2. zárthelyi

A3 2007 ősz

Munkaidő: 90'

1. Legyen H egy z-tengelyű R sugarú m magasságú egyenes körhengerpalást, melynek alaplapja az $[xy]$ síkban van és úgy van irányítva, hogy az irányított hengerpalást az alaplappal és a fedőlappal lezárt kifele irányított zárt hengerfelületből keletkezik az alap- és fedőlapok elhagyásával. Határozza meg a $v(r) = r$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény F-en vett felületmenti integrálját!

2. Legyen K az origóközéppontú R sugarú $[xy]$ síkbeli pozitívan irányított körvonal és $v(r) = |r|^2(k \times r)$ minden $r \in \mathbb{R}^3$ esetén (k a z tengely irányú egységvektor). Határozza meg a v vektor-vektor függvény K-n vett vonalmenti integrálját!

3. Hol létezik határértéke az $f(z) = \dfrac{z}{z - \overline{z}}$ komplex függvénynek?

4. Számítsuk ki a $\sin i + i \cos i$ értékét! (i a képzetes egység.)

5. Számítsa ki az

$$\int_K 3z^2 + 1 \, dz$$

komplex integrál értékét, ha K a $z_0 = 3$ középpontú $R = 1$ sugarú körvonal felső félköre!

6.

(a) Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$, nyílt, $v : H \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges olyan vektorfüggvény és $F, F_1, F_2 \subseteq H$ tetszőleges olyan felületek, melyekre fennállnak a Gauss-Osztrogradszkij tétel feltételei. Melyik következik a Gauss-Osztrogradszkij tételből?

(1) Ha $\operatorname{div} v = 0$ a H-n, akkor a v-nek F-en vett felületmenti integrálja megegyezik ott a térfogati integráljával

(2) v-nek az F által bezárt térrészen vett térfogati integrálja megegyezik $\operatorname{div} v$-nek F-re vett felületmenti integráljával

(3) Ha $\operatorname{div} v = 0$ a H-n, akkor a v-nek F_1-en és F_2-n vett felületmenti integráljai megegyeznek

(4) Ha $\operatorname{div} v = 0$ a H-n, akkor v-nek az F határára vett vonalmenti integrálja megegyezik a $\operatorname{div} v$-nek az F-en vett felületmenti integráljával

(b) Legyen $H \subseteq \mathbb{C}$ nyílt, $f : H \to \mathbb{C}$ és $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$ tetszőlegesek. Melyik igaz, melyik nem?

(1) Ha f reguláris z_0-ban, akkor ott deriválható

(2) Ha f deriválható z_0-ban, akkor ott reguláris

(3) Ha f reguláris z_0-ben és $u(x, y), v(x, y)$ a valós ill. képzetes része, akkor

$$u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)$$

(4) Ha f reguláris z_0-ben és $u(x, y), v(x, y)$ a valós ill. képzetes része, akkor

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$