeleken:

a.) **Eltolás**

b.) **Ablakozás:**

$$x(t) = \varepsilon(t-t_a) - \varepsilon(t-t_b) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<t_a \\ 1, & \text{ha } t_a<t<t_b \\ 0, & \text{ha } t>t_b \end{cases}$$

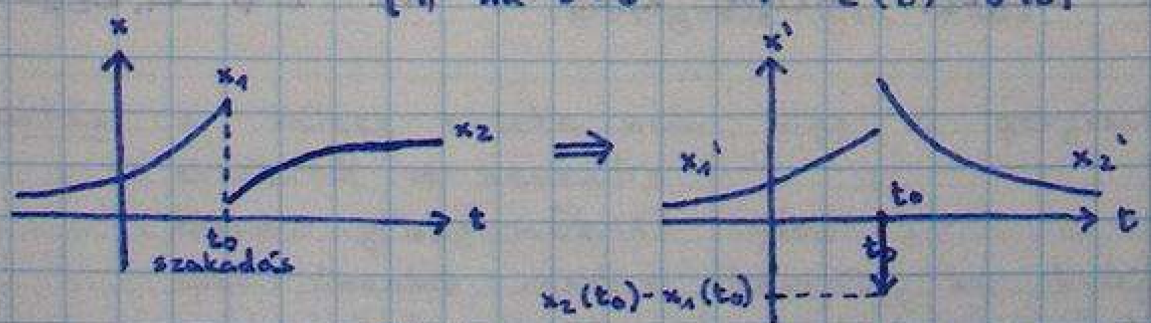
(nem ≤ !)

c) **Általánosított deriválás:** def: $x'(t)$ az $x(t)$ általános deriváltja, ha

$x(t) = \int_{t_0}^{t} x'(\tau)\,d\tau + x(t_0)$ (szakadásos fv. is belefér)

alapeset: $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ 1, & \text{ha } t>0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon'(t) = \delta(t)$

pl.:



formálisan: $x(t) = \overbrace{[1-\varepsilon(t-t_0)]}^{\text{időablak}} \cdot x_1(t) + \varepsilon(t-t_0) \cdot x_2(t)$

$$x'(t) = -\delta(t-t_0) \cdot \underset{x_1(t_0)}{x_1(t)} + [1-\varepsilon(t-t_0)] \cdot x_1'(t) + \delta(t-t_0) \cdot \underset{x_2(t_0)}{x_2(t)} + \varepsilon(t-t_0)\,x_2'(t) =$$

$$= [1-\varepsilon(t-t_0)]\,x_1'(t) + \varepsilon(t-t_0)\,x_2'(t) + \delta(t-t_0) \cdot [x_2(t_0) - x_1(t_0)]$$

⇒ felhasználás: szakadásos fv.-k deriválása (ha $x_1(t)$ és $x_2(t)$ folytonos)

2008.03.11.

Jelek tulajdonságai:

a.) **Belépő:** ha $x(t)=0$, ha $t<0$
$x[k]=0$, ha $k<0$
minden valós jel belépő

b.) **Paritás:** páros, ha $x(-t)=x(t)$ páratlan, ha $x(-t)=-x(t)$
$x[-k]=x[k]$ $x[-k]=-x[k]$
→ minden jel felbontható páros és páratlan összetevőkre
$x(t)=x_{pt}(t)+x_{ps}(t)$, ahol $x_{pt}=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$
$x_{ps}=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$

pl.: $x(t)=\varepsilon(t) \Rightarrow x_{pt}=\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$, $x_{ps}=\frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon(0)=0.5$
↳ előjelfv.
$x[k]=\varepsilon[k] \Rightarrow x_{pt}[k]=\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[k]$, $x_{ps}[k]=\frac{1}{2}(1+\delta[k])$

c.) **Korlátos:** $x(t)$ korlátos, ha $\exists M$, $|x(t)|<M$, $\forall t\in\mathbb{R}$

d.) **Véges időkre korlátos:** pl.: $x(t)=3\cdot e^{2t}$
ellenpl.: $x(t)=\frac{1}{t}$

e.) **Abszolút integrálható/összegezhető:**

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt<\infty \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|<\infty$$

f.) **Négyzetesen integrálható/összegezhető** ≡ Véges energiájú

$$E_X=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\,dt<\infty \qquad E_X=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x^2[k]<\infty$$

g.) **Véges teljesítményű:**

$$P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\,dt \qquad P_x=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L+1}\sum_{k=-L}^{L}x^2[k]$$

h.) **Véges idejű** ≡ Időkorlátos.

ha $\exists t_1,t_2$, melyre $x(t)=0$, ha $t\notin[t_1,t_2]$
ha $\exists k_1,k_2$, melyre $x[k]=0$, ha $k\notin[k_1,k_2]$

b.) Rendszerek

A rendszer: bemenet - kimenet
gerjesztés - válasz


SISO
EZZEL FOGLALKOZUNK


MIMO

= matematikai operátor
pl.: explicit $y = W\{u\}$

Rendszerek osztályozása:

a.) **SISO/MIMO:** bemenetek és kimenetek száma szerint

b.) **Determinisztikus:** EZZEL FOGLALKOZUNK
Stochasztikus: azonosnak tűnő körülmények között más-más értéket kapunk.

c.) **FI/DI:** $u(t) \to \boxed{FI} \to y(t)$ $\quad u[k] \to \boxed{DI} \to y[k]$

vannak még analóg/digitális átalakítók: A/D és D/A

Rendszertulajdonságok:

a.) **Linearitás:** lineáris, ha érvényes rá a szuperpozíció elve
matematikailag: a rendszer lineáris, ha W lineáris
lineáris/nemlineáris $W\{Au_1 + Bu_2\} = AW\{u_1\} + BW\{u_2\}$

spec.: $W\{cu\} = cW\{u\}$, ahol c = konstans
$W\{0\} = 0$

vigyázat! $y = Au + B$ nemlineáris, hacsak $B \neq 0$

b.) **Invariancia:** invariáns, ha a rendszer eltolása a válaszban azonos mértékű eltolást okoz
variáns/invariáns matematikailag: a rendszer invariáns, ha
$W\{u(t-T)\} = y(t-T) \equiv W\{u(t)\}|_{t \leftarrow t-T}$
$W\{u[k-L]\} = y[k-L] \equiv W\{u[k]\}|_{k \leftarrow k-L}$
LI = lineáris invariáns EZZEL FOGLALKOZUNK
valóságban ilyen nincs

c.) **Kauzalitás:** a válasz értéke nem függ a gerjesztés jövőbeli értékétől ⇒ kauzális
kauzális/akauzális ellenpl.: $y[k] = u[k+1]$ „jósló"
spec.: lineáris rendszer kauzális, ha belépő gerjesztésre belépő választ ad ⇒ $W\{\varepsilon(t)x(t)\} = 0$, ha $t < 0$
$W\{\varepsilon[k]x[k]\} = 0$, ha $k < 0$
↳ $\varepsilon(t)$ v. $\varepsilon[k]$-val szorozva belépő lesz

d.) **Stabilitás:** a rendszer gerjesztés-válasz (G-V) stabil, $\overset{\Leftrightarrow}{\text{ha}}$ bármely korlátos gerjesztésre korlátos választ ad
stabil/instabil, labilis BIBO: Bounded input implies Bounded output
valódi jelek stabilak

2.) Rendszerek időtartománybeli analízise

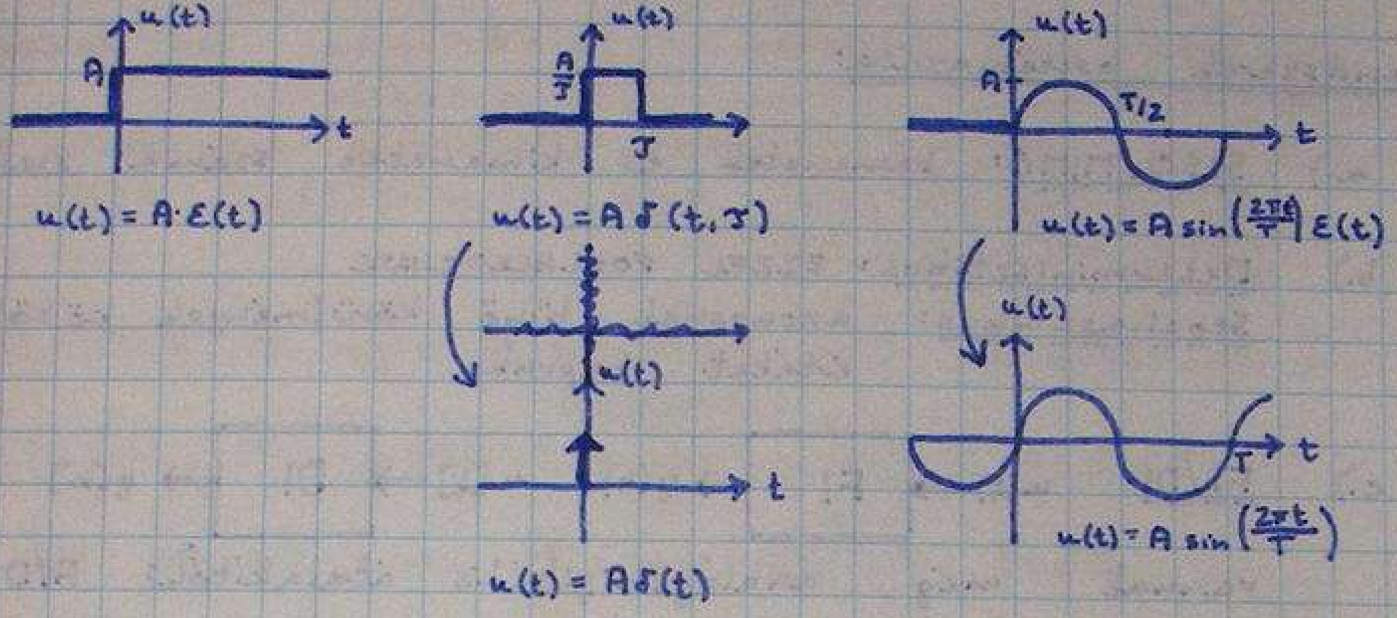
a.) Az impulzusválasz és alkalmazása

Vizsgálójelek:

u: vizsgáló jel
csak u és y ismert

„fekete doboz"

pl.:



$u(t) = A \cdot \varepsilon(t)$

$u(t) = A\delta(t,\tau)$

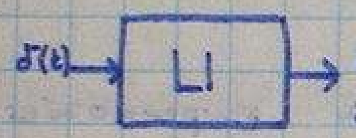
$u(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\varepsilon(t)$

$u(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$u(t) = A\delta(t)$

FI impulzusválasz:

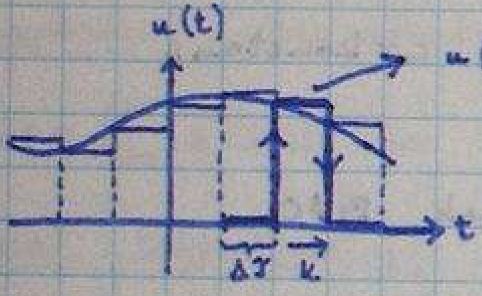
def:



$h(t) = W\{\delta(t)\}$

impulzusválasz ≡ súlyfüggvény

a válaszjel kifejezése:

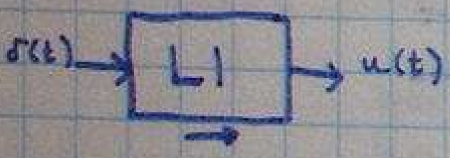


$\rightarrow u(k\Delta\tau) \cdot \delta(t-k\Delta\tau, \Delta\tau) \cdot \Delta\tau$

teljes jel: $u(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau, \Delta\tau)\Delta\tau$

minél kisebb Δτ, annál pontosabb
$\Delta\tau \to 0$: $k\Delta\tau \to \tau$, $\Sigma \to \int$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t-\tau)d\tau$$



$\delta(t-\tau) \rightarrow u(t-\tau)$ invariancia
$u(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow u(\tau)u(t-\tau)$ lineáris

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}_{u(t)} \rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau}_{y(t)} \quad \text{lineáris}$$

A rendszerelmélet konvolúció-tétele: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)h(t-\tau)d\tau = u(t) \cdot h(t)$

Legyen $\vartheta = t-\tau$: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\vartheta)d\vartheta$
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$

Eltolást annál a függvénynél érdemes használni, amelyik egyszerűbb.

Spec: h(t) belépő (kauzális)
$y(t) = \int_{-\infty}^{t+0} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$ $\qquad y(t) = \int_{-0}^{\infty} u(t-\vartheta)u(t-\tau)d\tau$

Spec: u(t), h(t) belépő
$y(t) = \varepsilon(t)\int_{-0}^{t+0} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$ $\qquad y(t) = \varepsilon(t)\int_{-0}^{t+0} u(t-\vartheta)h(\vartheta)d\vartheta$

2008. 03. 16.

Impulzusválasz: $h(t) = y(t)$, ha $u(t) = \delta(t)$

Válasz számítása: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$

Impulzusválasz: $h[k] = y[k]$, ha $u[k] = \delta[k]$

Válasz számítása: $y[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u[p]h[k-p] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-p]h[p]$

Tetszőleges DI jel felírható így: $u[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u[p]\delta[k-p]$

Biz: $k=i$: $u[i] = u[i]\delta[i-i] = u[i]\delta[0]$

gerjesztés	válasz
$\delta[k]$	$h[k]$
$\delta[k-p]$	$h[k-p]$, mert a rendszer invariáns
$u[p]\delta[k-p]$	$u[p]h[k-p]$, mert a rendszer lineáris
$\sum_{p=-\infty}^{\infty} u[p]\delta[k-p]$	$\sum_{p=-\infty}^{\infty} u[p]h[k-p]$, mert a rendszer lineáris

$n: k-p \rightarrow y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[k-n]h[n]$ konvolúcióösszeg: $u * h$

QED

Konvolúció: - jele: $u * v$
- kommutatív: $u * v = v * u$
- asszociatív: $(u * v) * w = u * (v * w)$
- összeadásra disztributív: $u * (v + w) = u * v + u * w$

Kauzalitás, G-V stabilitás → Impulzusválasz

Kauzalitás szükséges és elégséges feltétele: az impulzusválasz belépő
a rendszer kauzális → az impulzusválasz belépő
az impulzusválasz belépő → a rendszer kauzális
A rendszer akkor és csak akkor G-V stabilis, ha a $h(t)$, $h[k]$ impulzusválasz abszolút integrálható (FI) ill. összegezhető (DI).

h(t) ill h[k] abszolút integrálható ill összegezhető $\rightarrow$ $\overset{\text{G-V stabilis a rendszer}}{\text{bármely korlátos gerjesztésre} \rightarrow \text{korlátos válasz}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$ ill. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

Bármely $\overset{u(t)}{u[k]}$ korlátos gerjesztés esetén $\exists M$: $\overset{|u(t)|<M}{|u[k]|<M}$:

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(t-\tau)h(\tau)|\,d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} M|h(\tau)|\,d\tau = M\cdot\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\,d\tau}^{<\infty} < \infty$$

$$|y[k]| = \left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} u[k-p]h[p]\right| = \ldots < M\underbrace{\sum_{p=-\infty}^{\infty}|h(p)|}_{<\infty} < \infty$$

A rendszer G-V stabilis → $\overset{h(t)}{h[k]}$ abszolút $\overset{\text{integrálható}}{\text{összegezhető}}$

vagyis: $|y(0)| < \infty \rightarrow \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(-\tau)\,d\tau\right| = |y(0)|$
$|y[0]| < \infty \rightarrow \left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} u[-p]h[+p]\right| = |y[0]|$

$$u(p) = \begin{cases} 1, \text{ ha } h(-t) \geq 0 \\ -1, \text{ ha } h(-t) < 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,d\tau\right| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\,d\tau$ illetve $\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]\right| = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]|$

Kauzális rendszer: a.) nem belépő gerjesztés

FI: $y(t) = \int_{-\infty}^{t+0} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$

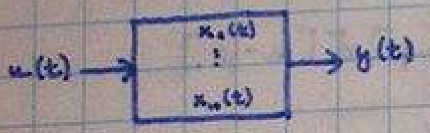
DI: $y[k] = \sum_{p=-\infty}^{k} u[p]h[k-p] = \sum_{p=0}^{\infty} u[k-p]h[p]$

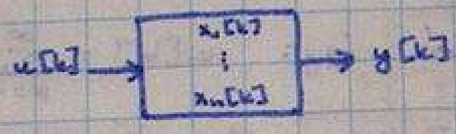
b.) belépő gerjesztés

FI: $y(t) = \varepsilon(t) \int_{-0}^{t+0} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \varepsilon(t) \int_{-0}^{t+0} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$

DI: $y[k] = \varepsilon[k] \sum_{p=0}^{k} u[p]h[k-p] = \varepsilon[k] \sum_{p=0}^{k} u[k-p]h[p]$

Lineáris, invariáns, kauzális rendszerek állapotváltozós leírása





Az állapotváltozók fogalma:

$x_1(t), \dots x_n(t)$ / $x_1(t_1), \dots x_n(t_1)$

Az $x_1[k], \dots x_n[k]$ állapotváltozók, ha $x_1[k_1], \dots x_n[k_1]$ és a gerjesztés ismeretében

$y(t_1)$ / $x_1(t_2), \dots x_n(t_2)$ / $t_2 > t_1$

meghatározható 1.) egy $y[k_1]$ és 2.) $x_1[k_2], \dots x_n[k_2]$, ahol $k_2 > k_1$

FI: $\frac{dx(t)}{d(t)} \to x'$ DI: $x[k+1] = x'$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u \quad y = \underline{c}^T \underline{x} + Du$$

$\underline{x}[0], u[k] \to y[0] = \underline{c}^T \underline{x}[0] + Du[0]$

$\underline{x}[1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[0] + \underline{B}u[0] \to y[1] = \dots$

$\underline{x}(0) = \dots$

$\underline{x}(\Delta t) \approx \underline{x}(0) + x'(0)\Delta t$

$\underline{x}(2\Delta t) = \underline{x}(\Delta t) + \underline{x}'(\Delta t) \cdot \Delta t$

$\boxed{P}$ FI: impulzusválasz $\Rightarrow h(t) = A\delta(t-\tau) + \varepsilon(t)\, B e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \vartheta)$

A paraméterek mely értékére lesz a rendszer a.) kauzális, b.) G-V stabilis?

a.) $h(t) = \underbrace{A\delta(t-\tau)}_{\text{nem lehet negatív}} + \underbrace{\varepsilon(t) \cdot B e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \vartheta)}_{\text{kauzális }\forall\text{ értékre } \varepsilon(t) \text{ miatt}}$

$y[0] = u[0]h[0]$

$y[1] = u[0]h[1] + u[1]h[0]$

$y[2] = u[0]h[2] + u[1]h[1] + u[2]h[0]$

$\vdots$

b.) $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \Rightarrow$ G-V stabil;

ha $\alpha = 0$ v. $\alpha < 0 \Rightarrow B = 0$, többi tetszőleges

ha $\alpha > 0$: $\int_{\infty}^{-\infty} |h(t)|dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |A|\,\delta(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} |B| e^{-\alpha t} \overbrace{|\cos(\omega t + \vartheta)|}^{=1} dt \le |A| + |B| \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = |A| + |B|$

$\Rightarrow$ többi tetszőleges

$\boxed{P}$ DI: impulzusválasz $\Rightarrow h[k] = 5\delta[k] + 8\varepsilon[k-1] \cdot 0{,}5^{k-1}$

gerjesztőjel $\Rightarrow$ a.) $u[k] = \varepsilon[k](2 + 10 \cdot 0{,}4^{k})$

b.) $u[k] = 2$

mj: $a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

~~y[0] = u[0] h~~

a.) $y[k] = 0$, ha $k < 0$; $k \ge 0$-ra: $y[k] = \sum_{p=0}^{k} (2 + 10 \cdot 0{,}4^k) \cdot (5\delta[p] + 8\varepsilon[p-1] \cdot 0{,}5^{p-1})$ / $\varepsilon[k]$ elhagyható

ha $k = 0$: $y[k] = 10 + 50 \cdot 0{,}4^k + \sum_{p=1}^{k} (32 \cdot 0{,}5^p + 160 \cdot 0{,}4^{k-p} \cdot 0{,}4^p) = 10 + 50 \cdot 0{,}4^k + 32 \cdot \sum_{p=1}^{k} (0{,}5^p + 160 \cdot 0{,}4^k) \cdot$

$\cdot \sum_{p=1}^{k} 1{,}25^p = 10 + 50 \cdot 0{,}4^k + 16 \cdot \frac{0{,}5^k - 1}{0{,}5 - 1} + 0{,}4^k \cdot 200 \cdot \frac{1{,}25^k - 1}{1{,}25 - 1} = 10 + 50 \cdot 0{,}4^k -$

$-32(0{,}5^k - 1) + 800 \cdot 0{,}4k(1{,}25^k - 1) = 42 - 750 \cdot 0{,}4^k + 768 \cdot 0{,}5^k$

b.) $u[k] = 2$ nem belépő $\Rightarrow y[k] = \sum_{p=0}^{\infty} u[k-p]h[p] = \sum_{p=0}^{\infty} 2 \cdot (5\delta[p] + 8\varepsilon[p-1] \cdot 0{,}5^{p-1}) = 10 + \sum_{p=1}^{\infty} 16 \cdot 2 \cdot 0{,}5^p =$

$= 10 + 32 \sum_{p=1}^{\infty} 0{,}5^p = 10 + 32 \cdot 0{,}5 \frac{1}{1 - 0{,}5} = 42$, $\sum_{p=1}^{\infty} 0{,}5^p = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0.5}{1-p}$

2008. 11. 04. Zh: szerda

JELEK ÉS RENDSZEREK SPEKTRÁLIS LEÍRÁSA
(A FOURIER - TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZÁSA)

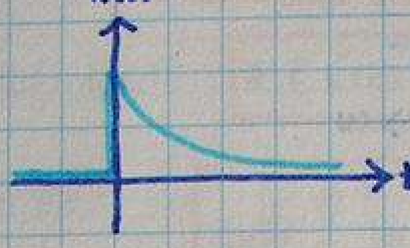
I. A FI Fourier-transzformáció

1.) Alapgondolat (rávezetés)

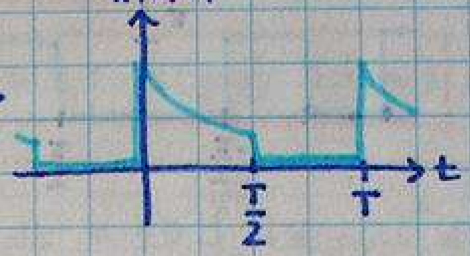
adva van x(t) FI, nem periodikus jel → legyen $x(t,T)=\begin{cases} x(t), & 0\le t\le T/2 \\ 0, & T/2\le t<T \end{cases}$ és

$x(t+T,T)=x(t,T),\ \forall t$

pl.:



→



x(t, T) Fourier-sora:

$$x(t,T)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^c\cdot e^{jp\Omega t},\quad \Omega=\frac{2\pi}{t}$$

$$X_p^c=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,T)\cdot e^{-jp\Omega t}\,dt,\quad p=0,\pm1,\pm2,\dots$$

új jelölés: $X(jp\Omega)=T\cdot X_p^c$

↳ $$x(t,T)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(jp\Omega)\cdot e^{jp\Omega t}=\frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}X(jp\Omega)e^{jp\Omega t}\cdot\Omega$$

$$X(jp\Omega)=\int_{-T/2}^{T/2}x(t,T)\cdot e^{-jp\Omega t}\,dt$$

határátmenet: $t\to\infty,\ \Omega\to 0,\ d\omega=\Omega,\ \omega=p\Omega,\ x(t,T)\to x(t),\ \Sigma\to\int$

2.) Def:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\equiv\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

X(jω) az x(t) jel spektruma

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\mathcal{F}\{x(t)\},$$

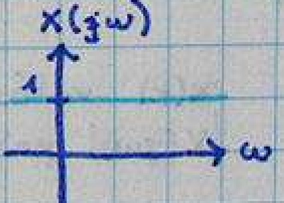
csak, ha $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt<\infty$ azaz x(t) abszolút integrálható

A spektrum értelmezése:

$$dx=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot X(j\omega)\cdot d\omega}_{\text{komplex amplitúdó}}\cdot\underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{„szinuszos" jel}}$$

$\frac{1}{2\pi}\cdot X(j\omega)$ az x(t) jel (komplex) amplitúdó sűrűsége

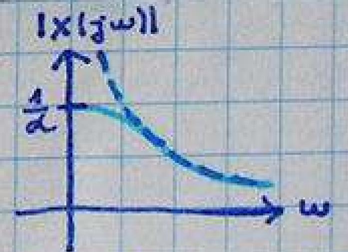
3.) Néhány abszolút integrálható jel spektruma



a.) $x(t)=\delta(t)\ \Rightarrow\ \mathcal{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=1$

b.) $x(t)=\varepsilon(t)\cdot e^{-\alpha t}\ \Rightarrow\ x(j\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+j\omega}$

$\alpha\in\mathbb{R}_+$



Felbontás: $X(\omega)=|X(j\omega)|$ amplitúdóspektrum $|x(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$

$\varphi(\omega)=\text{arc}\,X(j\omega)$ fázisspektrum

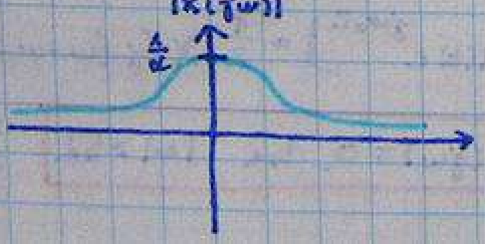
$\omega=0:\ \frac{1}{\alpha}$

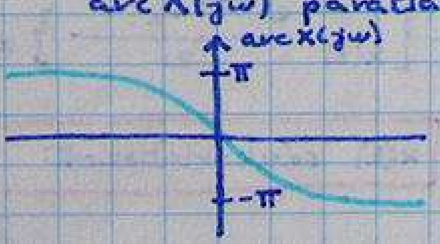
$\omega>>\alpha:\ \frac{1}{\omega}$

$\text{arc}\,X(j\omega)=0-\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

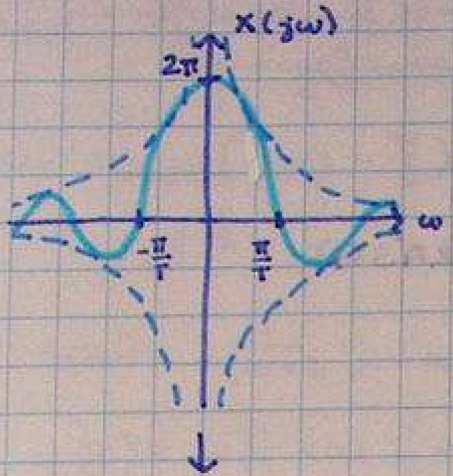
$X(-j\omega)=X^*(j\omega)\ \Rightarrow\ |X(j\omega)|$ páros

arc X(jω) páratlan





c.) $x(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)$



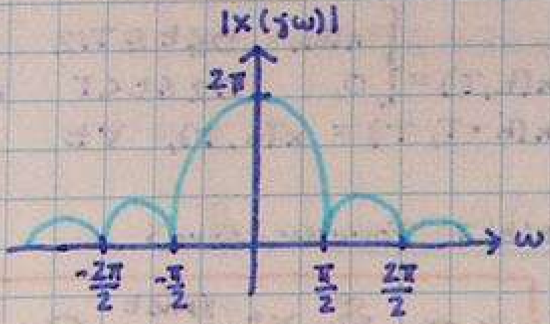
$$\Rightarrow X(j\omega) = \int_{-T}^{T} 1 e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T}^{T} = \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j}$$

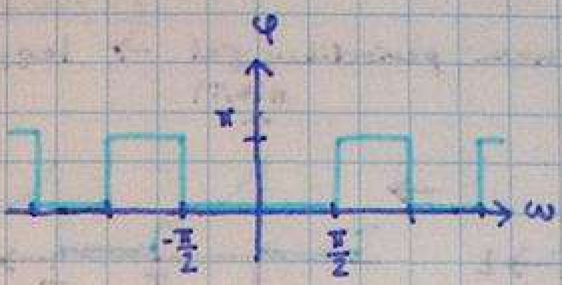
$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin\omega T = 2T\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega T}$$ valós

Zérushelyek: $\omega T = k\pi$

$\omega = k\frac{\pi}{T}, \; k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Burkológörbe: $G(\omega) = \pm\frac{2}{\omega}$





$x(t) = \delta(t)$	$\Rightarrow$	$X(j\omega) = 1$
$x(t) = \varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$	$\Rightarrow$	$X(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$
$x(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)$	$\Rightarrow$	$X(j\omega) = 2T\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega T}$

4.) Nem abszolút integrálható jelek spektruma

a.) $x(t) = 1 \Rightarrow X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$

b.) $x(t) = \mathrm{sgn}(t) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$

c.) $x(t) = \varepsilon(t) \Rightarrow X(j\omega) = \mathcal{F}\{\frac{1}{2}\} + \mathcal{F}\{\mathrm{sgn}t \cdot \frac{1}{2}\} = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega},$ mert $\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$

5.) Tételek

a.) Linearitás: $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}^{-1}$ lineáris, tehát pl. $\mathcal{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1\mathcal{F}\{x_1(t)\} + c_2\mathcal{F}\{x_2(t)\}$

b.) Paritás: $x(t)$ valós $\Leftrightarrow$ $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$
$|X(j\omega)|$ páros, $\mathrm{arc}\,X(j\omega)$ páratlan

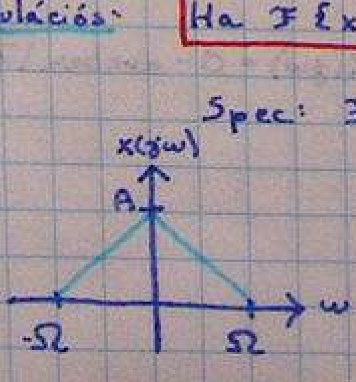
$x(t)$ páros $\Leftrightarrow$ $X(j\omega)$ valós
$x(t)$ páratlan $\Leftrightarrow$ $X(j\omega)$ képzetes

c.) Eltolási: $\mathcal{F}\{x(t-T)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \cdot e^{-j\omega T}$

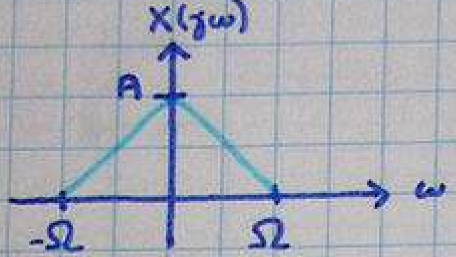
d.) Modulációs: Ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, akkor $\mathcal{F}\{x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} = X(j(\omega - \omega_0))$

Spec: $\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} =$

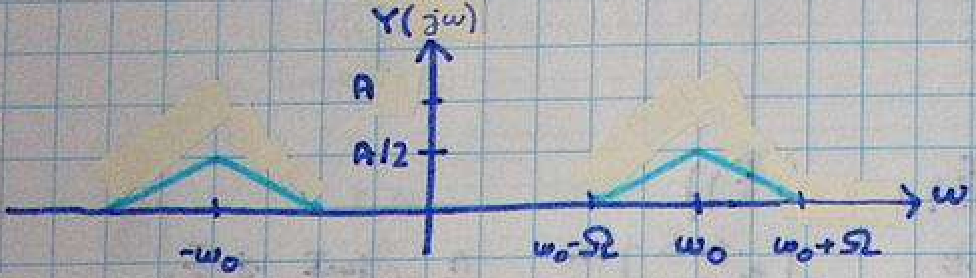
$$= \mathcal{F}\left\{x(t)\,\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{x(t)\,e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2} \cdot X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_0))$$



$x(t)$ sávkorlátozott $\Leftrightarrow$ $X(j\omega) = 0$, ha $|\omega| > \Omega$



moduláció: $\omega_0 > 2\Omega, \; y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$



f.) **Deriválási:** $\boxed{\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega \, \mathcal{F}\{x(t)\}}$

g.) **Konvolúciósi:** $\boxed{\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(j\omega) \cdot Y(j\omega)}$

h.) **Parceval:**

$$\boxed{E_x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega}$$

x(t) energiaspektruma: $|X(j\omega)|^2$

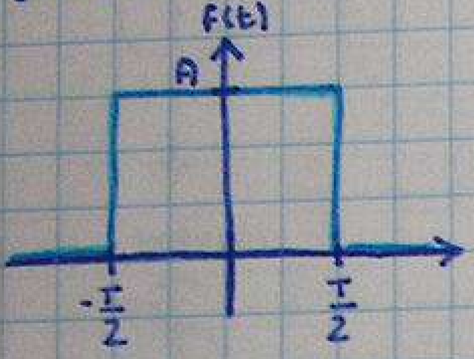
$\boxed{2008.11.06.}$ 11

GYAKORLAT

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega)$ (valós → komplex)

$F(j\omega)\Big|_{j\omega=t} \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = g(t)\Big|_{t=j\omega}$

$\boxed{P1}$ a)



$$f(t) = A\left(\varepsilon\left(t+\frac{T}{2}\right) - \varepsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)$$

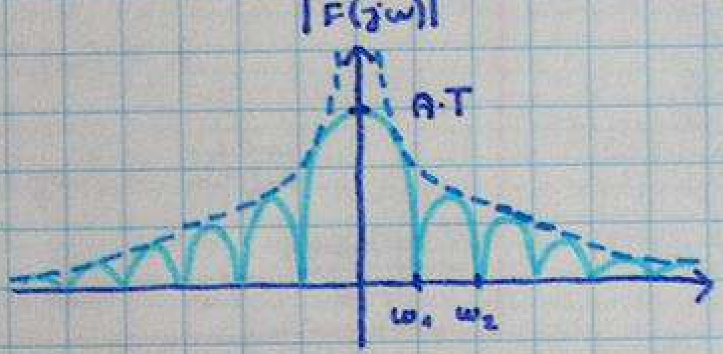
$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} A\, e^{-j\omega t}\, dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2AT}{j\omega}\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right) = AT\cdot\frac{\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)}{\omega\frac{T}{2}}$$

$$K(\omega) = |F(j\omega)| = AT\cdot\frac{\left|\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right|}{\left|\omega\frac{T}{2}\right|}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arc}(F(j\omega)) = \mathrm{arc}\left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right) - \mathrm{arc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$f(t)$ valós → $|F(j\omega)|$ páros (ω)
$\mathrm{arc}(F(j\omega))$ páratlan
$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}$ páros
$\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}$ páratlan
$F(j\omega) = F^*(-j\omega)$

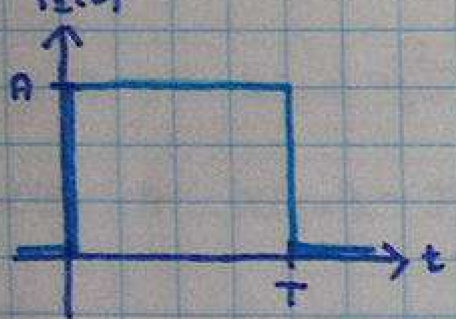


$\frac{\omega T}{2} = nT$

⇓

$\omega_n = n\cdot\frac{2\pi}{T}$

b.)



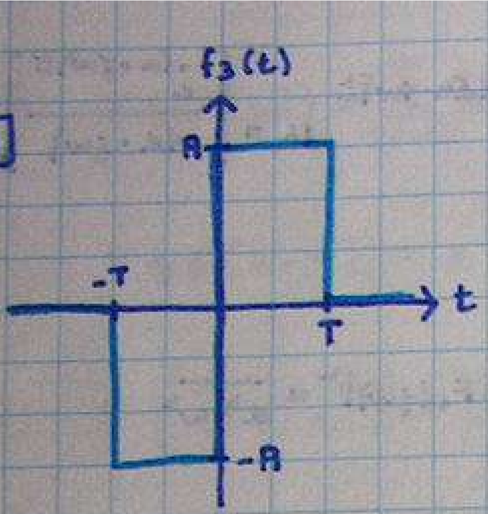
$f_2(t) = f\left(t - \frac{T}{2}\right)$

$$\mathcal{F}\{f(t-T_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T_0)\, e^{-j\omega(t-T_0)} \cdot e^{-j\omega T_0}\, dt =$$

$$= e^{-j\omega T_0}\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-T_0)\, e^{-j\omega(t-t_0)}\, d(t-t_0)}_{\mathcal{F}\{f(t)\}} = e^{-j\omega T_0}\cdot \mathcal{F}(j\omega)$$

$$F_2(j\omega) = e^{-j\omega\frac{T}{2}}\cdot A\cdot\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}$$

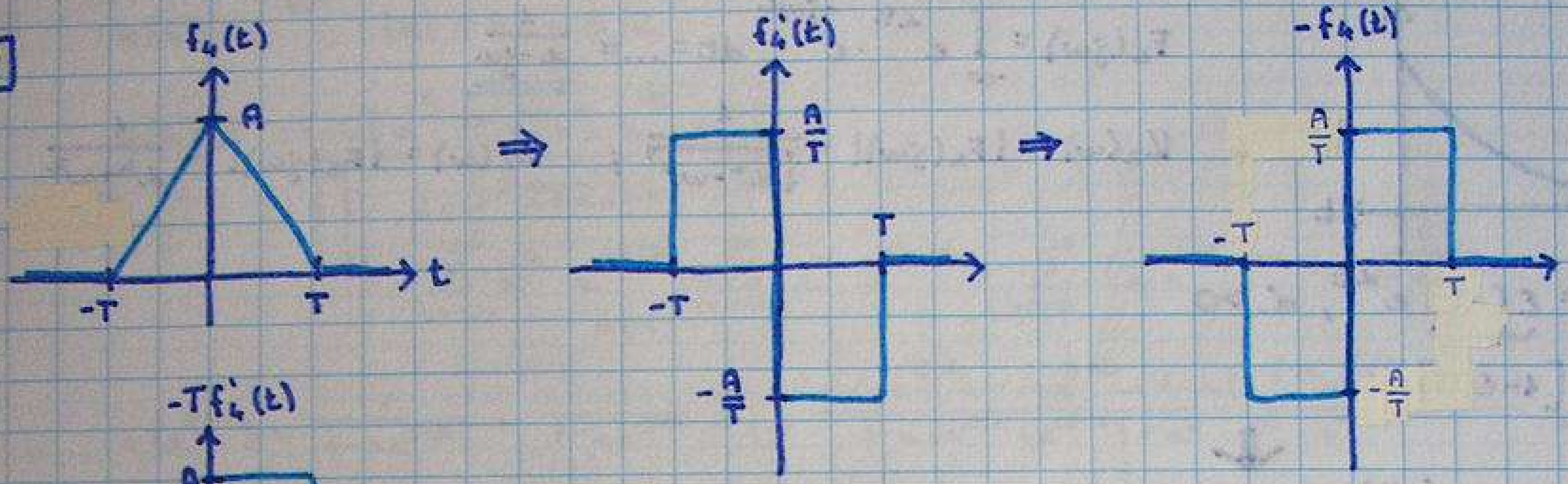
$\boxed{\text{P1}}$

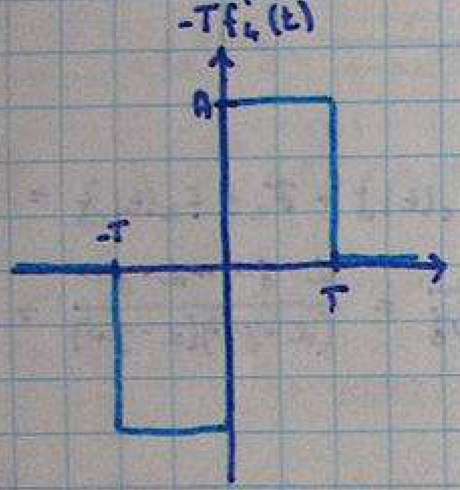


$$F_3(j\omega)= 2A\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}\cdot\left(\underbrace{-e^{j\omega\frac{T}{2}}}_{\leftarrow\frac{T}{2}}+\underbrace{e^{-j\omega\frac{T}{2}}}_{\frac{T}{2}\rightarrow}\right)=2j\cdot 2A\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}\cdot\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)=$$

$$\underline{=-4jA\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}}$$

$\boxed{\text{P1}}$





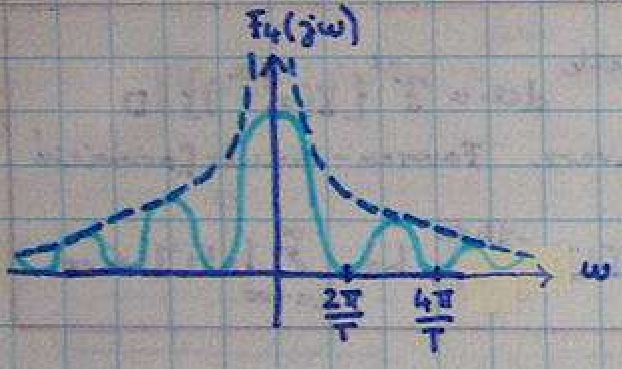
$$\mathcal{F}\{f'(t)\}=j\omega F(j\omega)$$

$$-T f_4'(t)=f_3(t)$$

$$f_4'(t)=\frac{1}{T}f_3(t)\ \xrightarrow{\mathcal{F}}\ j\omega F_4(j\omega)=-\frac{1}{T}F_3(j\omega)$$

$$\hookrightarrow F_4(j\omega)=-\frac{1}{j\omega T}\cdot F_3(j\omega)=\frac{4A}{\omega^2 T}\cdot\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)=AT\cdot\frac{\left(\sin\frac{\omega T}{2}\right)^2}{\frac{\omega^2T^2}{2}}=$$

$$\underline{=AT\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2}$$



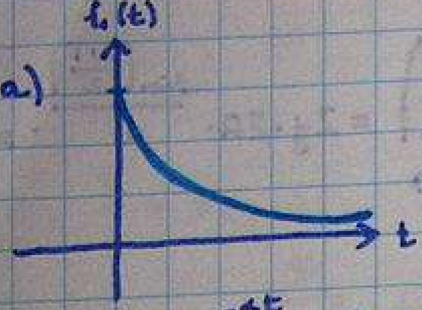
$\boxed{\text{P1}}$ $X(j\omega)=T\left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\right)^2$

x(t) valós, mert $X(-j\omega)=\left(X(j\omega)\right)^*$
x(t) páros, X(jω) valós

$$\left.\begin{array}{l}\text{folytonos,}\\ \text{de nem folytonos}\\ \text{differenciálható}\end{array}\right\}\ |X(j\omega)|\leq\frac{1}{T\omega^2}$$

$$X(j-0)=T=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\underbrace{e^{j0t}}_{1}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,dt$$

$\boxed{P1}$ a.)



$f_1(t) = \varepsilon(t)\cdot e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1-0}{\alpha+j\omega} = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$K_1(\omega) = |F_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \; ; \; E_1(\omega) = |F_1(j\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$

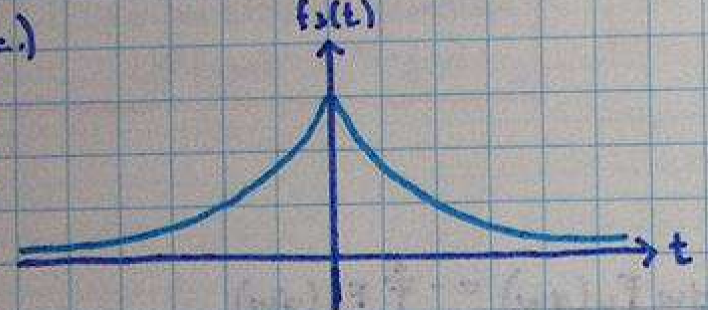
b.)

$f_2(t) = \underbrace{\varepsilon(-t)}_{[1-\varepsilon(t)]} e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$

$$F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \ldots = \frac{1}{\alpha - j\omega}$$

$$K_2(\omega) = |F_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \; ; \quad E_2(\omega) = |F_2(j\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$

c.)



$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = F_3(j\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}_2\{f_2(t)\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha+\omega j} + \frac{1}{\alpha-\omega j} = \frac{\alpha - j\omega + \alpha + j\omega}{(\alpha+j\omega)(\alpha-j\omega)} =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

DI Fourier transzformáció:

$$\boxed{\begin{array}{l} x[k] = \dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})\cdot e^{j\vartheta k}\,d\vartheta = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\} \\ \qquad\qquad\text{DI inverz Fourier-transzformáció} \\ X(e^{j\vartheta}) \equiv \mathcal{F}\{x[k]\} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,e^{-jk\vartheta}, \text{ ha } \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty \end{array}}$$

Tulajdonságok, tételek:

a.) $\mathcal{F}\{\ldots\}$ és $\mathcal{F}^{-1}\{\ldots\}$ lineáris

b.) $X(e^{j(\vartheta+2\pi)}) = X(e^{j\vartheta})$ (periodikus 2π-vel)

c.) $x[k]$ valós, $X(e^{j\vartheta}) = X^*(e^{-j\vartheta}) \rightarrow$ $|X(e^{j\vartheta})|$ ϑ páros,
$\left.\begin{array}{l}\Re\{X(e^{j\vartheta})\},\ \mathrm{Im}\{X(e^{j\vartheta})\}, \\ \mathrm{arc}(X(e^{j\vartheta}))\end{array}\right\}(\vartheta)$ páratlan

d.) $x[k] = x[-k]$ ($x[k]$ páros), $X(e^{j\vartheta}) = \mathrm{Re}\{X(e^{j\vartheta})\}$ (valós fv)

$x[k] = -x[k]$ ($x[k]$ páratlan), $X(e^{j\vartheta}) = \mathrm{Im}\{X(e^{j\vartheta})\}$ (tisztán képzetes fv)

e.) eltolási tétel: $\mathcal{F}\{x[k-r]\} = e^{-jr\vartheta}\cdot X(e^{j\vartheta})$

f.) modulációs tétel: $\mathcal{F}\{x[k]\,e^{j\vartheta_0 k}\} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)})$

g.) konvolúciós tétel: $\mathcal{F}\{f[k] * g[k]\} = \mathcal{F}\{f[k]\}\cdot\mathcal{F}\{g[k]\} = F(e^{j\vartheta})\cdot G(e^{j\vartheta})$

h.) Parseval tétel: $E_x = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2\,d\vartheta$

$\boxed{\text{Pl}}$ $$\mathcal{F}\{\delta[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] e^{-jk\omega} = 1$$

$$\mathcal{F}\{\delta[k-r]\} = e^{-jr\omega} \cdot 1 = e^{-jr\omega}$$

$\boxed{\text{Pl}}$ $$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^k \cdot e^{-jk\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^k = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \text{ ha } |a|<1$$

$\boxed{\text{Pl}}$ $$x[k] = a^{|k|}, \ |a|<1, \ a \in \mathbb{R}$$

$$x[k] = \underbrace{\varepsilon[-k] a^{-k}}_{} + \underbrace{\varepsilon[k] a^k}_{\mathcal{F} \Rightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}} \underbrace{-\delta[k]}_{\mathcal{F} \Rightarrow -1}$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=-\infty}^{0} a^{-k} \cdot e^{-jk\omega} \underset{m=-k}{=} \sum_{m=0}^{\infty} a^m \cdot e^{jm\omega} = \sum_{m=0}^{\infty} (a \cdot e^{j\omega})^m = \frac{1}{1-ae^{j\omega}}$$

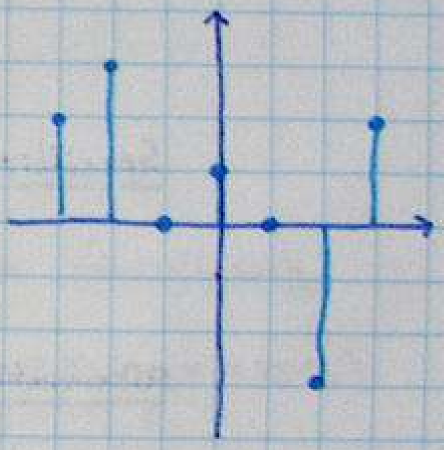
$$x(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} - 1 = \frac{1-ae^{-j\omega}+1-ae^{j\omega}-(1-a(e^{-j\omega}+e^{j\omega})+a^2)}{1-a(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+a^2 e^{-j\omega} \cdot e^{j\omega}} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

$\boxed{\text{Pl}}$ $$X(e^{j\omega}) = 1 + 4\cos 3\omega + 6j\sin 2\omega; \quad X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$\Downarrow$$

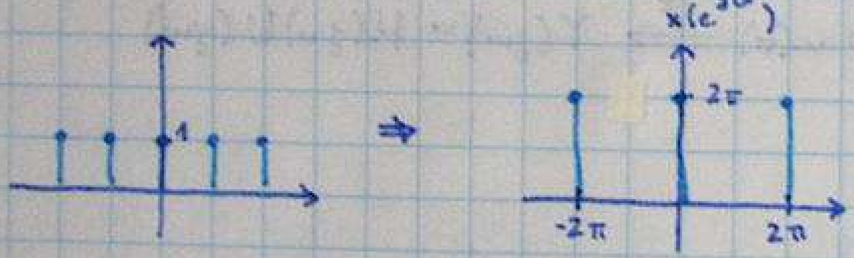
$$X(e^{j\omega}) = 1 + 4 \cdot \frac{e^{j3\omega}+e^{-j3\omega}}{2} + 6j \cdot \frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{2j} = 1 + 2(e^{j3\omega}+e^{-j3\omega}) + 3(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}) =$$

$$= \delta[k] + 3\delta[k+2] + 2\delta[k+3] - 3\delta[k-2] + 2\delta[k-3]$$



$\boxed{\text{Pl}}$ $$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) \cdot e^{jk\omega} \cdot d\omega = 1$$



$\boxed{\text{Pl}}$ $$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 k\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 k} + e^{-j\omega_0 k}\} = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)$$

dualitás: X periodikus; X "vonalas" (diszkrét)

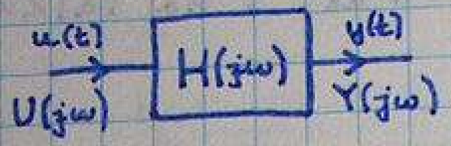
$x[k]$ "vonalas" ⇔ X periodikus

2008.11.11.

JELÁTVITEL VIZSGÁLATA A FREKVENCIA-TARTOMÁNYON

I. A válaszjel spektrális előállítása

a.) FI:

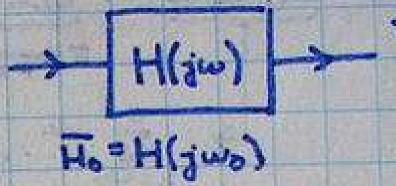


$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

ω = ω₀ komponens:

$$u_0(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot U(j\omega_0) \, d\omega \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot U(j\omega_0) \, d\omega$$



$$\overline{Y}_0 = \overline{H}_0 \cdot \overline{U}_0 = \frac{1}{2\pi} H(j\omega_0) U(j\omega_0) d\omega$$

$$y_0(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot H(j\omega_0) U(j\omega_0) \, e^{j\omega_0 t}$$

Szuperpozíció:

$$y(t) = \int y_0(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(j\omega) U(j\omega)}_{Y(j\omega)} \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) U(j\omega)\}$$

$$\boxed{Y(j\omega) = H(j\omega) U(j\omega)} \rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}}$$

Speciális eset: $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(j\omega) = 1 \Rightarrow y(t) \equiv h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega \cdot 1)\}$

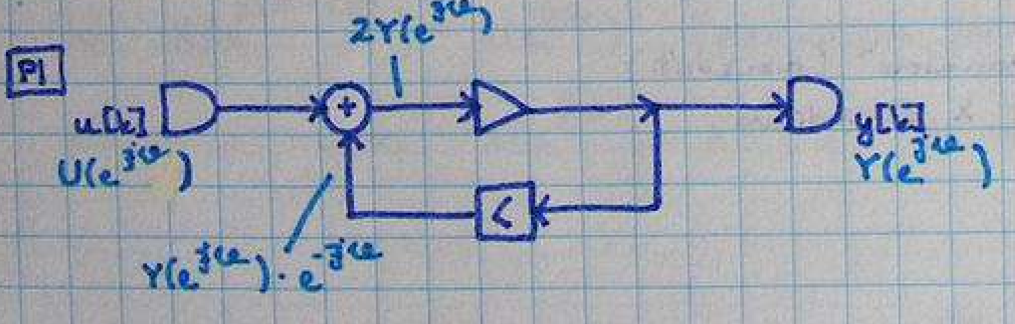
ekkor $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

Alternatív levezetés: $y(t) = h(t) * u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = H(j\omega) U(j\omega)$

b.) DI: $\boxed{Y(e^{j\vartheta}) = H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta})}$

$\boxed{H(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{h[k]\}}$

P



a.) $H(e^{j\vartheta}) = ?$

b.) $h[k] = ?$

c.) $Y(e^{j\vartheta}) = ?$, ha $u[k] = \varepsilon[k] \cdot (-0,5)^k$

a.) $2Y(e^{j\vartheta}) = e^{-j\vartheta} \cdot Y(e^{j\vartheta}) + U(e^{j\vartheta})$; $H(e^{j\vartheta}) = \frac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})} = \underline{\underline{\frac{0,5}{1-0,5 \cdot e^{-j\vartheta}}}}$

b) $h[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta})\} = \underline{\underline{0,5 \cdot \varepsilon[k] \cdot 0,5^k}}$

c.) $U(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1+0,5e^{-j\vartheta}}$

$$Y(e^{j\vartheta}) = H(e^{j\vartheta}) \cdot U(e^{j\vartheta}) = \frac{0,5}{1-0,5 \cdot e^{-j\vartheta}} \cdot \frac{1}{1+0,5 \cdot e^{-j\vartheta}} = \underline{\underline{\frac{0,5}{1-0,25 \cdot e^{-j2\vartheta}}}}$$

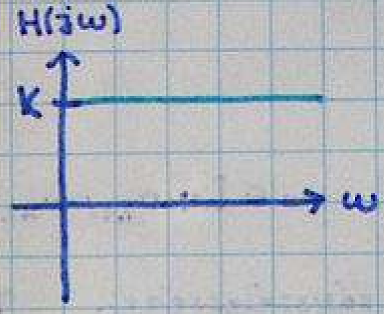
II. Sávszélesség

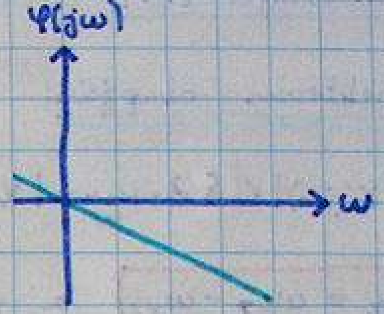
1.) Torzításmentes / Alakhű jelátvitel

a.) **Kritérium:** $y(t) = K\cdot u(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = K\cdot U(j\omega)e^{-j\omega\tau} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = K\cdot e^{-j\omega\tau}}$

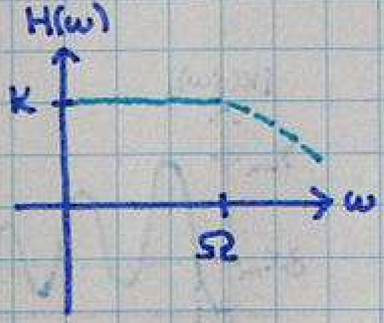
$$\boxed{\begin{array}{l} H(\omega) \equiv |H(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) \equiv \operatorname{arc} H(j\omega) = -\omega\tau \\ \tau(\omega) \equiv d\varphi/d\omega = \tau \end{array}}$$

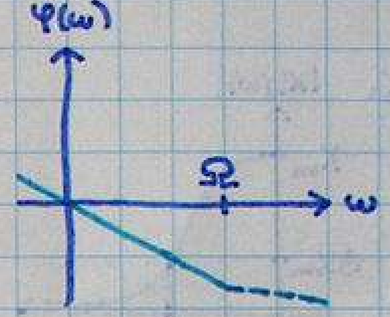
Lineáris fázisú mindent áteresztő rendszer





b.) **Gyakorlatban:**





elég, ha valamilyen sávban érvényes

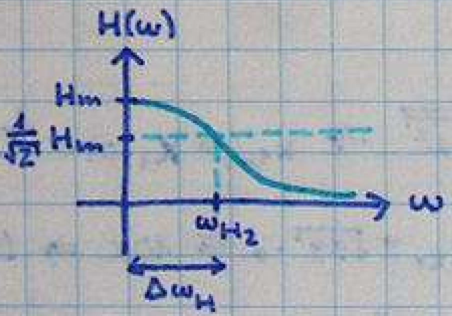
2.) A rendszer sávszélessége

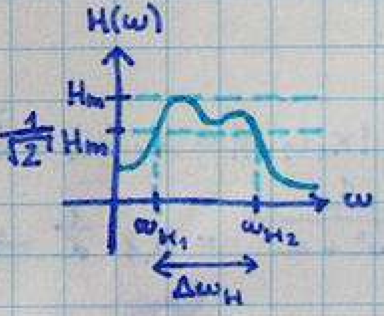
a.) **Def:** Ha $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\cdot H_m \leq H(\omega) \leq H_m$, $\omega \in [\omega_{H1}; \omega_{H2}] \subset \mathbb{R}_+$, akkor

$\boxed{[\omega_{H1}; \omega_{H2}]}$ az áteresztő tartomány, $\boxed{\Delta\omega_H = \omega_{H2} - \omega_{H1}}$ a sávszélesség,

ahol: $H(\omega) = |H(j\omega)|$, $H_m = \max H(\omega)$; $\varepsilon = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB}\ (\approx 0{,}7 \rightarrow 70\%)$

Illusztráció:





b.) **Példák:**

$\boxed{\text{Pl}}$ $H(j\omega) = \frac{3}{j\omega+2}$, $\Delta\omega_H = ?$ $(\varepsilon = 1) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$H(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{3}{\sqrt{(j\omega)^2+2^2}} = \frac{3}{4+\omega^2} \Rightarrow H_m \equiv \max_{\omega} H(\omega) = H(0) \equiv 1{,}5$

Metszéspontok: $\frac{3}{\sqrt{4+\omega_H^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1{,}5 \rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{4+\omega_H^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{4} \rightarrow 8 = 4+\omega_H^2$

$\omega_H = 2$ (csak pozitív megoldás)

$\Rightarrow \Delta\omega_H = 2 - 0 = \underline{\underline{2}}$

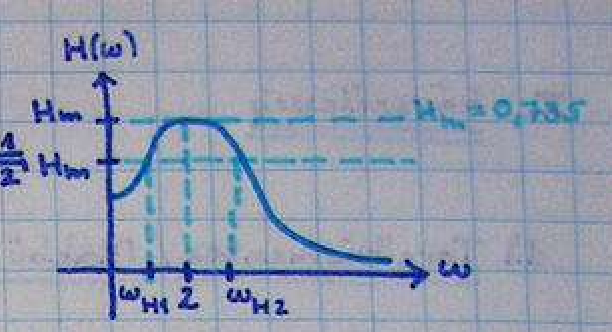
$\boxed{\text{Pl}}$ $H(j\omega) = \frac{5}{(j\omega)^2+2(j\omega)+1}$, $\Delta\omega_H = ?$ $(\varepsilon = 1) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

$H(j\omega) = \frac{5}{(j\omega+1)^2} \Rightarrow H(\omega) = \frac{5}{\omega^2+1} \Rightarrow H_m = H(0) = 5$

Metszéspontok: $\frac{5}{\omega_H^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 5 \rightarrow \omega_H = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cong \underline{\underline{0{,}64}} = \Delta\omega_H$ $(\omega_{H1} = 0,\ \omega_{H2} = 0{,}64)$

Pl $H(j\omega)=\frac{2j\omega+2}{(j\omega)^2+3(j\omega)+5}$, $\Delta\omega_H=?$ $(\varepsilon=1)$ $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

$H(\omega)=\sqrt{\frac{4+4\omega^2}{(5-\omega)^2+9\omega^2}} \Rightarrow H_m=\max_\omega H(\omega)=\ldots=H(2)=0,735$



$\omega_{H1}\cong 0,7;\ \omega_{H2}\cong 3,8$

$\Delta\omega_H=\omega_{H2}-\omega_{H1}=\underline{\underline{3,1}}$

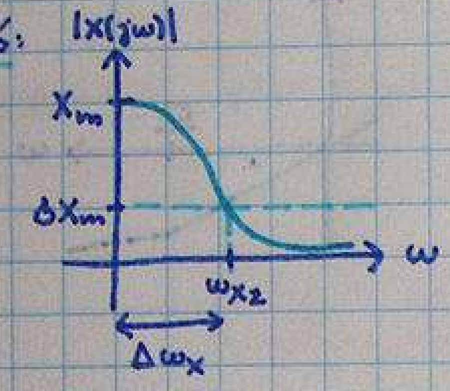
3.) A jel sávszélessége (FI)

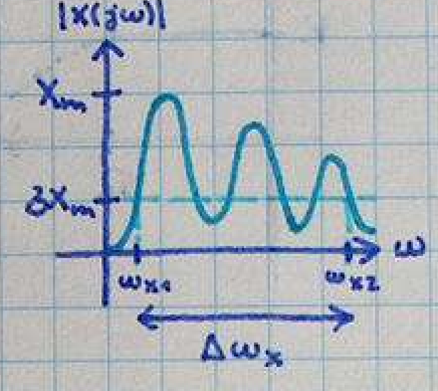
a.) Amplitúdóspektrum alapján:

Def: Ha $|X(j\omega)|<\delta\cdot\max_\omega|X(j\omega)|$, $\omega\in[\omega_{x1};\omega_{x2}]\subset\mathbb{R}_+$, akkor

$\boxed{\Delta\omega_x=\omega_{x2}-\omega_{x1}}$ a jel sávszélessége. Tipikusan: $\delta=0,1$ (10%)
$\delta=0,01$ (1%)

Illusztráció:



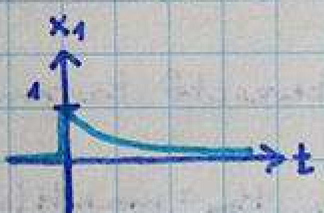


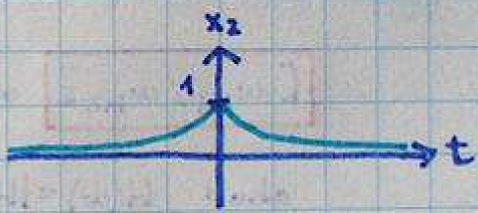
b.) Példák

Pl $\left.\begin{array}{l} x_1(t)=\varepsilon(t)\cdot e^{-\alpha t} \\ x_2(t)=e^{-\alpha|t|}\end{array}\right\}\ \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>0$

$\delta=0,1$

$\Delta\omega_1=?,\ \Delta\omega_2=?$





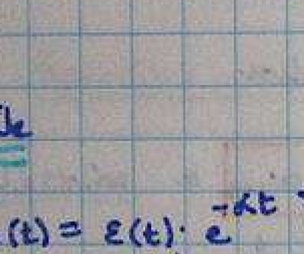
a.) $X_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\alpha} \rightarrow |X_1(j\omega)|=X_1(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}} \rightarrow x_{1m}=X_1(0)=\frac{1}{\alpha}$

Metszéspontok: $\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}=0,1\cdot\frac{1}{\alpha} \rightarrow \omega_{x1}=\sqrt{99}\cdot\alpha\cong 10\alpha \Rightarrow \Delta\omega_{x1}\cong\underline{\underline{10\alpha}}$

b.) $X_2(j\omega)=\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}=X_2(\omega)\rightarrow X_{2m}=X_2(0)=\frac{2}{\alpha}$

Metszéspontok: $\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}=0,1\cdot\frac{2}{\alpha}\rightarrow\omega_{x2}=3\alpha\Rightarrow\Delta\omega_{x2}\cong\underline{\underline{3\alpha}}$

Pl



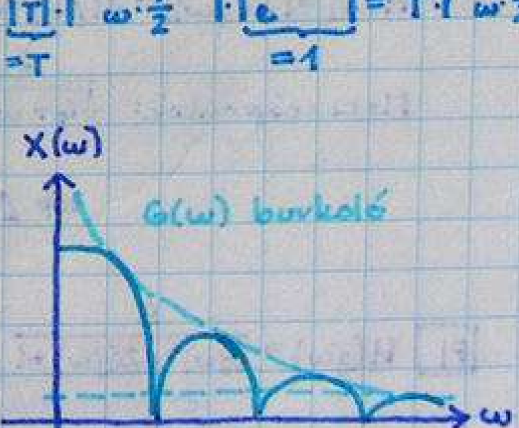
$X(j\omega)=2\cdot\frac{T}{2}\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\cdot\frac{T}{2}}\cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}} \Rightarrow X(\omega)=\underbrace{|T|}_{=T}\cdot\left|\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\cdot\frac{T}{2}}\right|\cdot\underbrace{\left|e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right|}_{=1}=T\cdot\left|\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\cdot\frac{T}{2}}\right|$

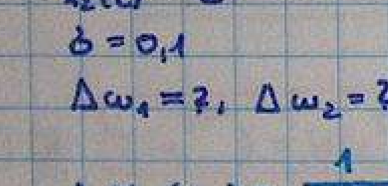
$\rightarrow X_m=X(0)=T\cdot 1=T$

Metszéspontok: $T\cdot\left|\frac{\sin(\omega_x\frac{T}{2})}{\omega_x\frac{T}{2}}\right|=0,1T$

$\Leftrightarrow$ helyette: $G(\omega)=T\cdot\left|\frac{\pm 1}{\omega_x\cdot\frac{T}{2}}\right|=0,1T$

$\Rightarrow \omega_x=\pm\frac{20}{T}\Rightarrow\Delta\omega_x=\underline{\underline{\frac{20}{T}}}$

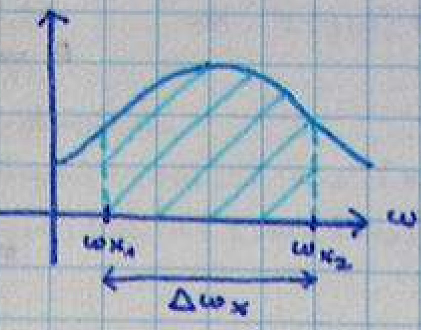




$X_1(j\omega)=2T\cdot\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$

$\boxed{2008.11.13.}$

c.) Energiaspektrum alapján



$$\boxed{E_x(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot |X(j\omega)|^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega_{x1}}^{\omega_{x2}} |X(j\omega)|^2 = \delta E_x}$$

pl.: $\delta = 0,9$ (90%)

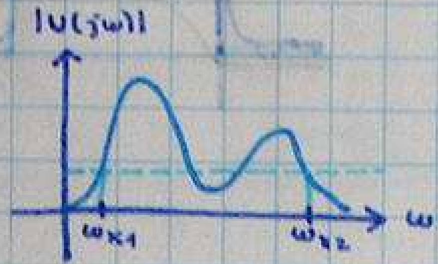
+ feltétel: ω_{x1}-re, vagy $\frac{\omega_{x1}+\omega_{x2}}{2}$-re, stb

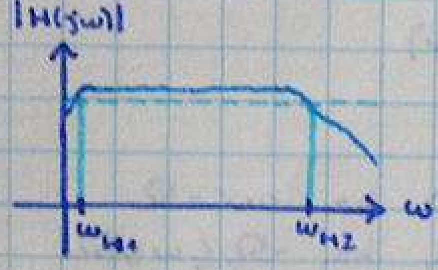
III. Az átvitel jellemzése

1.) Jó átvitel

ha $[\omega_{x1}; \omega_{x2}] \subset [\omega_{H1}; \omega_{H2}]$, mert $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$,
$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |U(j\omega)|$

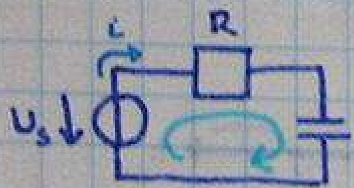
szemléltetés:

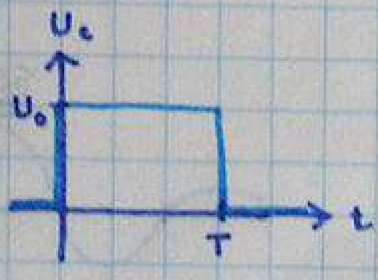




$$\boxed{\Delta\omega_x \leq \Delta\omega_H}$$

2.) Példa

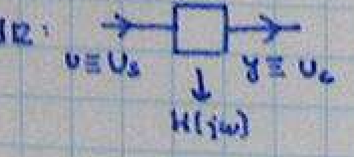




jó átvitel ⇒ R, C = ?

a.) Kirchoff: $-U_s + Ri + U_c = 0$
Kondenzátor töltése: $q = C \cdot U_c$

$$\left.\begin{array}{l} i \equiv \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_c}{dt} \end{array}\right\} -U_s + RC \cdot \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0$$



J: $-U(j\omega) + RC \cdot j\omega \cdot Y(j\omega) + Y(j\omega) = 0$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

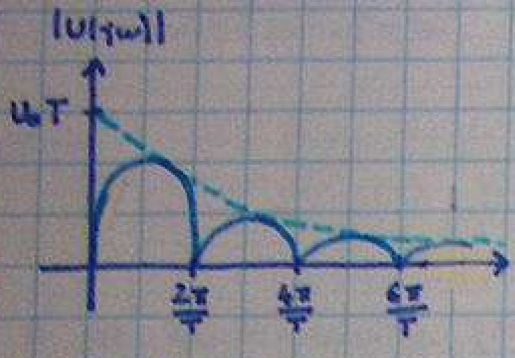
Sávszélesség: $H(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \rightarrow H_m = \max_{\omega} H(\omega) = H(0) = 1$

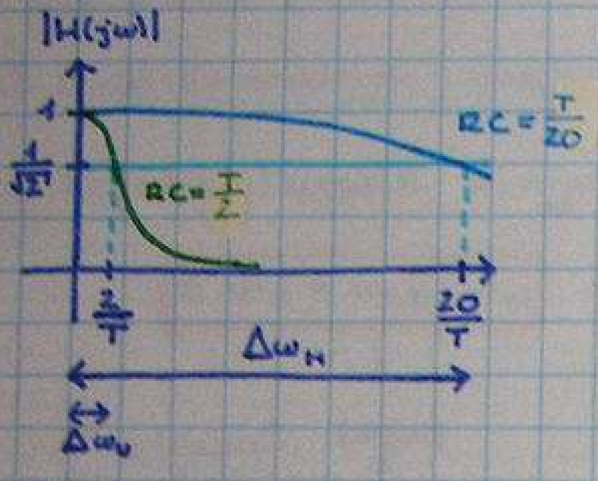
Metszéspont: $\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \rightarrow \omega_H = \pm \frac{1}{RC} \rightarrow \Delta\omega_H = \frac{1}{RC}$

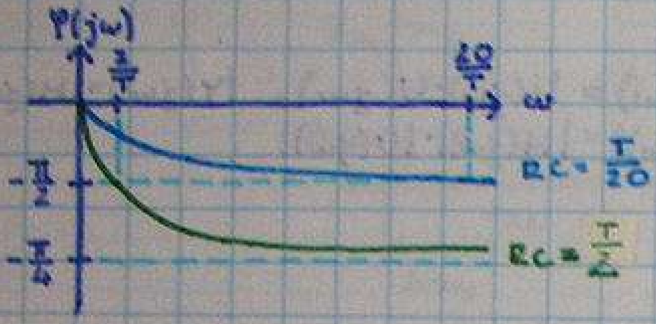
b.) $U(j\omega) = U_0 T \cdot \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}} \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}}$ → Sávszélesség: $\Delta\omega_u = \frac{20}{T}$ (lásd: korábbi órán)

c.) Kritérium: $\Delta\omega_u < \Delta\omega_H \rightarrow \frac{20}{T} < \frac{1}{RC} \rightarrow \underline{RC < \frac{T}{20}}$

d) Összehasonlitás: $RC = \frac{T}{20}$ és $RC = \frac{T}{2}$







A válaszjel:

$$u(t) = U_0\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right] = U_0\,\varepsilon(t) - U_0\,\varepsilon(t-T)$$

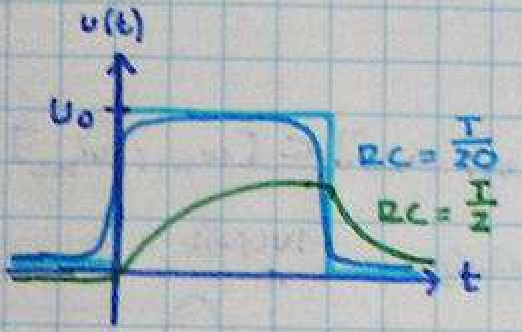
$\Rightarrow$ $y(t) = U_0 \cdot g(t) - U_0 \cdot g(t-T)$, g: ugrásválasz

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega RC}\right\} =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}\right\} = \varepsilon(t)\cdot\frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$g(t) = \int_{-t}^{t} h(\tau)\,d\tau = \varepsilon(t)\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

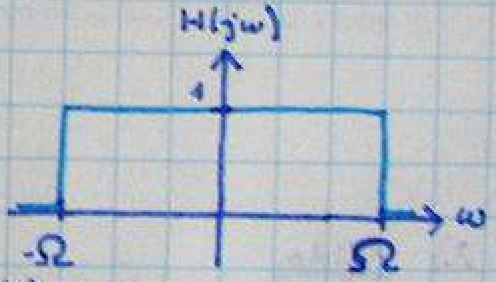
$$y(t) = \varepsilon(t)\cdot U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - \varepsilon(t-T)\,U_0\left(1 - e^{-\frac{t-T}{RC}}\right)$$



2.) Aluláteresztő szűrő (LPF: low pass filter)

a) Ideális aluláteresztő

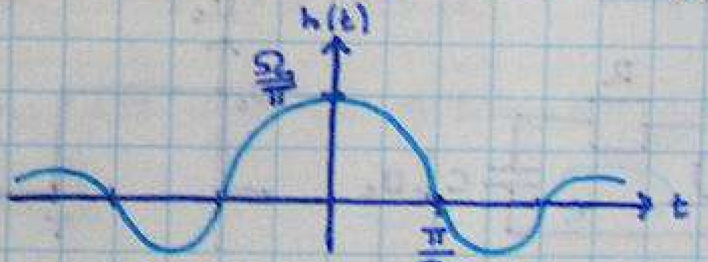
$$H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega < -\Omega \\ 1, & \text{ha } -\Omega \le \omega \le \Omega \\ 0, & \text{ha } \omega > \Omega \end{cases}$$



$$H(j\omega) = \varepsilon(\omega+\Omega) - \varepsilon(\omega-\Omega)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} 1\cdot e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{\Omega}{\pi}\cdot\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}$$

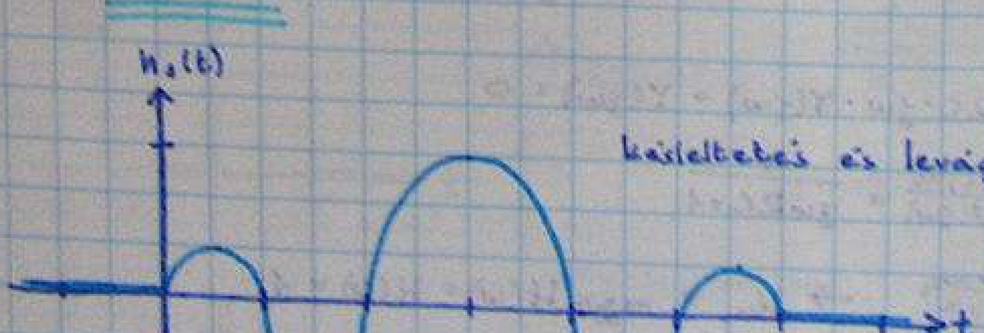
$$\Omega t = k\pi,\quad t = k\frac{\pi}{\Omega},\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$



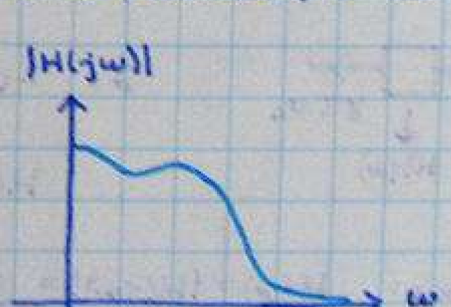
h(t) nem belépő ⇒ a rsz. nem kauzális

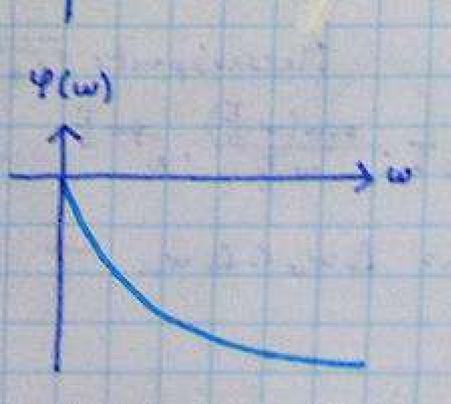
h(t) nem absz. int. ⇒ a rsz. nem G-V stabilis

b) Közelítés



késleltetés és levágás





c.) Alkalmazás

- demoduláció

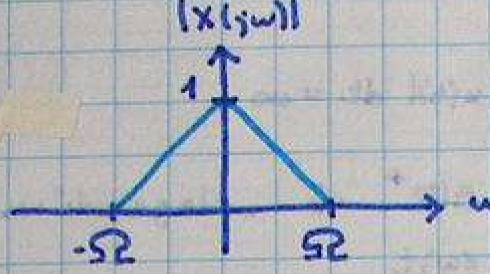
moduláció: $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$ → $Y(j\omega) = \frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_0))$

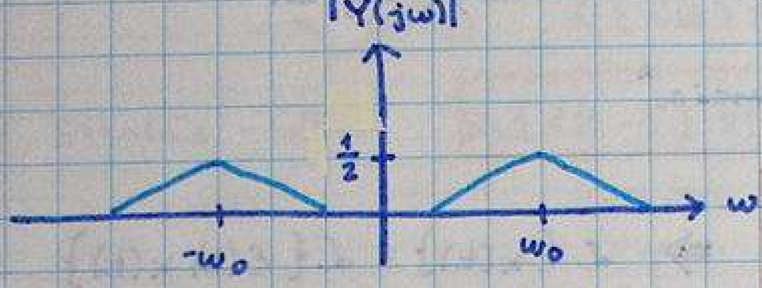
$\cos(\omega_0 t)$ vivőjel

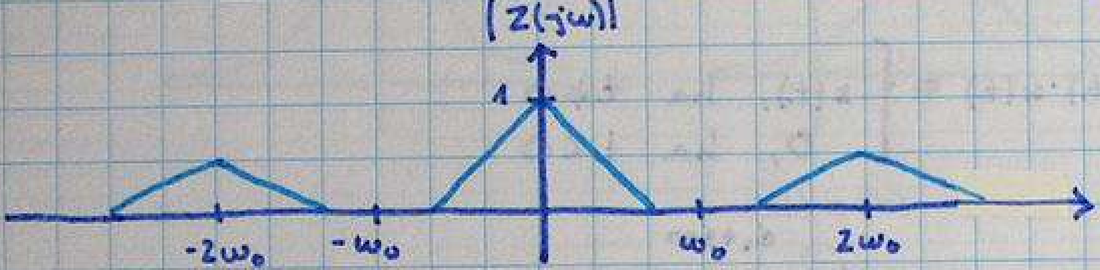
ω_0 vivőfrekvencia

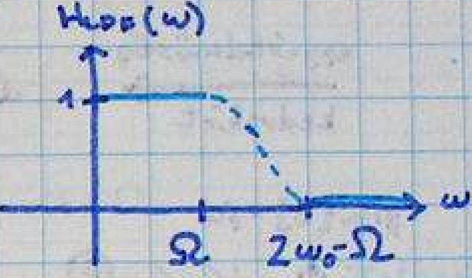
demoduláció: $z(t) = y(t)\cdot 2\cdot\cos(\omega_0 t) = x(t)\cdot 2\cdot\cos^2(\omega_0 t) = x(t)[1+\cos(2\omega_0 t)]$

→ $Z(j\omega) = X(j\omega) + \frac{1}{2}X(j(\omega+2\omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega-2\omega_0))$









2008. 11. 18.

ANALÍZIS A KOMPLEX FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

csüt: helyettesítés
eredmény

I. A FI Laplace – transzformáció

1.) Alapgondolat:

tfh. $x(t)$ jel, nem absz. integrálható: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt = \infty$

$\mathcal{F}\{x(t)\}$ helyett $\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\,x(t)\cdot e^{-\sigma t}\}$, ahol $\sigma \in \mathbb{R}^+$ és „elegendően nagy"

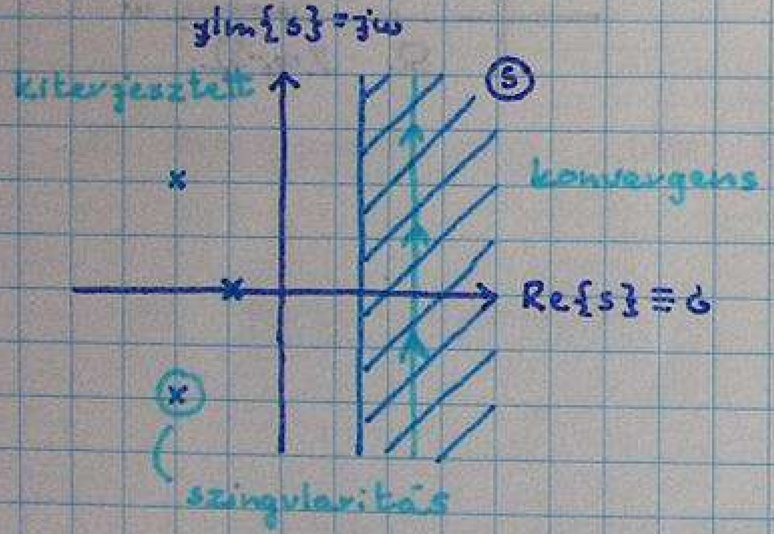
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(t)\cdot x(t)\cdot e^{-\sigma t}]\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-0}^{\infty} x(t)\cdot e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt,$$

legyen $s = \sigma + j\omega$ a „komplex frekvencia"

2.) Def:

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}\,dt} \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\,x(t)\}$$

$$\xrightarrow[\text{kedvéért}]{\text{egyértelműség}} \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \varepsilon(t)\cdot x(t) = \begin{cases} x(t), & \text{ha } t \geq 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\cdot\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty} X(s)\cdot e^{st}\,ds,\quad \sigma_1 \text{ „elegendően nagy"}$$

(nem használjuk)

3.) Néhány példa:

a.) $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-st}\,dt = \cancel{0}\,1$

b.) $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t)\cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$

c.) $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cdot e^{-\alpha t}\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t)\cdot e^{-\alpha t}\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \cancel{0}\,1 \\ &\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \\ &\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cdot e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s+\alpha} \end{aligned}}$$

4.) Tételek

a.) $\mathcal{L}\{\}$ és $\mathcal{L}^{-1}\{\}$ lineáris $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\}$

b.) Csillapítási - tétel: $\boxed{\mathcal{L}\{x(t)\cdot e^{-\alpha t}\} = X(s+\alpha)}$

pl.: $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cdot\cos\Omega t\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}\varepsilon(t)\cdot(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})\} =$

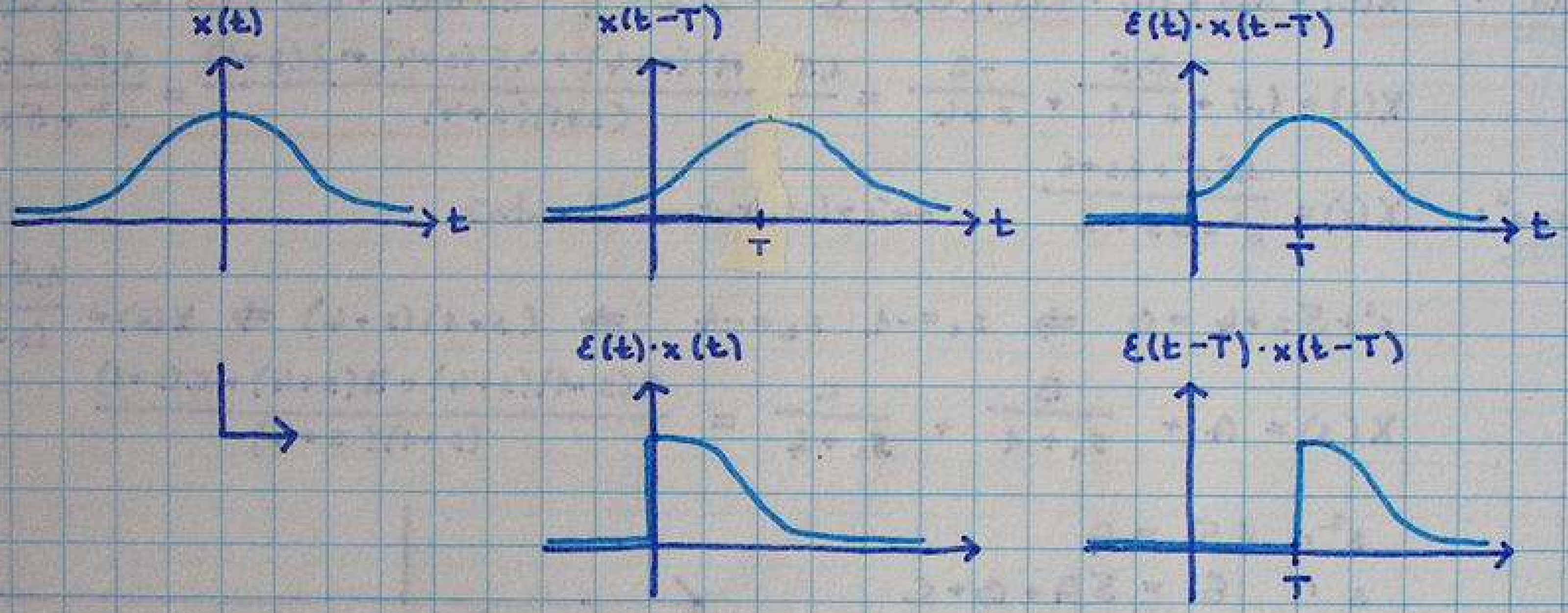
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cdot e^{j\Omega t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cdot e^{-j\Omega t}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}\Big|_{s\leftarrow s-j\Omega} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}\Big|_{s\leftarrow s+\Omega} =$$

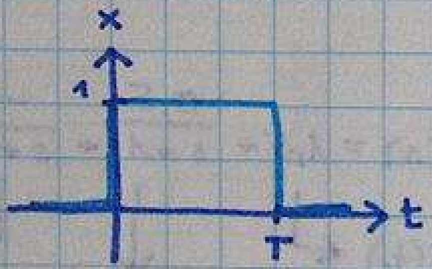
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-j\Omega} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+j\Omega} = \frac{s}{s^2+\Omega^2}$$

ugyanígy: $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\sin\Omega t\} = \frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}$

c.) Eltolási - tétel: $\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t-T)\cdot x(t-T)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}\cdot e^{-sT}}$



Pl



$x(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)$

$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\cdot e^{-sT} = \frac{1}{s}(1-e^{-sT})$

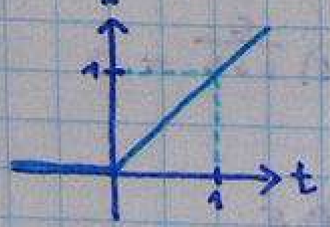
d.) Deriválási - tétel: $\boxed{\mathcal{L}\{x'(t)\} = s\,X(s) - x(t=-0)}$

Biz: $\int_{-0}^{\infty} x'(t)e^{-st}dt = [x(t)e^{-st}]_{-0}^{\infty} + \int_{-0}^{\infty} x(t)\cdot se^{-st}\,dt = -x(t=-0) + sX(s)$ QED

Spec: ha $x(t)$ belépő $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s)$

e.) Integrálási - tétel: $\boxed{\mathcal{L}\{\int_{-0}^{t} x(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}\cdot X(s)}$

pl.: sebességugrás



$x(t) = \varepsilon(t)\cdot t$

$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cdot t\} = \mathcal{L}\{\int_{-0}^{\infty}\varepsilon(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

f.) **Kezdeti- és végérték-tétel** (ellenőrzésre)

Ha $x(+0)$ létezik, $x(+0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot X(s)$ (formálisan $s \in \mathbb{R}^+$)

Ha $x(+\infty)$ létezik, $x(+\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s)$

g.) **Konvolúció**

Ha $f(t)$ és $g(t)$ belépő, akkor $\boxed{\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)\cdot G(s)}$

II. A FI Laplace-transzformáció megfordítása

1.) **Példa:**

a.) „oda": $x(t) = 1{,}5\,\delta(t) + \varepsilon(t)\left(0{,}5\cdot e^{-1t} - 2\cdot e^{-4t}\right) = 1{,}5\,\delta(t) + 0{,}5\cdot\varepsilon(t)\cdot e^{-1t} - 2\,\varepsilon(t)\cdot e^{-4t}$

$$X(s) = 1{,}5 + \frac{0{,}5}{s+1} + \frac{-2}{s+4} = \frac{1{,}5(s+1)(s+4) + 0{,}5(s+4) - 2(s+1)}{(s+1)(s+4)} = \frac{1{,}5s^2+6s+6}{s^2+5s+4}$$

b.) „vissza": $X(s) = \frac{1{,}5s^2+6s+6}{s^2+5s+4}$ részlettörtre bontás

$$s^2+5s+4=0 \Rightarrow s_1=-1,\ s_2=-4 \Rightarrow (s+1)(s+4) \Rightarrow X(s) = \frac{1{,}5s^2+6s+6}{(s+1)(s+4)}$$

$$X(s) = A + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4} = \frac{A(s+1)(s+4)+B(s+4)+C(s+1)}{(s+1)(s+4)}$$

s^2: $1{,}5 = A$
s: $6 = 5A+B+C$
1: $6 = 4A+4B+C$

$\Downarrow$

$$A=1{,}5,\quad B=0{,}5,\quad C=-2 \Rightarrow X(s) = 1{,}5 + \frac{0{,}5}{s+1} + \frac{-2}{s+4}$$

$1{,}5\,\delta(t)$ $\quad$ $0{,}5\,\varepsilon(t)\cdot e^{-1t}$ $\quad$ $-2\,\varepsilon(t)\cdot e^{-4t}$

$$x(t) = 1{,}5\,\delta(t) + 0{,}5\,\varepsilon(t)\cdot e^{-1b} - 2\,\varepsilon(t)\cdot e^{-4t}$$

a számláló és nevező fokszáma mindig meg kell egyezzen
(ill. nevező $\geq$ számláló)

c.) „letakarásos módszer"

$$\lim_{s\to\infty} X(s) = \underset{\downarrow\ A}{\lim_{s\to\infty} A} + \underset{\downarrow\ 0}{\lim_{s\to\infty} \frac{B}{s+1}} + \underset{\downarrow\ 0}{\lim_{s\to\infty} \frac{C}{s+4}} = 0$$

$$\Rightarrow A = \lim_{s\to\infty} \frac{1{,}5s^2+6s+6}{s^2+5s+4} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$$

$$\lim_{s\to -1} (s+1)\,X(s) = \lim_{s\to -1} (s+1)A + \lim_{s\to -1} (s+1)\frac{B}{s+1} + \lim_{s\to -4} (s+1)\frac{C}{s+4} = B$$

$$\Rightarrow B = \lim_{s\to -1} \frac{1{,}5s^2+6s+6}{(s+1)(s+4)}\cdot(s+1) = \frac{1{,}5s^2+6s+6}{s+4}\bigg|_{s=-1} = 0{,}5$$

$$\lim_{s\to -4}(s+4)\,X(s) = C \quad \Rightarrow \quad C = \left.\frac{1{,}5s^2+6s+6}{s+1}\right|_{s=-4} = -2$$

módszer feltétele: egyszeres gyökök

2.) Kifejtési-tétel (Heaviside)

tfh. $X(s)$ racionális törtfüggvény egyszeres gyökökkel a nevezőben

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}, \quad n \geq m$$

$$P(p_i) = 0, \; i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow\; X(s) = \frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)} = K + \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

$$\boxed{K = \begin{cases} b_0, & \text{ha } n=n \\ 0, & \text{ha } n>m \end{cases} \qquad c_i = \left.\frac{Q(s)}{P(s)/(s-p_i)}\right|_{s=p_i}}$$

Ekkor: $\boxed{x(t) = K\delta(t) + \varepsilon(t)\left(c_1\cdot e^{p_1 t} + c_2\cdot e^{p_2 t} + \ldots + c_n\cdot e^{p_n t}\right)}$

$\boxed{2008.11.20.}$

Laplache-transzformáció:

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_{-0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt$$

$$L\{f(t-T)\cdot\varepsilon(t-T)\}=e^{-sT}\cdot L\{f(t)\,\varepsilon(t)\}$$

$$L\{f(t)\cdot e^{-\alpha t}\}=F(s)\big|_{s+\alpha}$$

$$L\{f'(t)\}=s\,F(s)-f(0)$$

$$L\{f(t)*g(t)\}=F(s)\cdot G(s)$$

Elemi transzformációk:

$$L\{\delta(t)\}=1$$

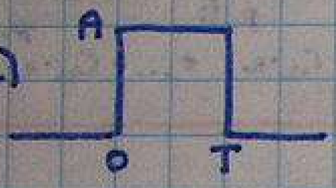
$$L\{\varepsilon(t)\}=\frac{1}{s}$$

$$L\{t\cdot\varepsilon(t)\}=\frac{1}{s^2}$$

$$L\{e^{-\alpha t}\cdot\varepsilon(t)\}=\frac{1}{s+\alpha}$$

$$L\{e^{-\alpha t}\cdot t\,\varepsilon(t)\}=\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

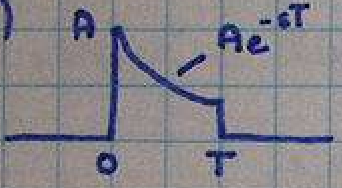
$\boxed{\text{Pl}}$ a.)



$$L\{A(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}=A\cdot\underbrace{L\{\varepsilon(t)\}}_{\frac{1}{s}}-A\cdot\underbrace{L\{\varepsilon(t-T)\}}_{\frac{1}{s}\cdot e^{-sT}}=A\left(\frac{1}{s}-e^{-sT}\cdot\frac{1}{s}\right)=$$

$$=\frac{A(1-e^{-sT})}{s}$$

b.)



$$L\{Ae^{-sT}\cdot(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}=\underbrace{L\{Ae^{-\alpha t}\cdot\varepsilon(t)\}}_{A\cdot\frac{1}{s+\alpha}}-L\underbrace{\{Ae^{-\alpha t}\cdot\varepsilon(t-T)\}}_{\underbrace{Ae^{-\alpha(t-T)}\cdot\varepsilon(t-T)}_{A\cdot\frac{e^{-sT}}{s+\alpha}}\cdot\underbrace{e^{-\alpha T}}_{\text{konstans}}}=$$

$$=\frac{A}{s+\alpha}-\frac{Ae^{-\alpha T}\cdot e^{-sT}}{s+\alpha}$$

Trükkös módszer:

$$A(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T))\xrightarrow[\text{modulált}]{e^{-\alpha t}\text{-vel}}e^{-\alpha t}\cdot A(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T))$$

$$\downarrow\alpha$$

$$\frac{A(1-e^{-sT})}{s}\qquad\qquad\frac{A(1-e^{-sT})}{s}\bigg|_{s\to s+\alpha}=\frac{A(1-e^{-(s+\alpha)T})}{s+\alpha}$$

$\boxed{\text{Pl}}$

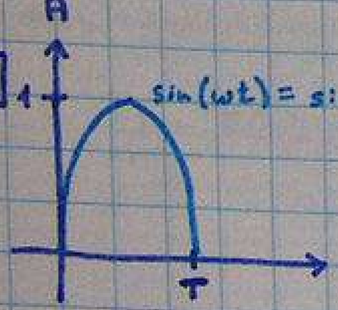
$$L\{\sin(\omega t)\cdot\varepsilon(t)\}=L\left\{\varepsilon(t)\cdot\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right\}=\frac{1}{2j}\cdot\left(L\{e^{j\omega t}\cdot\varepsilon(t)\}-L\{e^{-j\omega t}\cdot\varepsilon(t)\}\right)=$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{1}{2j}\cdot\frac{s+j\omega-(s-j\omega)}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=L\{\sin(\omega t)\}$$

$$L\{\cos(\omega t)\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$\boxed{\text{Pl}}$



$$\sin[\omega(t-T)+\omega T]=\sin[\omega(t-T)\cos(\omega T)]$$

$$\omega(t-T+T)=\omega(t-T)+\omega T$$

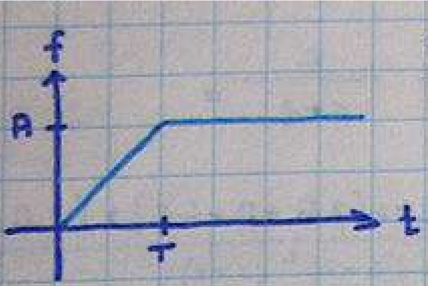
$$L\{(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T))A\sin(\omega t)\}=L\{A\varepsilon(t)\sin(\omega t)\}-\overbrace{L\{\varepsilon(t-T)A\sin(\omega t)\}}=$$

$$=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}-\frac{-A\omega e^{-sT}}{s^2+\omega^2}=\frac{A\omega(1+e^{-sT})}{s^2+\omega^2}$$

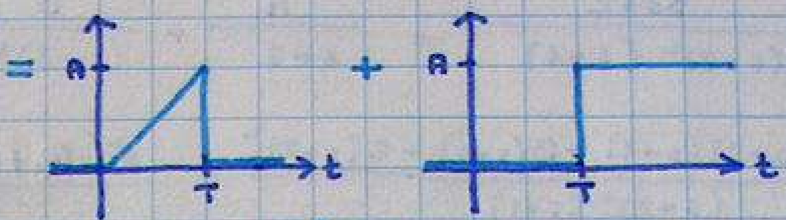
$$\varepsilon(t-T)\sin(\omega T)=\varepsilon(t-T)\cdot\sin(\omega(t-T)+\omega T)=\varepsilon(t-T)(\sin[\omega(t-T]\cdot\underbrace{\cos(\omega T)}_{\cos\frac{2\pi}{2T}\cdot T=\cos\pi=-1}+$$

$$+\cos(\omega(t-T)\cdot\underbrace{\sin(\omega T)}_{\sin\frac{2\pi}{2T}\cdot T=\sin\pi=0})=-\underbrace{\varepsilon(t-T)\cdot\sin[\omega(t-T)]}_{\frac{-\omega}{s^2+\alpha}\cdot e^{-sT}}$$

P1

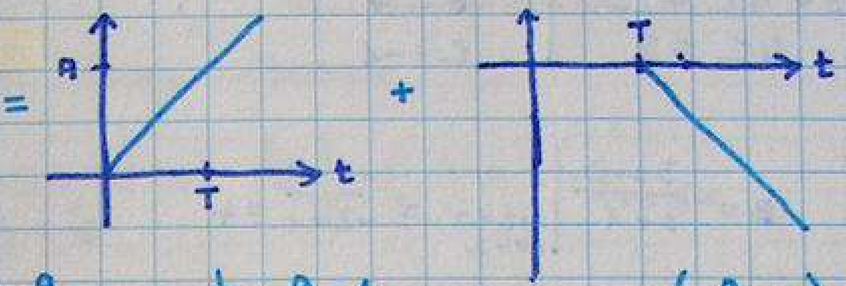


I.



$(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T))\frac{A}{T}\cdot t$ $\quad$ $A\varepsilon(t-T)$

II.



hibás

$$\frac{A}{T}\cdot t\cdot\varepsilon(t)\xrightarrow{L}\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2}\qquad \varepsilon(t-T)\left(-\frac{A}{T}\cdot t\right)=-\frac{A}{T}\cdot\varepsilon(t-T)(t-T+T)=$$

$$=-\frac{A}{T}\cdot\varepsilon(t-T)(t-T)+\frac{-A}{T}\cdot\varepsilon(t-T)\cdot T$$

$$F(s)=\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2}+-\frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-sT}}{s^2}-A\cdot\frac{1}{s}=\frac{A(1-e^{-sT})}{T\cdot s^2}-\frac{A}{s}=\frac{A\cdot(1-e^{-sT}-Ts)}{T}-\frac{A}{s}$$

javítva: $\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2}$

$$-\frac{A}{T}\cdot\varepsilon(t-T)(t-T)\quad\Rightarrow-\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot e^{-sT}$$

$$F(s)=\frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-sT}}{s^2}=\frac{A/T\,(1-e^{-sT})}{s^2}$$

P1

$$f_0(t)=\frac{A}{T}\cdot t\left(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\right)\xrightarrow{L}F_0(s)$$

$$f(t)=f_0(t)\,\varepsilon(t)+f_0(t-T)\,\varepsilon(t-T)+f_0(t-2T)\,\varepsilon(t-2T)+\dots$$

$$F(s)=F_0(s)+F_0(s)e^{-sT}+F_0(s)e^{-2sT}+\dots=F_0\underbrace{\left(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\dots\right)}_{\frac{1}{1-e^{-sT}}}=$$

$$=\frac{F_0(s)}{1-e^{-sT}}$$

Inverztranszformáció:

általában: $\frac{M(s)}{N(s)}$ vagy $\frac{M_1(s)+M_2(s)e^{-sT_2}+M_3(s)e^{-sT_3}+\dots}{N(s)}=\frac{M_1(s)}{N(s)}+\frac{M_2(s)}{N(s)}\cdot e^{-sT_2}+\dots$

pl.: $\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s+3}=$ $\quad$ Takargatás: $A_1=\frac{-2+1}{-2+3}=-1$

$$=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}\qquad A_2=\lim_{s+3\to 0}(s+3)\cdot\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{-3+1}{-3+2}=2$$

$$f(t)=\varepsilon(t)(-1e^{-2t})+\varepsilon(t)(2\cdot e^{-3t})$$

$\boxed{P1}$

$$\frac{3s+2}{s^3+5s^2+8s+4} = \frac{3s+2}{(s+2)^2\,(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+1} =$$

$$= \frac{A(s+2)(s+1)+B(s+1)+C(s+2)^2}{(s+2)^2\,(s+1)} = \frac{s^2(A+C)+s(3A+B+4C)+(2A+B+4C)}{(s+2)^2\,(s+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A+C&=0 \\ 3A+B+4C&=3 \\ 2A+B+4C&=2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A&=1 \\ B&=4 \\ C&=-1 \end{aligned}$$

vagy Takargatás:

$$B = \left.\frac{3s+2}{s+1}\right|_{\substack{s+2=0\\ s=-2}} = \frac{-6+2}{-2+1} = 4$$

$$C = \left.\frac{3s+2}{(s+2)^2}\right|_{\substack{s+1=0\\ s=-1}} = \frac{-3+2}{(-1+2)^2} = -1$$

$$A+C=0 \Rightarrow A=-C=1$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{-1}{s+1} \right\} = \varepsilon(t)\cdot e^{-2t} + \varepsilon(t)\cdot 4\,t\,e^{-2t} + \varepsilon(t)(-1)\,e^{-t}$$

<u>Exponenciális szorzó</u>

$$F(s) = \frac{1-2e^{-2s}}{s+3} = \frac{1}{s+3} - 2\cdot e^{-2s}\cdot\frac{1}{s+3}$$

$$f(t) = \varepsilon(t)\,e^{-3t} - 2\cdot e^{-3(t-2)}\cdot\varepsilon(t-2)$$

$\boxed{P1}$

$$X(s) = \frac{s^2+1{,}625s+0{,}75}{\underbrace{s^3+2s^2+1{,}5s}_{s(s^2+2s+1{,}5)}} = \frac{0{,}5}{s} + \frac{0{,}2652\,e^{-j\,0{,}34}}{\underbrace{s+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\,j\right)}_{1{,}2267\,e^{j\,2{,}53}}} + \frac{0{,}2652\cdot e^{j\,0{,}34}}{s+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\,j\right)} =$$

$$\frac{0{,}5}{s} \Downarrow 0{,}5\,\varepsilon(t)$$

$$\Downarrow \quad 0{,}2652\,e^{-j\,0{,}34}\cdot e^{-(1-j\,0{,}7071)t}\;\varepsilon(t)$$

$$= 0{,}5\,\varepsilon(t) + 0{,}2652\,e^{-j\,0{,}34}\cdot e^{-(1-j\,0{,}7071)t}\,\varepsilon(t) + 0{,}2652\,e^{j\,0{,}34}\cdot e^{-(1+j\,0{,}7071)t}\,\varepsilon(t) =$$

$$2\cdot\varepsilon(t)\cdot 0{,}2652\cdot e^{-t}\cdot\left(\frac{e^{-j\,0{,}34}\cdot e^{-j\,0{,}7071t} + e^{j\,0{,}34}\cdot e^{-j\,0{,}7071t}}{2}\right) = \cos(0{,}7071t-0{,}34)$$

$$\frac{e^{j}+e^{-j}}{2} = \cos\xi$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon(t)\left(0{,}5 + \underset{\substack{\uparrow\\ 2\cdot 0{,}2652}}{0{,}5304}\,e^{-t}\cdot\cos(0{,}7071\,t-0{,}34)\right)}}$$

2008. 11. 25

III. Fourier-összeg és Laplace-transzformáció kapcsolata

x(t) belépő és absz. integrálható → $\boxed{X(s) = X(j\omega)\big|_{j\omega \leftrightarrow s}}$

Nem absz. integrálhatóra nem működik!

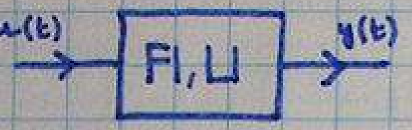
Ellenpélda: $x(t) = \varepsilon(t)$

$$\left.\begin{aligned} X(j\omega) &= \mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\ x(s) &= \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \end{aligned}\right\} X(j\omega) \neq X(s)\big|_{s \leftarrow j\omega}$$

IV. FI rendszerek analízise s-tartományban

1.) Az átviteli függvény: H(s)

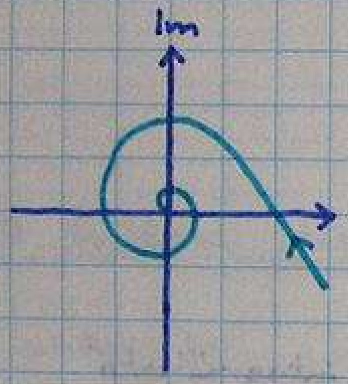
a.) Def:

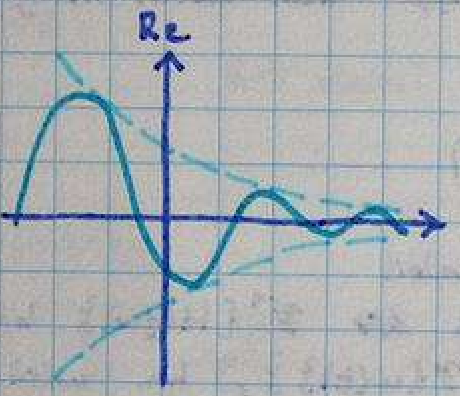


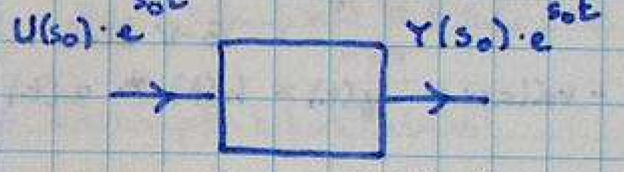
$$\boxed{H(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}}$$

b.) Szemléltetés: $s = \delta + j\omega$, rögzített érték: $s_0 = \delta_0 + j\omega_0$

$x_0(t) = X_0 e^{s_0} = X_0 e^{\delta_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t}$







$$H(s_0) = \frac{Y(s_0)}{U(s_0)} \xrightarrow{\text{általánosítva}} H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

c.) A válaszjel számítása:

$Y(s) = H(s) \cdot U(s) \rightarrow u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot \mathcal{L}\{u(t)\}\}$ csak akkor igaz, ha a rendszer kauzális és u(t) belépő

d.) Az impulzus válasz: $u(t) = \delta(t)$, $y(t) \equiv h(t)$

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot 1\}$

$\boxed{H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$ csak ha h(t) belépő, azaz a rendszer kauzális

e.) H(s) ábrázolása

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}, \quad n \geq m$$

$$H(s) = \frac{(s-q_1)(s-q_2)\ldots(s-q_{m-1})(s-q_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_{n-1})(s-p_n)} \cdot A$$

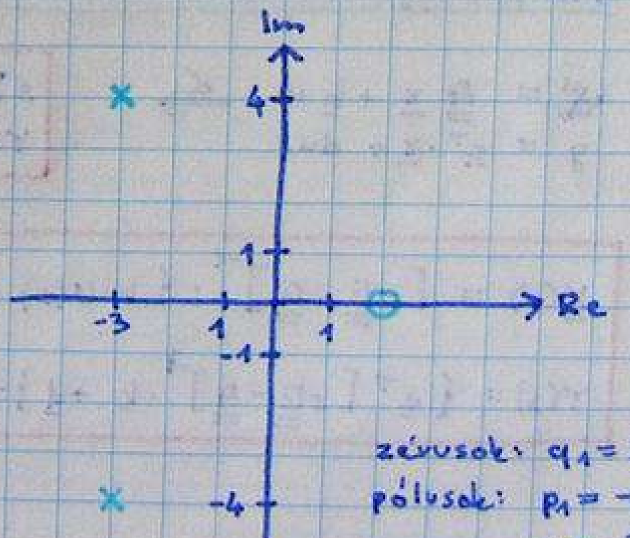
(A most b_0 lenne)

A: erősítés

p_i, i=1..n: „pólusok"

q_j, j=1..m: „zérusok"

pl.: $H(s) = \dfrac{25s - 50}{s^2 + 6s + 25} = 25 \cdot \dfrac{(s-2)}{(s+3-j4)(s+3+j4)}$ ⇗



zérusok: $q_1 = 2$

pólusok: $p_1 = -3 + j4$

$p_2 = -3 - j4$

pólus-zérus ábra

f.) G-V stabilitás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{0}^{\infty} |\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}\,dt < \infty$$, ha $H(s)$ racionális törtfüggvény

$$h(t) = K\cdot\delta(t) + \left[c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \ldots + c_n e^{p_n t}\right]\cdot\varepsilon(t)$$

Ha $p = \alpha + jB$, akkor $e^{pt} = e^{\alpha t}\cdot e^{jBt}$, $\alpha = \mathrm{Re}\{p\}$

Ha $\underbrace{\text{minden pólus valós része kisebb, mint nulla}}_{\text{a pólusok a bal félsíkon helyezkednek el}}$, akkor: a rendszer G-V stabil

$$\boxed{\text{a rendszer G-V stabil} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\{p_i\} < 0,\ i = 1,\ldots n}$$

2.) Rendszerjellemző függvények:

- rendszertulajdonságok tükrözése
- válaszjel közvetlen számítható

a.) Impulzus válasz: $h(t)$

- feltétel: LI, invariáns rendszer (LI: lineáris, invariáns)
- következmény: kauzalitás $\Leftrightarrow$ $h(t)$ belépő
  G-V stabil $\Leftrightarrow$ $h(t)$ absz. integrálható
- válasz: $y(t) = h(t) * u(t)$

b.) Átviteli karakterisztika: $H(j\omega)$

- feltétel: LI, G-V stabil
- következmény: kauzalitás $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$ belépő
- válasz: $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\ \mathcal{F}\{u(t)\}\}$, ha $u(t)$ absz. integrálható

c.) Átviteli függvény: $H(s)$

- feltétel: LI, kauzalitás
- következmény: G-V stab $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\{p_i\} < 0$, $\forall p_i$-re
- válaszjel: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\mathcal{L}\{u(t)\}\}$, ha $u(t)$ belépő

d.) Kapcsolatuk:

$$\begin{tikzcd}
 & h(t) \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathcal{F}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathcal{L}"] & \\
H(j\omega) \arrow[rr, leftrightarrow, "s=j\omega"'] & & H(s)
\end{tikzcd}$$

3.) Állapotegyenletek az s-tartományban

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y &= \underline{c}^T\cdot\underline{x} + du \end{aligned} \xrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{\begin{aligned} &s X(s) - x(t=-0) = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(s) + \underline{b}U(s) \\ &Y(s) = \underline{c}^T\cdot\underline{X}(s) + dU(s) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{X}(s) = \left[s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right]^{-1}\cdot\{k\cdot U(s) + \underline{x}(t=-0)\} \\ &Y(s) = \{\underline{c}^T\left[s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right]^{-1}\cdot k + \underline{d}\}\cdot U(s) + \underline{c}^T\left[s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right]^{-1}\cdot\underline{x}(t=-0) \end{aligned}}$$

a.) **Impulzusválasz:** $u(t) = \delta(t) \rightarrow U(s) = 1$

$y(t) \equiv h(t) \rightarrow Y(s) \equiv H(s)$

$x(t = -0) = \underline{0}$

(kauzális rendszer)

$$\boxed{H(s) = \underline{c}^T \cdot [s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1} \cdot \underline{b} + d}$$

b.) **Nem belépő gerjesztés:** $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \varepsilon(t) \cdot y(t)$

c.) **Redukált átviteli függvény:**

pl.: $x_1' = -5x_1 - 6x_2 + u$

$x_2' = x_1$

$y = -8x_1 - 16x_2 + 2u$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

$sX_1 = -5X_1 - 6X_2 + U \rightarrow X_2 = \frac{U}{s^2+5s+6}, \quad X_1 = \frac{sU}{s^2+5s+6}$

$sX_2 = X_1$

$Y = -8X_1 - 16X_2 + 2U$

$$Y = \frac{(-8s-16)U}{s^2-5s+6} + 2U$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-8s-16}{s^2+5s+6} + 2 = \frac{2s^2+2s-4}{s^2+5s+6} = 2 \cdot \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+2)}$$

jogos-e az egyszerűsítés?
ha nem stabil → nem jogos
stabil → magengedett

Ha rendszer G-V stabil $H^*(s) = i \cdot \frac{s-1}{s+3} = \frac{2s-2}{s+3}$ redukált átviteli függvény

$\det(\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0, \quad \lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = -2$

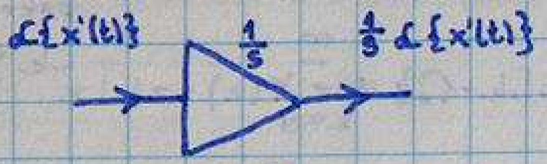
$H^*(s)$ pólusa: $\{p_i, i = 1, \ldots, n\} \underset{n \leq N}{\subseteq} \{\lambda_i, i = 1, \ldots, N\}$

G-V stabil $\Leftarrow$ asszimptotikus stabil

4.) **A hálózat transzformálása:**

„integrátor"

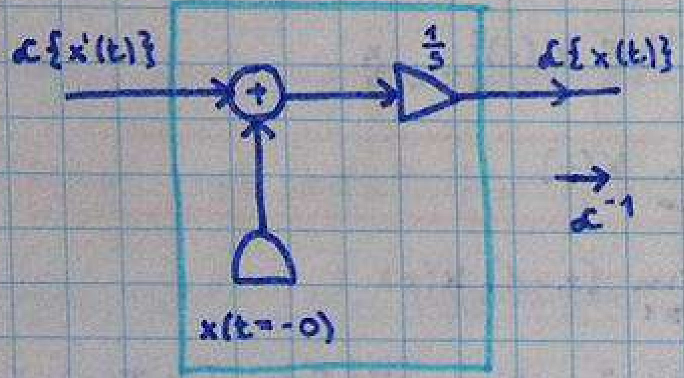
$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{x(t)\} - x(-0)$



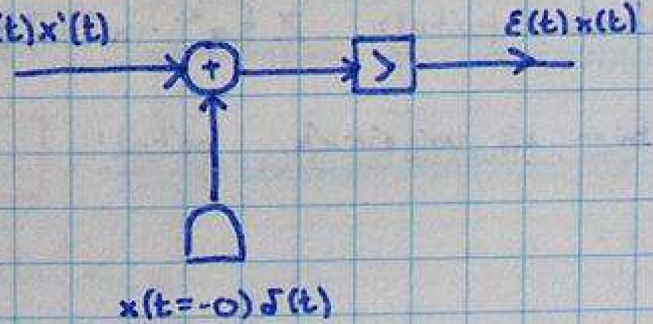
a.) **x(t) belépő:** $x(-0) = 0$

$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{x(t)\}$

b.) **x(t) nem belépő:** $\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s}\left(L\{x'(t)\} + x(-0)\right)$



$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

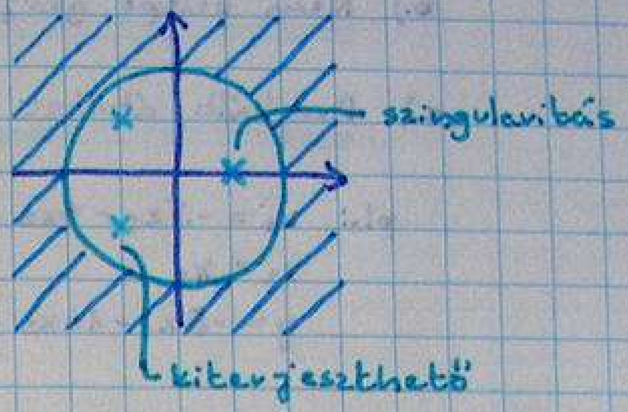


$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{x(t)\} - x(-0)$

2008. 11. 27.

DI JELEK ÉS RENDSZEREK ANALÍZISE A KOMPLEX FREKVENCIATARTOMÁNYBAN [Z]

I. z-transzformáció (DI Laplace)



1.) **Def:** $Z\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k}$

$$Z^{-1}\{X[z]\} = \begin{cases} x[k], & \text{ha } k \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \equiv \varepsilon[k] \cdot x[k]$$

2.) **Néhány példa:**

a.) $Z\{\delta[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k] \cdot z^{-k} = 1$

b.) $Z\{\varepsilon[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{z}{z-1}$

c.) $Z\{\varepsilon[k]\, q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (qz^{-1})^k = \frac{1}{1-qz^{-1}} = \frac{z}{z-q}$

3.) **Tételek:**

a.) Z és Z^{-1} lineáris

b.) **Eltolási tétel:** $Z\{\varepsilon[k-r] \cdot x[k-r]\} = z^{-r} \cdot Z\{\varepsilon[k] \cdot x[k]\} = z^{-r} \cdot X(z)$

c.) **Az 1 ütemmel késleltetett jel transzformáltja:**

$Z = \{x[k+1]\} = z\,X(z) - z\,x[k=0]$, mert

$$Z\{x[k+1]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k+1]\, z^{-k} \overset{p=k+1,\ k=p-1}{\downarrow}= \sum_{p=1}^{\infty} x[p] \cdot z^{-(p-1)} = \sum_{p=1}^{\infty} x[p]\, z^{-p} \cdot z = z \cdot \sum_{p=1}^{\infty} x[p]\, z^{-p} =$$

$$= \underbrace{z \sum_{p=0}^{\infty} x[p] \cdot z^{-p}}_{x[z]} - z \cdot x[0] = z\, X(z) - z\,x[0]$$

d.) **Csillapítási tétel:** $Z\{q^k \cdot x[k]\} = X(z \cdot q^{-1}) = X(z)\big|_{z \leftarrow \frac{x}{q}}$

e.) **Kezdeti- és végérték tétel:** $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

$$x[+\infty] = \lim_{x \to 1} (z-1)\, X(z)$$

f.) **Konvolúció-tétel:** ha $f[k]$ és $g[k]$ belépő, akkor $Z\{f * g\} = F(z) \cdot G(z)$

g.) **$\mathcal{F}\{\}$ és $Z\{\}$ kapcsolata:** ha $x[k]$ belépő és absz. összegezhető, akkor $X(z) = X(e^{j\omega})\big|_{z \leftarrow e^{j\omega}}$

h.) $x[k] = \varepsilon[k] \cdot k \cdot a^k$, $X(z) = ?$

$$\frac{d}{da} \cdot a^k = k \cdot a^{k-1} \longrightarrow Z\{k \cdot a^{k-1}\} = Z\left\{\frac{d}{da} \cdot a^k\right\} = \frac{d}{da} \cdot Z\{a^k\} = \frac{d}{da} \cdot \frac{1}{1-qz^{-1}} = \frac{0-(-z^{-1})}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow Z\{\varepsilon[k] \cdot k \cdot a^k] = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

II. A transzformáció megfordítása

1) Polinomosztással

tfh. $X(z)$ racionális törtfüggvény: $X(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_{m-1}z+b_m}{z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n}$, $n\geq m$

$$X(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=c_0+c_1\cdot z^{-1}+c_2z^{-2}+\ldots$$

$$\xrightarrow{z^{-1}}\quad x[k]=c_0\delta[k]+c_1\delta[k-1]+c_2\delta[k-2]+\ldots$$

2) Résztörtekre bontással (Kifejtési tétel)

$$X(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{Q(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}=C_0+\frac{C_1}{z-p_1}+\frac{C_2}{z-p_2}+\ldots+\frac{C_n}{z-p_n}=$$

$$=C_0+z^{-1}\cdot\frac{C_1z}{z-p_1}+z^{-1}\cdot\frac{C_2z}{z-p_2}+\ldots+z^{-1}\cdot\frac{C_n\cdot z}{z-p_n}$$ (p_i, $i=1,\ldots,n$ a nevező egyszeres gyökei)

$$\boxed{X[k]=Z^{-1}\{x(z)\}=C_0\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot C_1p_1^{k-1}+\varepsilon[k-1]\cdot C_2p_2^{k-1}+\ldots+\varepsilon[k-1]C_np_n^{k-1}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}C_0=\lim_{z\to\infty}X(z)=\begin{cases}b_0, & \text{ha } n=m\\ 0, & \text{ha } n>m\end{cases}\\ C_i=\left.\frac{Q(z)}{P(z)/(z-p_i)}\right|_{z=p_i},\quad i=1,\ldots,n\end{gathered}}$$

III. Rendszeranalízis

1.) Az átviteli függvény: $H(z)$-t csak kauzális rendszerre értelmezzük

a.) Def: $\boxed{H(z)=\frac{Z\{y[k]\}}{Z\{u[k]\}}=\frac{Y(z)}{U(z)}}$

b.) A válaszjel számítása: ha $u[k]$ belépő és a rendszer kauzális, akkor $Y(z)=H(z)\cdot U(z)$

$$\boxed{y[k]=Z^{-1}\{H(z)\cdot Z\{u[k]\}\}}$$

c.) Spec.: Impulzus válasz: $u[k]=\delta[k]$, $U(z)=1$, $y[k]=h[k]$

$h[k]=Z^{-1}\{H(z)\cdot 1\}$, $H(z)=Z\{h[k]\}$

d.) $H(z)$ ábrázolása: pólus-zérus (z pozitív hatványai szerint)

e.) $\boxed{\text{G-V stabilitás} \iff |p_i|<1,\ i=1,\ldots,n}$ „pólusoknak az egységkörön belül kell lenniük"

2. Rendszerjellemző függvények:

$$\begin{tikzcd} & h(k) \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathcal{F}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "Z"] & \\ H(e^{i\vartheta}) \arrow[rr, leftrightarrow, "z=e^{i\vartheta}"'] & & H(z) \end{tikzcd}$$

3.) Állapotegyenletek transzformálása:

$$\begin{aligned}x[k+1]&=\underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k]+\underline{b}u[k]\\ y[k]&=\underline{c}^T\cdot x[k]+du[k]\end{aligned}\quad\overset{Z}{\Longrightarrow}\quad\begin{aligned}&zX(z)-z\underline{x}[k=0]=\underline{\underline{A}}X[z]+bU[z]\\ &Y(z)=\underline{c}^T\underline{X}(z)+dU(z)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z)=\{\underline{c}^T\cdot[z\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}]^{-1}\cdot\underline{b}+d\}\cdot U(z)+\underline{c}^T[z\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}]^{-1}\cdot x[k=0]\cdot z$$

Spec: $u[k]=\delta[k]\Rightarrow U(z)=1$; $\underline{x}[k=0]=\underline{0}$, $Y(z)=H(z)\rightarrow\boxed{H(z)=\underline{c}^T[z\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}]^{-1}\cdot b+d}$

b) A hálózat transzformálása

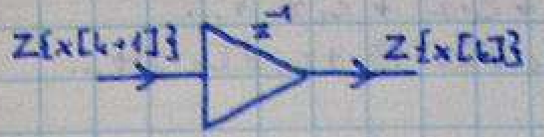
késleltető:

$Z\{x\{k+1\}\} = z\cdot Z\{X[k]\} - zx[k=0]$

a.) ha a gerjesztés belépő: $x[k=0]=0$

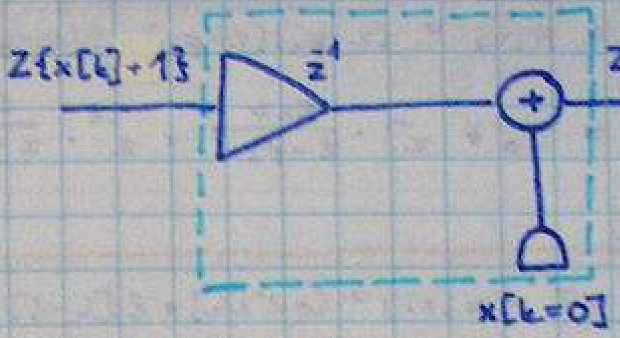
$Z\{x[k-1]\} = zZ\{x[k]\}$

$Z\{x[k]\} = z^{-1}Z\{x[k-1]\}$



b) ha a gerjesztés nem belépő:

$Z\{X[k]\} = z^{-1}Z\{x[k+1]\} + x[k=0]$



Z tartománybeli hálózati helyettesítés

SPECIÁLIS TULAJDONSÁGÚ RENDSZEREK

I. Véges impulzus válaszú rendszer (FIR: Finite Impulse Response) (DI):

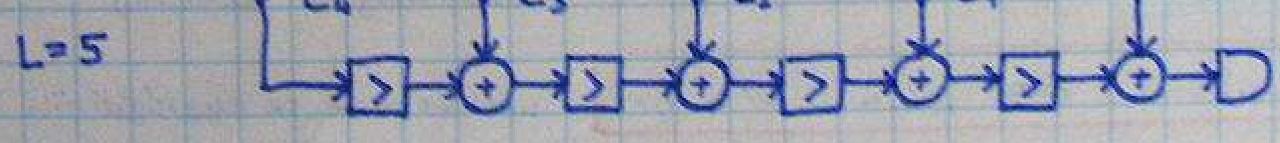
Def: $h(t) = \{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L]\}\cdot f[k] = c_0\delta[k]+c_1\delta[k-1]+\ldots+c_{L-1}\delta[k-(L-1)]$

$H(z) = c_0 + c_1z^{-1}+\ldots+c_{L-1}z^{-(L-1)} \Rightarrow$ G-V stabil

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)} \longrightarrow Y(z) = c_0U(z)+c_1U(z)\cdot z^{-1}+\ldots+c_{L-1}U(z)\cdot z^{-(L-1)}$$

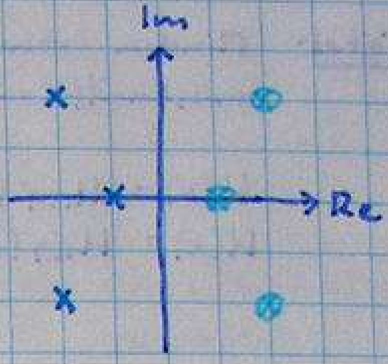
$$z^{-1}\Big\downarrow$$

$$y[k] = c_0u[k]+c_1u[k-1]+\ldots+c_{L-1}u[k-(L-1)]$$



2008. 12. 02.

II. A mindent áteresztő rendszer (MA')



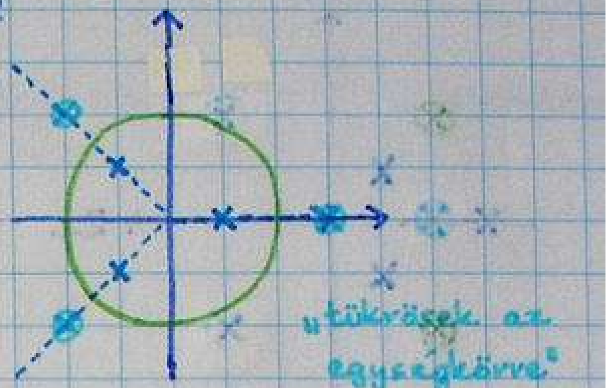
1.) **FI**: $\boxed{|H_{MA'}(j\omega)| = K}$ (konstans) + G-V stabilis

$$H_{MA'}(s) = A \cdot \frac{(s+p_1^*)(s+p_2^*)\dots(s+p_n^*)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

Biz: $(j\omega - p_i^*) = -j\omega - p_i^* = -(j\omega + p_i^*)$

$$\left|\frac{j\omega + p_i^*}{j\omega - p_i}\right| = \left|\frac{-(j\omega + p_i^*)}{(j\omega - p_i)}\right| = 1 \Rightarrow |H_{MA'}(j\omega)| = A$$ QED

2.) **DI**: $\boxed{|H_{MA'}(e^{j\vartheta})| = K}$ + G-V stabilis



„tükrösek az egységkörre"

$$H_{MA'}(z) = A \cdot z^{-r} \cdot \frac{\left(z - \frac{1}{p_1^*}\right)\left(z - \frac{1}{p_2^*}\right)\dots\left(z - \frac{1}{p_n^*}\right)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

Biz: $$\left|\frac{e^{j\vartheta} - \frac{1}{p_i^*}}{e^{j\vartheta} - p_i}\right| = \underbrace{\left|-\frac{1}{p_i^*} \cdot e^{j\vartheta}\right|}_{\frac{1}{|p_i|}} \cdot \underbrace{\left|\frac{e^{-j\vartheta} - p_i^*}{e^{j\vartheta} - p_i}\right|}_{1} = \frac{1}{|p_i|}$$

$$\Rightarrow |H_{MA'}(e^{j\vartheta})| = A \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{|p_i|} = \text{konstans}$$ QED

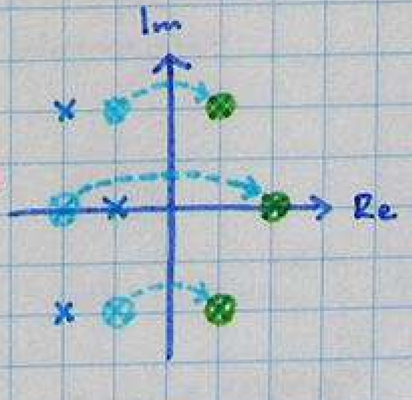
III. A minimálfázisú rendszer (MF)

1.) **FI**: $\boxed{\text{ha } |H_{MF}(j\omega)| = |H(j\omega)|, \text{ akkor } \tau_{MF}(\omega) \leq \tau(\omega)}$ + G-V stabilis

futásidő karakterisztika: $\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$

ha $H_{MF}(s) = K \cdot \frac{(s-q_1)(s-q_2)\dots(s-q_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$

G-V stabilis $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\{p_i\} < 0$
MF $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\{q_i\} < 0$



2.) **DI**: $\boxed{\text{ha } |H_{MF}(e^{j\vartheta})| = |H(e^{j\vartheta})|, \text{ akkor } \tau_{MF}(\vartheta) \leq \tau(\vartheta)}$

$$H_{MF}(z) = A \cdot \frac{(z-q_1)(z-q_2)\dots(z-q_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

G-V stabilis $\Leftrightarrow$ $|p_i| < 1$
MF $\Leftrightarrow$ $|q_i| < 1$

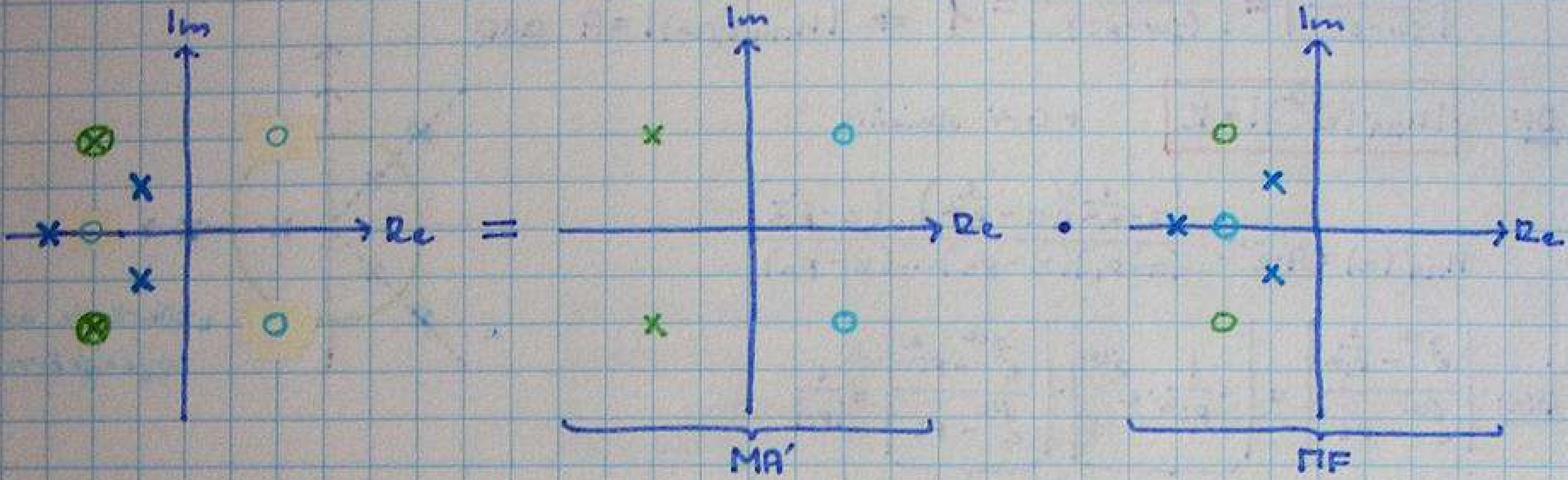
IV. Felbontás

Tétel: Minden rendszer felbontható egy mindent áteresztő (MÁ) és egy minimálfázisú (MF) kaszkádkapcsolásra.

$$\left.\begin{aligned} H(s) &= H_{MÁ}(s)\cdot H_{MF}(s) \\ H(z) &= H_{MÁ}(z)\cdot H_{MF}(z) \end{aligned}\right\} \boxed{H = H_{MF}\cdot H_{MS}} \qquad \rightarrow \boxed{H_{MÁ}} \rightarrow \boxed{H_{MF}} \rightarrow$$

Pl.

$$H(s) = \frac{6s^3 - 12s^2 + 96}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} = 6\cdot\frac{(s+2)[s-(2+j2)]\cdot[s-(2-j2)]}{(s+3)[s-(-1+j)]\cdot[s-(-1-j)]}$$



$$H_{MÁ}(s) = \frac{[s-(2+j2)]\cdot[s-(2-j2)]}{[s-(-2+j2)]\cdot[s-(-2-j2)]}\cdot K \qquad H_{MF}(s) = \frac{(s+2)[s-(-2+j2)][s-(-2-j2)]}{(s+3)[s-(-1+j)]\cdot[s-(-1-j)]}$$

feltétel: $K_1\cdot K_2 = 6$, pl. $\underbrace{K_1 = 2,\ K_2 = 3}$

$$H_{MÁ}(s) = \frac{2s^2 - 8s + 16}{s^2 + 4s + 8}$$

$$H_{MF}(s) = \frac{3s^3 + 18s^2 + 48s + 48}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6}$$

MINTAVÉTELEZÉS ÉS JELREKONSTRUKCIÓ

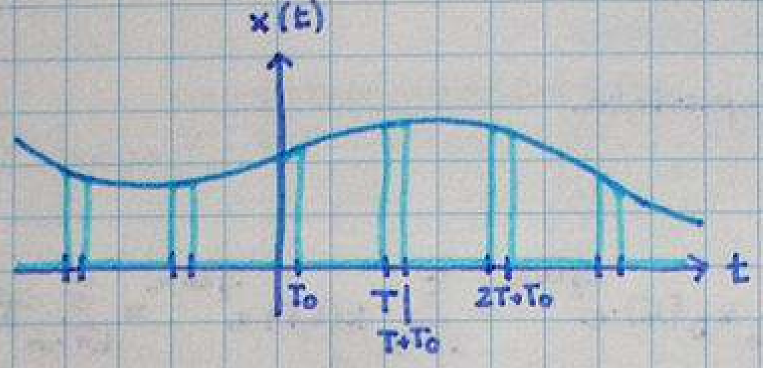
I. A mintavételezett jel (mv.)

1.) FI reprezentáció:

$$\Rightarrow \quad x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{ha } kT \le t < kT+T_0,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$x_T(t)$ kompaktabban:

$$x_T(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \varepsilon(t-kT) - \varepsilon(t-kT-T_0) \}$$



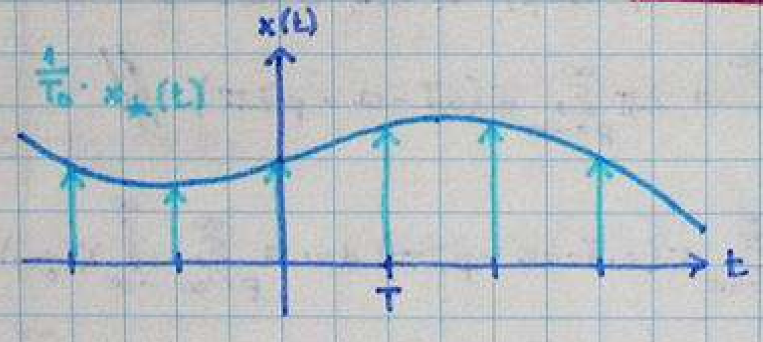
T – mv. periódus $\Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T}$ mv. körfrekvencia

T_0 – mv. idő

2.) Egyszerűsített FI reprezentáció:

$$\frac{1}{T_0} \cdot \{ \varepsilon(t-kT) - \varepsilon(t-kT-T_0) \} \cong \varepsilon'(t-kT) = \delta(t-kT)$$

$$\Rightarrow x_T(t) \cong T_0 \cdot x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \boxed{T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t-kT) = x_*(t)}$$

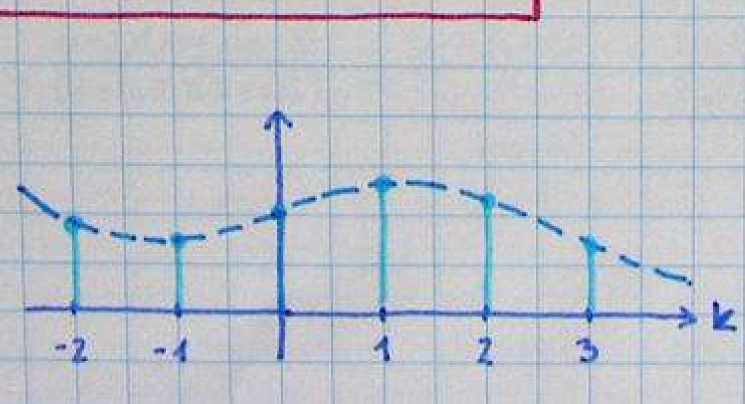


3.) DI reprezentáció:

$$\boxed{x_D[k] = x(kT)}$$

x_D és x_* ekvivalens

$$\boxed{x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot \delta(t-kT)}$$



4.) Példa

$x(t) = \varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$, T és T_0 adott

$$x_D[k] = \varepsilon(kT+0) \cdot e^{-\alpha kT} = \varepsilon[k] \cdot a^k \qquad a = e^{-\alpha T}$$

$$x_*(t) = T_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot \delta(t-kT)$$

II. A mintavételezett jel spektruma

TFH $x(t)$ absz. int. $\Rightarrow$ $x_D[k]$ absz. össz.

$$\mathcal{F}\{x_*(t)\} \equiv X_*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_*(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = T_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\cdot\delta(t-kT)\cdot e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\cdot e^{-j\omega t}\,dt}_{e^{-j\omega kT}} = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\cdot e^{-j\omega kT}$$

, azonban $X_D(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\,e^{-j\vartheta k}$

tehát $\boxed{X_*(j\omega) = T_0\cdot X_D(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=\omega T}}$ $\Rightarrow$ $X_*(j\omega)$ periodikus !

Levezetés: $X(j\omega)$ és $X_*(j\omega)$ kapcsolata

TFH $x(t)$ folytonos

$$X_D(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{x_D[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\cdot e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}\Big|_{t=kT}\cdot e^{-j\vartheta k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega kT}\,d\omega\right\}\cdot e^{-j\vartheta k} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega T-\vartheta)k}$$

// kitérő: leggyen $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$ periodikus → Fourier-sor

$$F_m = \frac{1}{T_1}\cdot\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\cdot e^{-jm\frac{2\pi}{T_1}\cdot t}\,dt = \frac{1}{T_1} \Rightarrow f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\frac{2\pi}{T_1}\cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

helyettesítések: $m=k$, $n=p$, $T_1=2\pi$, $t=\omega T-\vartheta$

$$\hookrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega T-\vartheta)k} = 2\pi\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega T-\vartheta-p2\pi)$$ //

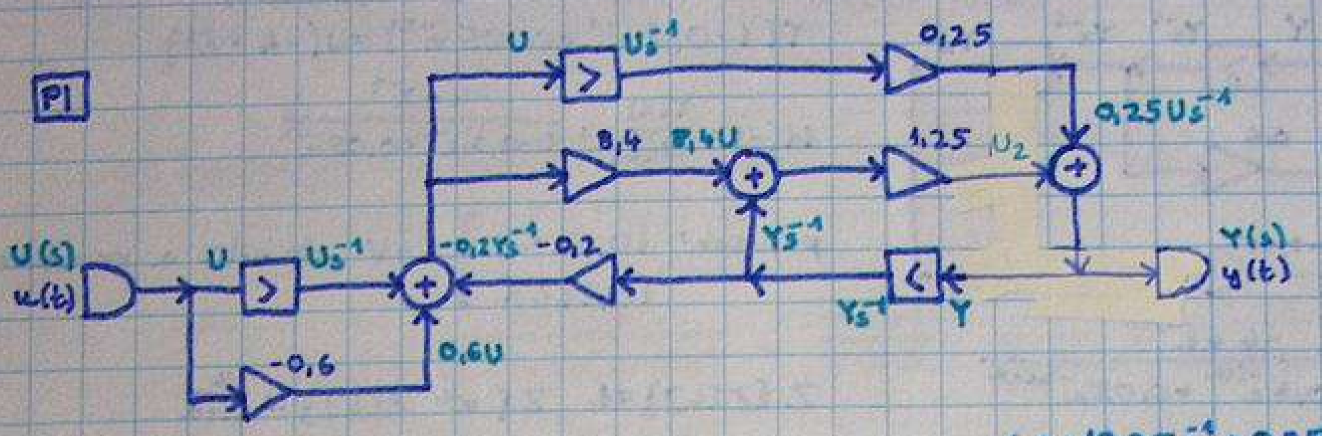
$$X_D(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cdot\cancel{2\pi}\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega T-\vartheta-p2\pi)\,d\omega = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,\delta(\underbrace{\omega T-\vartheta-p2\pi}_{0,\text{ ha } \omega=\frac{\vartheta}{T}+p\frac{2\pi}{T}})\,d\omega$$

// kitérő: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega T)\,d\omega = \frac{1}{T}$, mert $\delta(\omega T) = \frac{1}{T}\delta(\omega)$ //

$$X_D(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{T}\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\vartheta}{T}+p\cdot\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{=\omega_s}\right)\right) \Rightarrow \boxed{X_*(j\omega) = \frac{T_0}{T}\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega+p\omega_s)\big)}$$

$\boxed{2008.12.04.}$

$\boxed{P1}$



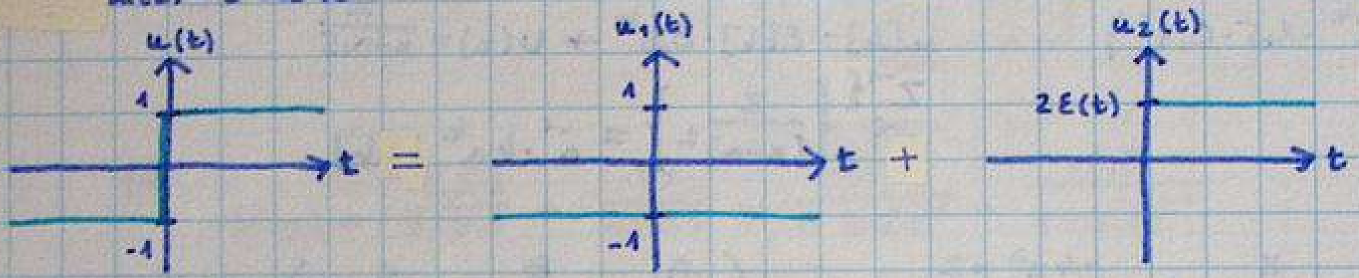
$$\left.\begin{aligned} U_2 &= 4s^{-1} + 8,4U \\ U &= -0,2Ys^{-1} - 0,6U + Us^{-1} \\ Y &= 0,25Us^{-1} + 1,25U_2 \end{aligned}\right\} \quad H = \frac{Y}{U} = \frac{-6,3 + 10,35s^{-1} + 0,25s^{-2}}{1 + 0,85s^{-1} + 0,05s^{-2}} = \frac{-6,3s^2 + 10,35s + 0,25}{s^2 + 0,85s + 0,05} =$$

$$= \frac{6,3(s-1,67)(s+0,024)}{(s+0,064)(s+0,786)} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{zérusok: } z_1 = 1,67 \quad z_2 = -0,04 \\ \text{pólusok: } p_1 = -0,064 \quad p_2 = -0,786 \end{array}$$

G-V stabilis, mert $Re\{p_i\} < 0$ (mindig ellenőrizni kell!)

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{-6,3(j\omega)^2 + 10,35j\omega + 0,25}{(j\omega)^2 + 0,85j\omega + 0,05}$$, $h(t) = ?$ Órán hibásan lett levezetve!

$u(t) = 3\cdot\cos 4t$



Átvitel: karakterisztika

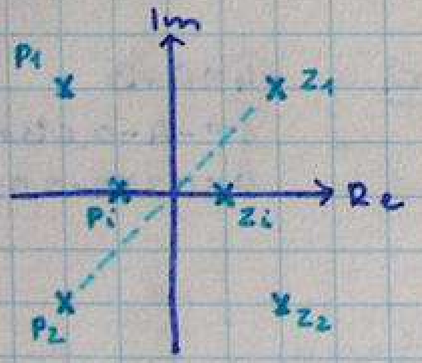
$\omega = 0$, $H_0 = H(j\omega)\big|_{\omega=0} = \frac{0,25}{0,05} = 5$

$\hat{U} = -1$, $\hat{Y} = \overline{H}_0 \cdot \hat{U} = -1\cdot 5 = -5$

$U(s) = \frac{2}{s}$

$$Y(s) = H(s)\cdot U(s) = \frac{2}{s}\cdot\frac{-6,3(s-1,67)(s+0,024)}{(s+0,064)(s+0,786)} \qquad \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,064} + \frac{C}{s+0,786}$$

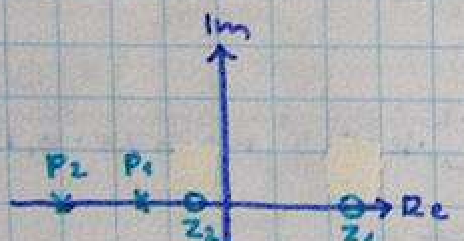
$$y(t) = \varepsilon(t)\left(A + Be^{-0,064t} + Ce^{-0,786t}\right)$$



$p_i^* = z_i$

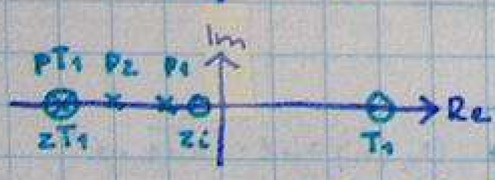
ΠA´ (mindent áteresztő)

$$H_{\Pi A'}(s) = -6,3\cdot\frac{s-1,67}{s+1,67}$$



ΠF (minimál fázisú): minden pólus és zérus a bal félsíkban

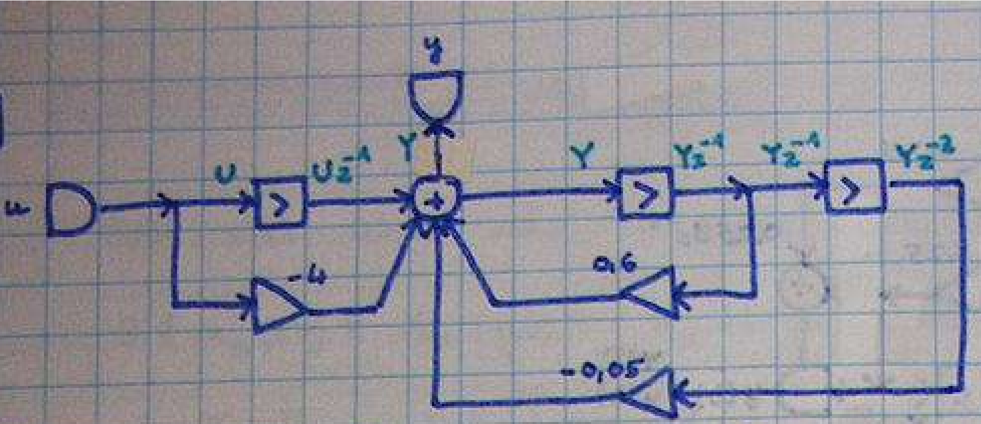
$$H_{\Pi F}(s) = \frac{(s+0,024)(s+1,67)}{(s+0,064)(s+0,786)}$$



$H(s) = H_{\Pi A'}(s)\cdot H_{\Pi A}(s)$

$$\text{pl.: } H(s) = \frac{(s-2)(s+1)(s-3)}{(s+0,5)(s+1,5)} = \underbrace{\frac{(s-2)(s-3)}{(s+2)(s+3)}}_{H_{\Pi A'}(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s+2)(s+3)(s+1)}{(s+0,5)(s+1,5)}}_{H_{\Pi F}(s)}$$

P1



$$Y = Uz^{-1} - 4U + 0{,}64\, z^{-1} - 0{,}05 z^{-2} Y$$

$$Y(1 - 0{,}6 z^{-1} + 0{,}05 z^{-2}) = U(-4 + z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{-4 + z^{-1}}{1 - 0{,}6 z^{-1} + 0{,}05 z^{-2}}$$

pólusok: $\left.\begin{matrix} |0{,}5| < 1 \\ |0{,}1| < 1 \end{matrix}\right\}$ G-V stabilis a rendszer

$$H(e^{i\vartheta}) = H(z)\Big|_{z=e^{i\vartheta}} = \frac{-4 + e^{-i\vartheta}}{1 - 0{,}6 e^{-i\vartheta} + 0{,}05 e^{-2i\vartheta}}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{a^k \varepsilon[k]\} = \frac{z}{z-a}$$

$$H(z) = \frac{-4z^2 + z}{z^2 - 0{,}6z + 0{,}05} = z \cdot \left(\frac{-4z + 1}{(z-0{,}5)(z-0{,}1)} \right) = z\left(\frac{P}{z-0{,}5} + \frac{Q}{z-0{,}1} \right) = z\left(\frac{-2{,}5}{z-0{,}8} + \frac{-1{,}5}{z-0{,}1} \right)$$

$$P = \frac{-4z+1}{z-0{,}1}\Bigg|_{\substack{z-0{,}5=0 \\ z=0{,}5}} = \frac{-4 \cdot 0{,}5 + 1}{0{,}5 - 0{,}1} = -2{,}5$$

$$Q = \frac{-4z+1}{z-0{,}5}\Bigg|_{\substack{z-0{,}1=0 \\ z=0{,}1}} = \frac{-4 \cdot 0{,}1 + 1}{0{,}1 - 0{,}5} = -1{,}5$$

$$h[k] = \varepsilon[k] \cdot (-2{,}5 \cdot 0{,}5^k - 1{,}5 \cdot 0{,}1^k)$$

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot 0{,}5^k \rightarrow U(z) = \frac{z}{z-0{,}5}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{z}{(z-a)^2} \right\} = a^{-1} \cdot k a^k\, \varepsilon[k]$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)} \cdot \frac{-4z^2 + z}{(z-0{,}5)(z-0{,}1)} = z\left(\frac{A}{z-0{,}1} + \frac{B}{z-0{,}5} + \frac{C}{(z-0{,}5)^2} \right)$$

Brute force: $\dfrac{A(z-0{,}5)^2 + B(z-0{,}5)(z-0{,}1) + C(z-0{,}1)}{(z-0{,}1)(z-0{,}5)^2} =$

$$= \frac{z^2(A+B) + z(-A - 0{,}6B + C) + (0{,}25A + 0{,}05B - 0{,}1C)}{(z-0{,}1)(z-0{,}5)^2}$$

$-4 = A + B$
$1 = -A - 0{,}6B + C$
$0 = 0{,}25A + 0{,}05B - 0{,}1C$

Szofisztikáltabb: A, C takargatásával $\rightarrow$ $A + B = -4$
$\Rightarrow A = -4{,}375;\ C = -1{,}25;\quad B = 0{,}375$

$$Y(z) = \frac{-4{,}375}{z-0{,}1} + \frac{0.375}{z-0{,}5} + \frac{-1{,}25}{(z-0{,}5)^2}$$

$$y[k] = \varepsilon[k]\left(-4{,}375 \cdot 0{,}5^k + \underbrace{(-1{,}25) \cdot 0{,}5^{-1}}_{-2{,}5} \cdot k \cdot 0{,}5^k + 0{,}375 \cdot 0{,}1^k\right)$$

$$u[k] = 1 + (-1 + \varepsilon[k-1]) = u_1[k] + u_2[k]$$

$$y[k] = y_1[k] + y_2[k]$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $H(e^{i\vartheta})\big|_{\vartheta=0}$

$u_1[k] = 1$ $\quad u_2[k] = -1 + \varepsilon[k-1]$ $\Rightarrow U_2(z) = -1 \cdot \dfrac{z}{z-1} \cdot z^{-1}$

$$Y_2(z) = H(z) U_2(z) = \frac{-1 z^{-1} \cdot z}{z-1} \cdot \frac{-4z^2 + 1}{(z-0{,}5)(z-0{,}1)}$$

$$H(z) = \frac{-4 + z^{-1}}{1 - 0{,}6 z^{-1} + 0{,}05 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$-4U + z^{-1}U = Y - 0{,}6 z^{-1} Y + 0{,}05 z^{-2} Y$$

$$y[k] - 0{,}6\, u[k-1] + 0{,}05\, u[k-2] = -4u[k] + u[k-1]$$

Általános H(z) realizációja:

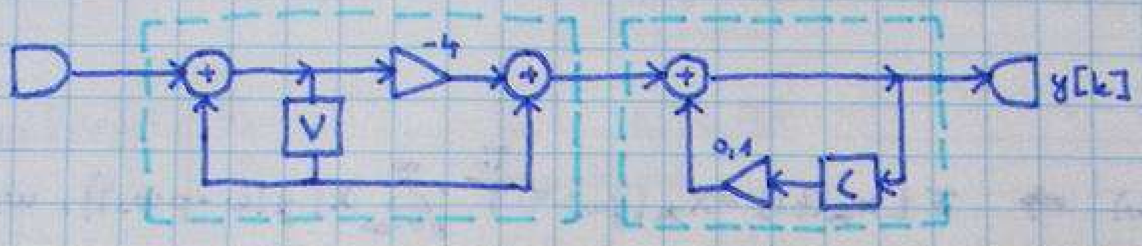
$H(z) = \frac{M(z)}{N(z)}$

a.) **Kaszkád:**

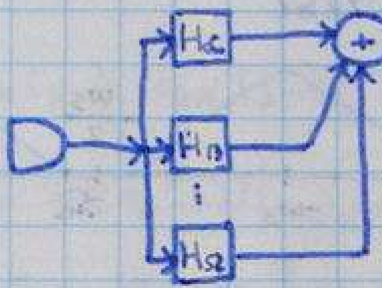
$H = H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n$

pl.:

$$H(z) = \frac{-4z^2 + z}{(z-0{,}5)(z-0{,}1)} = \frac{-4z+1}{z-0{,}5} \cdot \frac{z}{z-0{,}1} = \frac{-4+z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-0{,}1z^{-1}}$$



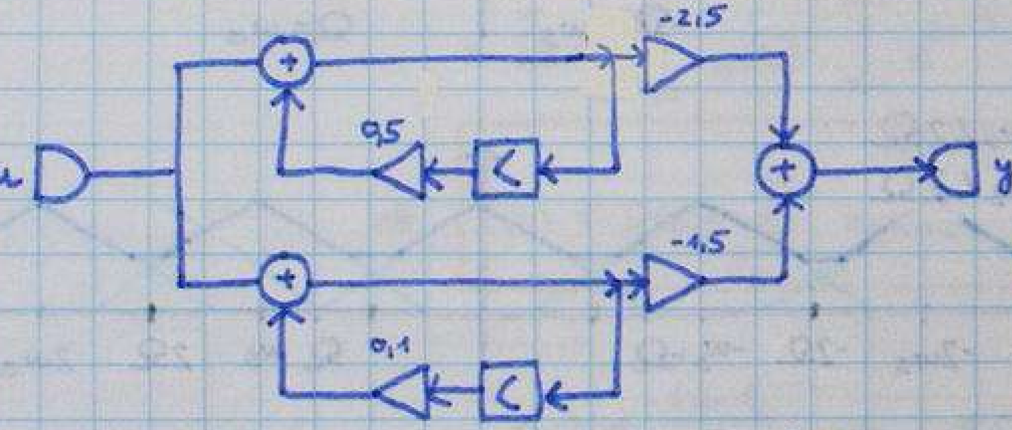
b.) **Párhuzamos realizáció**

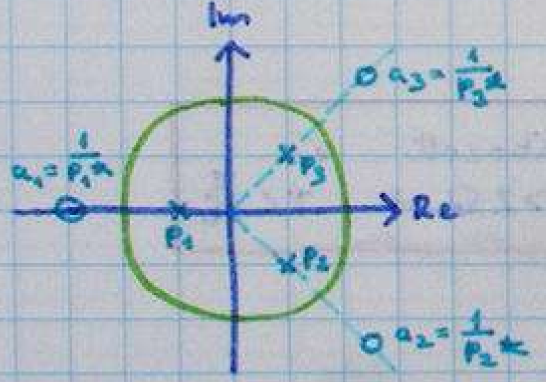


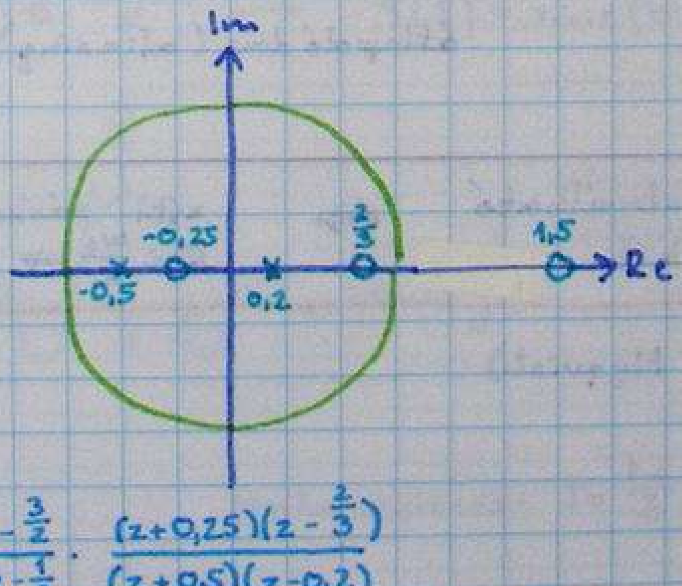
$H(z) = H_\alpha(z) + H_\beta(z) + \ldots + H_\Omega(z)$

pl.:

$$H(z) = \frac{-2{,}5z}{z-0{,}5} + \frac{-1{,}5z}{z-0{,}1} = \frac{-2{,}5}{1-0{,}5z^{-1}} + \frac{-1{,}5}{1-0{,}1z^{-1}}$$







$$H(z) = \frac{(z+0{,}25)(z-1{,}5)}{(z-0{,}2)(z+0{,}5)} = \underbrace{\frac{z-\frac{3}{2}}{z-\frac{1}{3}}}_{H_{mi}} \cdot \underbrace{\frac{(z+0{,}25)(z-\frac{2}{3})}{(z+0{,}5)(z-0{,}2)}}_{H_{mf}}$$

2009. 12. 08.

Neptunban jelentkezés: időpontok

7:10 1. zh
7:12 1-2. zh
7:13 1, 3. zh
⋮

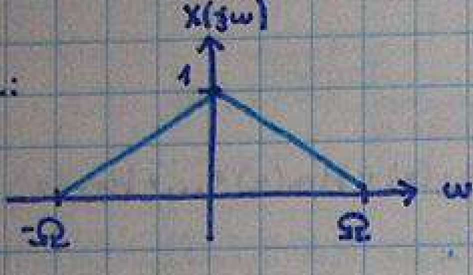
⇒ feladatsor névhez szóló
ülőhely adott
weben lesz az infó!

zh eredménye hétfőn!
pénteki zh-hoz korábbi zh-kat átnézni!

III. A mintavételi tétel

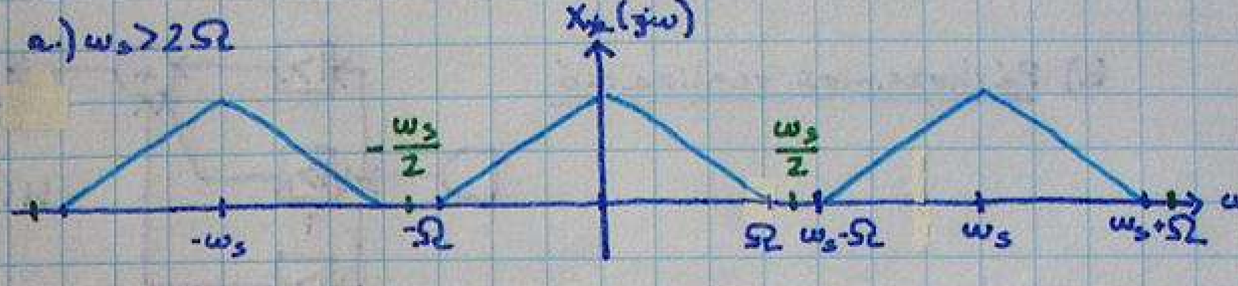
ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{x_*(t)\} \equiv X_*(j\omega) = \frac{T_0}{T} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(j(\omega + p\omega_s)),\ \omega_s = \frac{2\pi}{T}$

pl.:

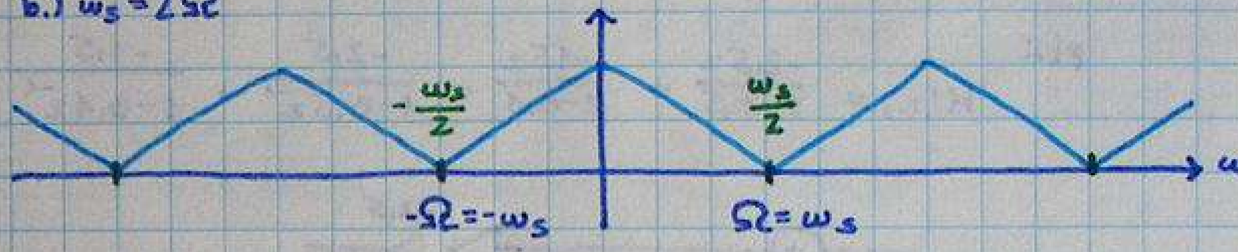


⇒

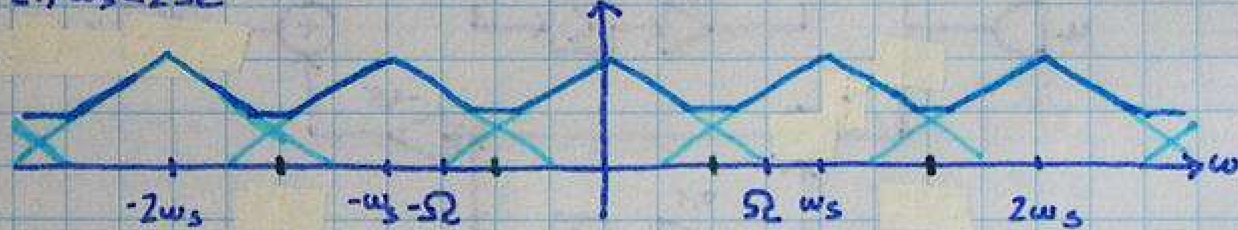
a.) $\omega_s > 2\Omega$



b.) $\omega_s = 2\Omega$



c.) $\omega_s < 2\Omega$



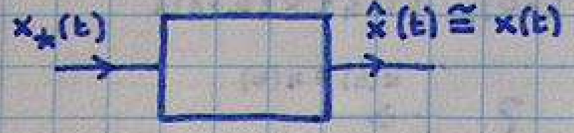
átlapolódás (aliasing)

Tétel: x(t) rekonstruálható a mintákból $\Leftrightarrow$ x(t) sávkorlátozott és $\Omega < \frac{\omega_s}{2} \rightarrow \omega_s > 2\Omega \rightarrow T < \frac{\pi}{\Omega}$

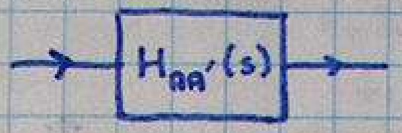
(Shannon, Nyquist)

IV. Jelrekonstrukció:

1.) Feladat:



2.) Aluláteresztő szűrő:



$$H_{AA'}(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{T_0} \cdot e^{-j\omega\tau}, & \text{ha} \quad |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

ekkor: $\hat{X}(j\omega) = X_*(j\omega) \cdot \frac{T}{T_0} \left[\varepsilon(\omega + \frac{\omega_s}{2}) - \varepsilon(\omega - \frac{\omega_s}{2}) \right] \cdot e^{-j\omega\tau}$

legyen $\tau = 0$: $\hat{X}(j\omega) = X_*(j\omega) \cdot H_{AA'}(j\omega) = T_0 \cdot X_D(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \omega T} \cdot H_{AA'}(j\omega) =$

$$= T_0 \cdot \mathcal{F}\{x_D[k]\} \Big|_{\omega = \omega T} \cdot H_{AA'}(j\omega) = T_0 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot e^{-jk\omega T} \right) \cdot H_{AA'}(j\omega)$$

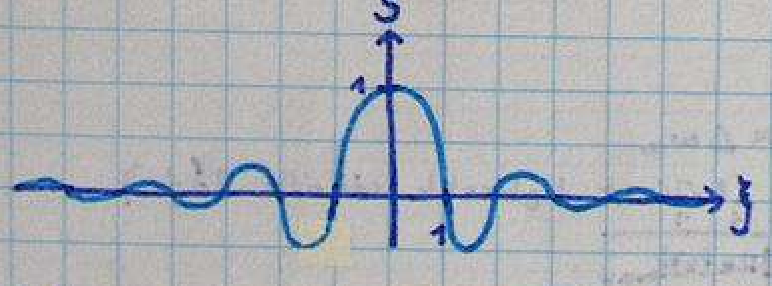
$$\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{X}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot e^{-jk\omega T} \cdot \frac{T}{T_0} \Big(\underbrace{\varepsilon[\omega + \frac{\omega_s}{2}] - \varepsilon[\omega - \frac{\omega_s}{2}]}_{\text{frekvencia ablak}} \Big) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega =$$

$$\left[-\frac{\omega_s}{2}; \frac{\omega_s}{2}\right] \text{ v. } \left[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}\right]$$

$$= \frac{T}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega(t-kT)} \cdot d\omega = \frac{T}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{T}(t-kT)} - e^{-j\frac{\pi}{T}(t-kT)}}{j(t-kT)}$$

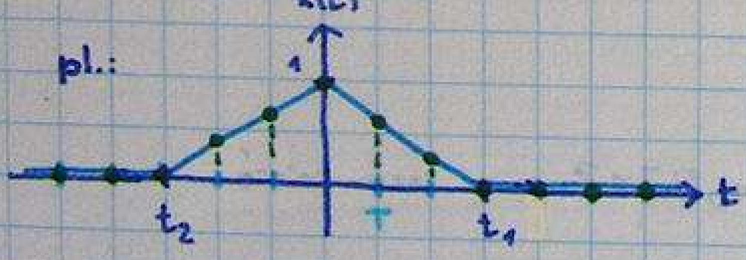
$$\Rightarrow \boxed{x(t) \cong \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot \frac{\sin \pi(\frac{t}{T} - k)}{\pi(\frac{t}{T} - k)}}$$ csak közelítőleg valósítható meg

Interpretáció: $\operatorname{sinc}(\alpha) \equiv \frac{\sin \alpha}{\alpha} \longrightarrow S(\xi) = \operatorname{sinc}(\pi\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$

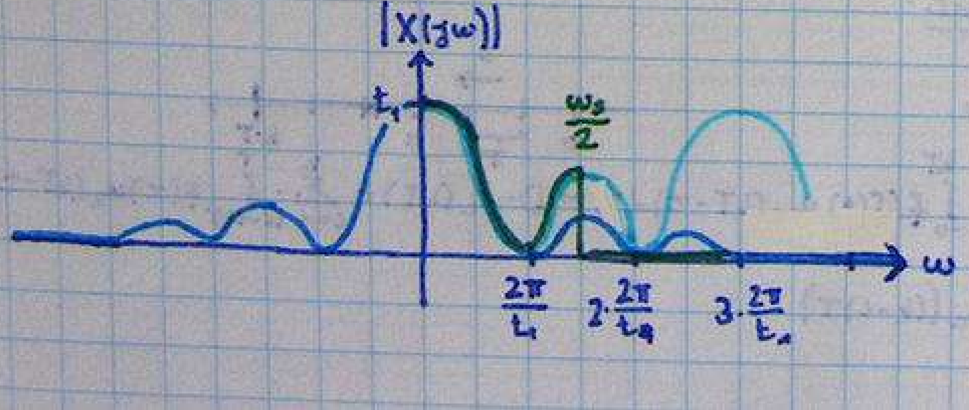


interpolációs függvény

pl.:

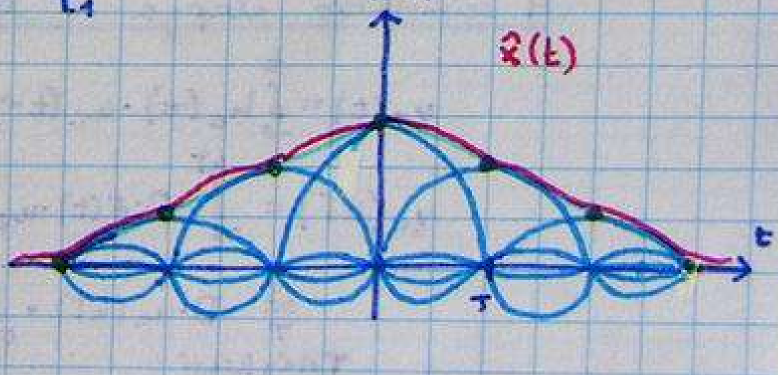


Mintavételezés: $T = \frac{t_1}{3}$

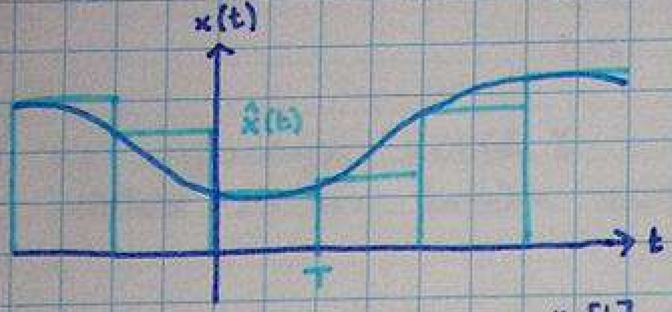


$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{6\pi}{t_1}$

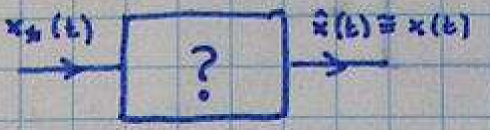
$\frac{\omega_s}{2} = \frac{3\pi}{t_1}$



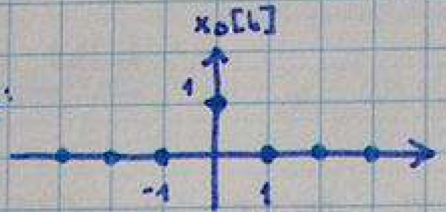
3.) Aluláteresztő szűrő nulladrendű tartóval

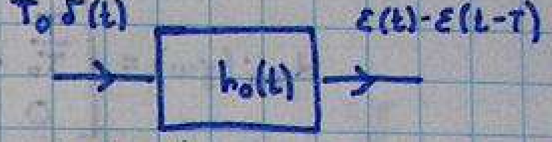


$$\hat{x}(t) = x(kT+0), \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$



Alapeset:





$$x_D[k] = \delta[k]$$
$$x_*(t) = T_0\,\delta(t)$$

$$\hat{x}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)$$

$$h_0(t) = \frac{1}{T}\cdot\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)$$

$$H_0(s) = \frac{1}{T_0}\cdot\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

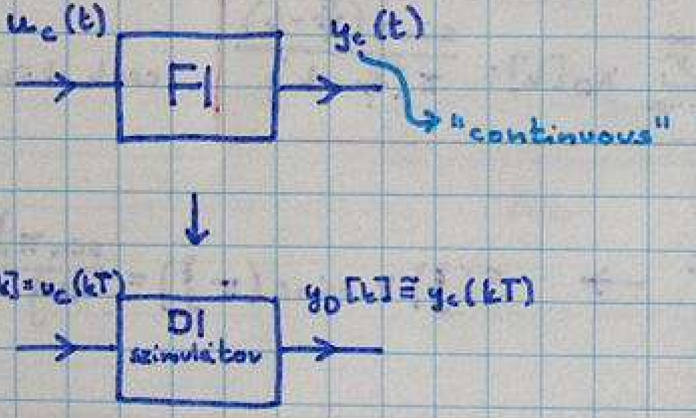
$$H_0(j\omega) = \frac{1}{T_0}\cdot\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{1}{T_0}\cdot\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{j\omega}\cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}} = \frac{2}{T_0}\cdot\frac{\sin\omega\frac{T}{2}}{\omega}\cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}} =$$

$$= \boxed{H_0(j\omega) = \frac{T}{T_0}\cdot\frac{\sin\omega\frac{T}{2}}{\omega\frac{T}{2}}\cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}}}$$

nem racionális törtfüggvény

DISZKRÉT SZIMULÁCIÓ

I. Feladatkitűzés:



Tökéletes szimulátor:

$y_D[k] = y_c(kT)$ tetszőleges gerjesztésre

nem létezik ⇒ többféle közelítő megoldás

T megválasztása: $T < \frac{\pi}{\Omega}$, $\Omega \approx \Delta\omega_u$

$T \ll \tau_{min}$ (hálózat legkisebb időállandója)

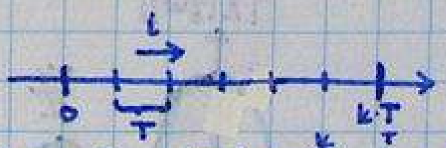
$$\tau_{min} = \frac{1}{|\mathrm{Re}\{x\}|_{max}}$$

II. Szimuláció az impulzusválasz alapján

legyen $h_c(t) = D\cdot\delta(t) + \varepsilon(t)\cdot f(t) \Rightarrow h_D[k] = ?$

A szimuláció alapja a G-V kapcsolat:

$$y_c(t) = \int_{-0}^{t} h_c(\tau)\cdot u_c(t-\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0$$



$$y_c(kT) = \int_{-0}^{kT} D\cdot\delta(t)\cdot u_c(kT-\tau)\,d\tau + \int_{-0}^{kT} f(\tau)\cdot u_c(kT-\tau)\,d\tau = D\cdot u_c(kT) + \sum_{i=1}^{k}\cdot\int_{(i-1)T}^{iT} f(\tau)u_c(kT-\tau)\,d\tau =$$

$$\underset{\substack{T\\ \text{T elég kicsi}}}{\cong} D\cdot u_c(kT) + \sum_{i=1}^{k} T f(iT)\cdot u_c((k-i)T)$$

Folytonos kovolúció: $y_c(kT) = D\cdot u_c(kT) + \sum_{i=1}^{k} T f(iT)\cdot u_c((k-i)T)$

Diszkrét kovolúció: $y_D[k] = \sum_{i=0}^{k} h_D[i]\cdot u_D[k-i] = h_D[0]\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ =u_c(kT)}}{u_D[k]} + \sum_{i=1}^{k} h_D[i]\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ =u_c((k-i)T)}}{u_D[k-i]}$

Követelmény: $y_D[k] \cong y_c(kT) \Longrightarrow h_D[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k<0 \\ D, & \text{ha } k=0 \\ T\cdot f(kT), & \text{ha } k\geq 1 \end{cases}$

$\downarrow$

$$\boxed{h_D[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot T\cdot f(kT)}$$

4. Zh: dec 12, 16:15-17:15

A-Koroknai	IB028
Korsós-Szabó	St Nagy
Szakács-Zs	IB026

eredmény hétfőn (kiosztás)

pótZh dec 18, 8^{00} –

aznap eredmény

2008. 12. 11.

III. Szimuláció az átviteli függvény alapján

legyen $v_c(t) = e^{j\omega t}$, akkor $\qquad v_D[k] = e^{j\omega k T} = e^{j\vartheta k}$, $\vartheta = \omega T$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$y_c(t) = H_c(j\omega)\cdot e^{j\omega t} \qquad\qquad y_D[k] = H_D(e^{j\vartheta})\cdot e^{j\omega T k}$$

$y_c[t] = y_D[k]$, ha $\boxed{H_D(e^{j\vartheta}) = H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\vartheta}{T}}}$ így kell megválasztani a szimulátor átviteli karakterisztikáját

$$\left.\begin{aligned} H_D(e^{j\vartheta}) &= H_D(z)\Big|_{\substack{z=e^{j\vartheta} \\ \to \vartheta=-j\ln z}} \\ H_c(j\omega) &= H_c(s)\Big|_{s=j\omega=\frac{j\vartheta}{T}} \end{aligned}\right\} \boxed{H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}}$$

→ ln helyett racionális közelítés

$s = \frac{1}{T}\ln z$ racionális közelítése: $s = \frac{p}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}$, $0 < p \leq 2$ (alapértelmezett: $p=2$)

↳ közelítés hangolására adott frekvencia esetében ideális legyen a szimulátor

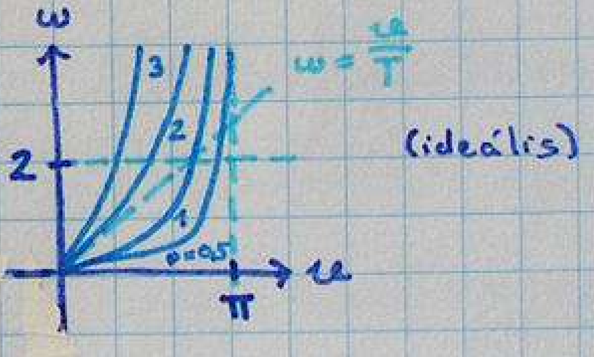
$$\downarrow$$

! $\boxed{H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{p}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}}}$ bilineáris / Tuskin transzformáció

frekvenciatartományban:

$$s = j\omega,\quad z = e^{j\vartheta};\qquad j\omega = \frac{p}{T}\cdot\frac{e^{j\vartheta}-1}{e^{j\vartheta}+1} = \frac{p}{T}\cdot\frac{e^{j\frac{\vartheta}{2}} - e^{-j\frac{\vartheta}{2}}}{e^{j\frac{\vartheta}{2}} + e^{-j\frac{\vartheta}{2}}}\cdot\frac{e^{j\frac{\vartheta}{2}}}{e^{j\frac{\vartheta}{2}}} = \frac{p}{T}\cdot\frac{2j\sin\frac{\vartheta}{2}}{2\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{jp}{T}\cdot\tan\frac{\vartheta}{2}$$

$$\boxed{H_D(e^{j\vartheta}) = H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{p}{T}\tan\frac{\vartheta}{2}}}$$



tfh. ω_0 frekvencia optimális szimulátor → $\vartheta_0 = \omega T$

Metszéspont:

$$\omega_0 = \frac{p}{T}\cdot\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)$$

$$p = \frac{T\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}$$

IV. Példák:

$\boxed{P1}$ $H_c(s) = \frac{2s}{s+5}$, szimulátor mindkét módszerrel, $T = 0{,}1$

a.) impulzus válasz szimulációja alapján

$$H_c(s) = \frac{2(s+5) - 10}{s+5} = 2 - \frac{10}{s+5} \rightarrow h_c(t) = 2\delta(t) - 10\varepsilon(t)e^{-5t} \qquad e^{-0{,}5} \cong 0{,}61$$

$$h_D[k] = 2\delta[k] - 10 \cdot 0{,}1 \cdot \varepsilon[k-1]e^{-5 \cdot k \cdot 0{,}1}$$

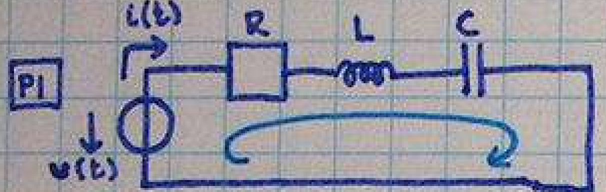
$$= 2\delta[k] - 0{,}61 \cdot \varepsilon[k-1] \cdot 0{,}61^{k-1}$$

$$h_D[k] \rightarrow H_D(z) = 2 - 0{,}61 \cdot \frac{z}{z-0{,}61} \cdot z^{-1} = \frac{2z-1{,}83}{z-0{,}61}$$

b.) $(p = 2)$ $H_D(z) = H_c(s)\Big|_{\frac{2}{0{,}1} \cdot \frac{z-1}{z+1}} \Rightarrow \frac{2 \cdot \frac{2}{0{,}1} \cdot \frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{0{,}1} \cdot \frac{z-1}{z+1} + 5} = \frac{4z-2}{2z-2+0{,}5z+0{,}5} = \frac{4z-4}{2{,}5z-1{,}5} = \frac{1{,}6z-1{,}6}{z-0{,}6}$

$$H_D(z) \rightarrow h_D[k] = \ldots = 1{,}6\delta[k] - 0{,}64 \cdot \varepsilon[k-1] \cdot 0{,}6^{k-1}$$

$\boxed{P1}$



$R = 0{,}01k\Omega$
$L = 0{,}5H$
$C = 4\mu F$

Kirchoff II: $-u + Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-0}^{t} i(\tau)d\tau = 0$

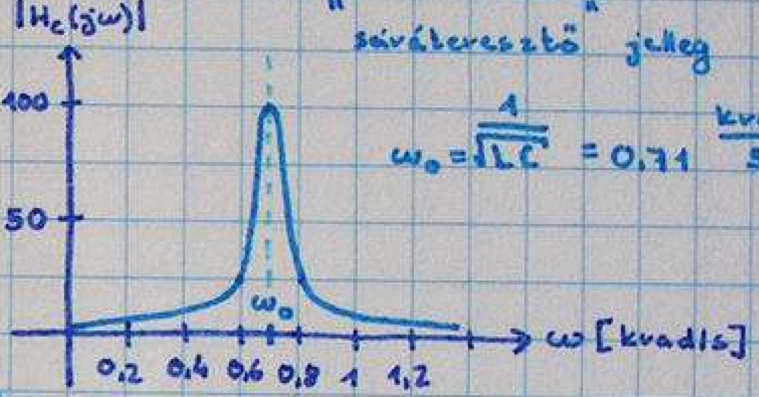
(tfh. $u(t)$ belépő)

$$KII \xrightarrow{\mathcal{L}} -U(s) + RI(s) + L \cdot sI(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot I(s) = 0$$

$$H_c(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \ldots = \frac{2s}{s^2 + 0{,}02s + 0{,}5}$$

$$H_c(j\omega) = H_c(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2 + 0{,}02j\omega + 0{,}5}$$

$$s^2 + 0{,}02s + 0{,}5 = s \Rightarrow s_{1,2} = -0{,}01 \pm j0{,}71 \left[\frac{1}{ms}\right]$$



"sáváteresztő" jelleg

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 0{,}71 \frac{krad}{s}$$

Szimulátor bilineáris transzformációval: $T = ?$, $p = ?$

$$T < \frac{\pi}{\omega_0} \cong 4{,}41\,ms; \qquad \tau = -\frac{1}{-0{,}01} = 100ms \gg T \Rightarrow T = 1ms$$

$$p = \frac{T\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)} = 1{,}92 \quad \left(\omega_0 = 0{,}71 \frac{krad}{s}\right)$$

$$T, p \Rightarrow H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s = \frac{1{,}92}{1} \cdot \frac{z-1}{z+1}} = \frac{2 \cdot 1{,}92 \cdot \left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{1{,}92^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0{,}02 \cdot 1{,}92 \cdot \left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 0{,}5} = \frac{0{,}91z^2 - 0{,}91}{z^2 - 1{,}51z + 0{,}98}$$