1. feladat (10+10=20 pont)

$$(\alpha)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!} \qquad (\beta)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$$

a) Abszolút konvergens-e a fenti numerikus sor?

b) Mennyi a sor összege?

Megoldás.

a) Hányadoskritérium a tagok abszolútértékére:

$$(\alpha)\quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\cdot\left|\frac{n!}{(-3)^n}\right|=\frac{3}{n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0<1 \implies \text{abszolút konvergens.}$$
$$(\beta)\quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\cdot\left|\frac{n!}{(-2)^n}\right|=\frac{2}{n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0<1 \implies \text{abszolút konvergens.}$$

b) Tudjuk, hogy $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Eszerint:

$$(\alpha)\quad x:=-3,\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}-\frac{(-3)^0}{0!}-\frac{(-3)^1}{1!}=e^{-3}+2$$
$$(\beta)\quad x:=-2,\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}-\frac{(-2)^0}{0!}-\frac{(-2)^1}{1!}-\frac{(-2)^2}{2!}=e^{-2}-1$$

Pontozás: Mindkét rész 10 pont. a) az abszolút konvergencia fogalmának ismerete **(3p)**, a hányadoskritérium ismerete **(3p)** és helyes alkalmazása **(4p)**. b) e^x sorának ismerete **(4p)**, az összegzés kezdetének figyelembevétele **(3p)** és a helyes végeredmény**(3p)**.

2. feladat (20 pont)

$$(\alpha)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n} \qquad (\beta)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-1)^n}{n}$$

Határozza meg a fenti hatványsor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

1. Megoldás. Felhasználva, hogy $-1<x\le 1$ esetén $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, $y=-x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}=-\ln(1-y),\qquad -1\le y<1.$$

(α) $\quad -1\le 3x+1<1 \implies -2/3\le x<0.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n}=-\ln(-3x).$$

(β) $-1 \leq 5x-1 < 1 \implies 0 \leq x < 2/5$.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-1)^n}{n} = -\ln(2-5x).$$

2. Megoldás. Először egyszerű átalakítással megkeressük a hatványsor együtthatóit **(3p)**, majd akár a gyök- akár a hányadoskritériumból megkapjuk a konvergenciasugarat **(3p)**. A végpontok vizsgálatával megkapjuk a konvergenciatartományt **(4p)** (végpontonként 2p). (Összesen 10 pont.)

Ezután felismerjük, hogy a sor tagonkénti deriválásával mértani sort kapunk **(3p)**, aminek összegét kiszámoljuk **(3p)**. Az összeg integrálásával kapjuk meg a kérdésben szereplő függvénysor összegfüggvényét **(4p)**.

Az (α) variáns esetében részletezzük az összeg kiszámolását. Legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n}$! Ekkor
$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{\infty} 3(3x+1)^{n-1} = \frac{3}{1-(3x+1)} = \frac{-1}{x},$$
(Felcseréltük az összegzést a deriválással, elvégeztük a deriválást tagonként, majd a kapott mértani sort összegeztük.)

Minden $a \in D_f = \left[\frac{-2}{3}, 0\right)$ esetén igaz, hogy:
$$f(x) = f(a) + \int_{t=a}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Esetünkben az $a = \frac{-1}{3}$ választás a célszerű, hiszen behelyettesítéssel látható, hogy $f\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$, így
$$f(x) = 0 + \int_{\frac{-1}{3}}^{x} \frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln|x| + \ln\left|\frac{-1}{3}\right| = -\ln(-3x), \qquad \text{ha } x \in D_f = \left[\frac{-2}{3}, 0\right).$$

3. feladat (10 pont)

$$(\alpha) \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2-4x+6}, \quad x_0 = 2 \qquad (\beta) \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2+6x+6}, \quad x_0 = -3.$$

Határozza meg az f függvény x_0 körüli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!
Megoldás.
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$
KT$=(-\infty, \infty)$.
$$(\alpha) \quad \mathrm{e}^{x^2-4x+6} = \mathrm{e}^{(x-2)^2+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^2}{n!}(x-2)^{2n}.$$
$$(\beta) \quad \mathrm{e}^{x^2+6x+6} = \mathrm{e}^{(x+3)^2-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3}}{n!}(x+3)^{2n}.$$

Pontozás: Az exponenciális függvény sorának ismerete **(2p)**, a kitevő átalakítása **(2p)**, a konstans szorzó kiemelése **(2p)**, a helyes végeredmény **(2p)**, konvergenciatartomány **(2p)**.

4. feladat (10 pont)

$$(\alpha)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{sh}(5x)\qquad (\beta)\quad f(x)=\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{ch}(5x)$$

Adja meg az f függvény origó körüli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!
Megoldás.

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

KT$=(-\infty,\infty)$.

$$(\alpha)\quad \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{sh}(5x)=\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{-5x}}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((-1/2)\,(-7)^k+(1/2)3^k\right)x^k}{k!}$$

$$(\beta)\quad \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{ch}(5x)=\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{e}^{-5x}}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((1/2)\,(-2)^k+(1/2)8^k\right)x^k}{k!}$$

Pontozás: A hiperbolikus függvény felírása exponenciális függvényekkel **(4p)**, exponenciális függvény sorának ismerete **(2p)**, helyes végeredmény **(2p)**, konvergenciatartomány **(2p)**.

5. feladat (10+5=15 pont)

$$(\alpha)\quad f(x)=\sqrt[3]{1-2x^3}\qquad (\beta)\quad f(x)=\sqrt[3]{1-3x^2}$$

a) Adja meg az f függvény origó körüli Taylor-sorát, és annak konvergenciasugarát!

b) Adja meg az (α) $f^{(9)}(0)$; (β) $f^{(6)}(0)$ derivált értékét elemi műveletekkel!

Megoldás.

$$(1+z)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}z^k,\quad |z|<1.$$

a) (α) $\sqrt[3]{1-2x^3}=(1+(-2x^3))^{1/3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/3}{k}(-2)^k x^{3k},\quad R=2^{-1/3}.$

(β) $\sqrt[3]{1-3x^2}=(1+(-3x^2))^{1/3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/3}{k}(-3)^k x^{2k},\quad R=3^{-1/2}.$

b)

$$(\alpha)\qquad f^{(9)}(0)=\binom{1/3}{3}\cdot(-2)^3\cdot 9!=\frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot(-8)\cdot 9!,$$

$$(\beta)\qquad f^{(6)}(0)=\binom{1/3}{3}\cdot(-3)^3\cdot 6!=\frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot(-27)\cdot 6!.$$

Pontozás: Binomiális sorfejtés **(5p)**, konvergenciasugár **(5p)**, derivált **(5p)**.

6. feladat (6+14+5=25 pont)

$$(\alpha) \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y = 0 \\ \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$(\beta) \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y = 0 \\ \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Hol folytonos az f függvény?

b) Adja meg f parciális deriváltjait, ahol léteznek! (Az origóban a definícióval számoljon!)

c) Hol deriválható totálisan f? (Válaszát indokolja meg!)

Megoldás.

a) Origón kívül folytonos, mert folytonos függvények hányadosa, és a nevező nem nulla.
Origóban
(α)

$$y := mx.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = -\frac{m^2}{1+m^2},$$

nem folytonos az origóban.
(β)

$$y := mx.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + m^3x^3}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2},$$

nem folytonos az origóban.

b) (α) Origón kívül

$$f'_x(x,y) = 3\,\frac{x^2}{x^2+y^2} - 2\,\frac{(x^3-y^2)\,x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = -2\,\frac{y}{x^2+y^2} - 2\,\frac{(x^3-y^2)\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

Origóban

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/x^2}{x} = 1.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-y^2/y^2}{y} = \nexists.$$

(β) Origón kívül

$$f'_x(x,y) = 2\,\frac{x}{x^2+y^2} - 2\,\frac{(y^3+x^2)\,x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'_y(x,y) = 3\,\frac{y^2}{x^2+y^2} - 2\,\frac{(y^3+x^2)\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

Origóban

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2/x^2}{x} = \nexists.$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0}\frac{y^3/y^2}{y} = 1.$$

c) Az origón kívül a parciális deriváltak folytonosak, ezért ott az f totálisan differenciálható. Mivel az f az origóban nem folytonos, ezért ott nem totálisan differenciálható. Másik lehetséges indoklás: az origóban nem létezik az egyik parciális derivált.

Pontozás: Folytonosság az origón kívül **(2p)**, nem folytonos az origóban **(4p)**. Az origón kívül f'_x **(3p)**, f'_y **(3p)**, az origóban $f'_x(0,0)$ **(4p)**, $f'_y(0,0)$ **(4p)**. Totális deriválhatóság az origón kívül **(3p)**, az origóban nem differenciálható totálisan **(2p)**.

IMSC feladat (12 IMSC pont)

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Adja meg az f függvény $x_0 = 2$ körüli Taylor-sorát, valamint határozza meg a sor konvergenciatartományát!

Megoldás.
A törtet parciális törtek összegére bontjuk:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}. \qquad \textbf{(3p)}$$

Ezután mindkét parciális törtet $x-2$ hányadosú geometriai sor összegévé alakítjuk:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\big(-(x-2)\big)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n, \qquad \text{ha } 1<x<3, \qquad \textbf{(3p)}$$
$$\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{-1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{-(x-2)}{3}} = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-2)^n, \qquad \text{ha } -1<x<5, \qquad \textbf{(3p)}$$

A két sort összeadva, illetve a konvergenciatartományok metszetét véve kapjuk a végeredményt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-2)^n, \qquad \text{ha } 1<x<3. \qquad \textbf{(3p)}$$