1. PÓTZÁRTHELYI

1. (**20 + 20 pont**) Adja meg a z komplex számok algebrai alakját, ahol

$$a)\ z = (1-i)^6 + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \qquad b)\ z^3 - i = 0.$$

Megoldás.

$a)\ (1-i)^6 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^6 = 8\left(\cos\frac{21\pi}{2} + \sin\frac{21\pi}{2}\right) = 8i$ **(7p)**

$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \sin\frac{11\pi}{6}\right)} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{11\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{11\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(5+4+3p)

így $z = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 8\right) i.$ **(1p)**

$b)\ z^3 = i = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ **(5p)**

$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$,

$z_3 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i.$ **(5+5+5p)**

2. (**30 pont**) Tekintsük az $e:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{p}$ egyenest, és az $S: x+3y-2pz = 0$ síkot! Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az e egyenes párhuzamos legyen az S síkkal? Számítsuk ki ekkor az e és az S távolságát!

Megoldás.

Az egyenes párhuzamos a síkkal, ha $(2,2,p)$ irányvektora merőleges annak $(1,3,-2p)$ normálvektorára **(8p)**

tehát skalárszorzatuk: $2+6-2p^2 = 0$, vagyis $p = \pm 2$ **(8p)**.

Ekkor az egyenes és a sík távolsága megyegyezik az egyenes(ek)en fekvő $P(1,2,0)$ pont és a sík távolságával. **(6p)**

$d(P,S) = \frac{|1\cdot 1 + 3\cdot 2 \pm 2\cdot 0|}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}} = \frac{7}{\sqrt{26}}$ **(8p)**

3. (**30 pont**) Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4}{3n^2-2}\right)^n \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4}{3n^2-2}\right)^{n^3}$$

Megoldás. $\left(\frac{3n^2+4}{3n^2-2}\right)^{n^2} = \sqrt[3]{\frac{\left(1+\frac{4}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1-\frac{2}{3n^2}\right)^{3n^2}}} \to e^2$ **(10p)**

Elég nagy n-re $1 \leftarrow \sqrt[n]{e^2-\varepsilon} < \left(\frac{3n^2+4}{3n^2-2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+4}{3n^2-2}\right)^{n^2}} < \sqrt[n]{e^2+\varepsilon} \to 1$ **(10p)**

Elég nagy n-re $\left(\frac{3n^2+4}{3n^2-2}\right)^{n^3} = \left(\left(\frac{3n^2+4}{3n^2-2}\right)^{n^2}\right)^n > (e^2-\varepsilon)^n \to \infty$ **(10p)**

2. PÓTZÁRTHELYI

1. (**30 pont**)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)x\sin\frac{2}{x} \;=?$$

Megoldás. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-(2x^2-5x)}{\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{\sqrt{2+\frac{4}{x}}+\sqrt{2-\frac{5}{x}}} = \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$ **(5+5+4p)**

$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin(2x)}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin(2x)}{2x} = 2$ **(5+5+4p)**

így $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)x\sin\dfrac{2}{x} = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$ **(2p)**

2. (**30 pont**)
Hol differenciálható az $f(x)=\cos x\arcsin(\operatorname{th} x)$ függvény? Adjuk meg a deriváltját, és érintőegyenesének egyenletét az $x=0$ pontban.

Megoldás $D_{\mathrm{th}}=\mathbb{R}$, $R_{\mathrm{th}}=(-1,1)\subset[-1,1]=D_{\arcsin}$, így $D_f=\mathbb{R}$ **(8p)**

$f'(x) = -\sin x\arcsin(\operatorname{th} x) + \dfrac{\cos x}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$ **(10p)**

$D_{f'}=\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, így az érintő egyenlete: $y=x$ **(3+3+3+3p)**

3. (**20+20 pont**)
Számoljuk ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arctg} x}{\cos x-1} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{e^{-x}}$$

Megoldás. *a)* $\frac{0}{0}$ típusú határérték **(3p)**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\cos x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}}{-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{-\cos x} = -2$ **(5+9+3p)**

b) 0^∞ típusú határérték **(3p)**

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{e^{-x}\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}-\frac{\ln x}{e^x}}$ **(5+5p)**

Itt $\lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{\ln x}{e^x} = -\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^x} = 0$ **(5p)**

tehát a határérték $e^0=1$ **(2p)**