α VARIÁNS $\quad c_n = |a_n|$

1, $\boxed{15}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\overbrace{\frac{3n+5}{2n^2}}^{c_n}}_{a_n}$ Nagy n-re $|a_n| = c_n \sim \frac{1}{n}$, és $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$

$\Longrightarrow$ minoráns krit.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Longrightarrow$$ a sor nem abszolút konvergens (5)

$\boxed{10}$

Igazoljuk, hogy a sor Leibniz. vált. előjelű (1), és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (2)

$$|a_{n+1}| \overset{?}{\leq} |a_n| \ (2) \Longleftrightarrow \frac{3(n+1)+5}{2(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{3n+5}{2n^2}$$

$$\Longleftrightarrow 2n^2(3n+8) \overset{?}{\leq} 2(n^2+2n+1)(3n+5)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{6n^3} + 16n^2 \overset{?}{\leq} \cancel{6n^3} + 22n^2 + 26n + 10$$

$$\Longleftrightarrow 0 \overset{?}{\leq} 6n^2 + 26n + 10 \ (3)$$ igaz $\forall n \in \mathbb{N}$-re, tehát a sor Leibniz, így konvergens.

Tehát a sor feltételesen konv. (2)

— o —

2, $\boxed{10}$ Konvergenciasugár:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(3x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n\cdot 3^n}_{a_n} \cdot \left(x+\frac{2}{3}\right)^n \quad ; \quad x_0 = \frac{-2}{3} \ (2)$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}\cdot 3 \xrightarrow{n\to\infty} 3 \Longrightarrow R = \frac{1}{3} \ (3)$$

Végpontok: $x = x_0 \pm R$-ben $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^n \cdot (\pm R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n \cdot n$

divergens, mert $(-1)^n \cdot n \not\to 0$. (5)

Tehát a konv. tartomány: K.T. $= D_S = (x_0 - R, x_0 + R) = \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

Összeg: $\boxed{15}$

$$\int \frac{S(x)}{3x+2}\,dx \ (3) = \int \sum_{n=1}^{\infty} n(3x+2)^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\int(3x+2)^{n-1}\,dx \ (2) =$$

ha $x \in \mathrm{int}(K.T.)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n}\cdot\frac{(3x+2)^n}{3\cdot\cancel{n}} \ (3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3x+2}{1-(3x+2)} = -\frac{3x+2}{9x+3} \ (3) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9x+3}$$

2, (folyt.) $\quad$ ha $x \in (-1, -\frac{1}{3})$

$$\frac{S(x)}{3x+2} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{9x+3}\right)' = \frac{9}{(9x+3)^2} = \frac{1}{(3x+1)^2} \; ③; \quad \underline{\underline{S(x) = \frac{3x+2}{(3x+1)^2}}} \; ①$$

3, $\boxed{10}$ Tudjuk, hogy $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \ldots$ ②, tehát

$$T_4(x) = \underbrace{3 + 5x - 2x^2 + \frac{5^3}{6}x^3 + 0 \cdot x^4}_{③} + \frac{5^5 \operatorname{ch}(5\xi)}{5!} x^5 \; ④$$

0 és x ① között van ξ

4, $\boxed{10}$

$$f(x) = \cos(2x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x^3)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{6n} \; ⑦$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ esetén ③

5, a, $\boxed{10}$

$$f(x) = (2 - x^3)^{-1/3} = 2^{-1/3} \cdot \left(1 - \frac{x^3}{2}\right)^{-1/3} ③ = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} \left(-\frac{x^3}{2}\right)^n ④ =$$

$$③ = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot x^{3n}, \text{ ha } \left|\frac{x^3}{2}\right| < 1, \text{ azaz } |x| < \underline{\underline{\sqrt[3]{2} = R}}$$

b, $\boxed{5}$

$$f^{(9)}(0) = 9! \cdot \underset{\uparrow \, n=3}{a_9} ② = 9! \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \underbrace{\frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)}{3!}}_{\binom{-1/3}{3}} \cdot \frac{-1}{8} \; ③$$

6, a, $\boxed{6}$ Az origón kívül f folytonos, mert folytonos fgv-ek hányadosa, és a nevező nem nulla. ②

$\boxed{4}$

Az origóban: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

korlátos

$$f(x,y) = \frac{2r^3\cos^3\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r} ② = 2\underset{\downarrow 0}{r^2}\cos^3\varphi - \underset{\downarrow 0}{r}\sin^2\varphi \xrightarrow{r \to 0} 0 = f(0,0)$$

Tehát f folytonos az origóban. ②

6, (folyt.)

b, Ha $(x,y) \neq (0,0)$

14

$$f'_x(x,y) = \frac{6x^2\sqrt{x^2+y^2} - (2x^3-y^2)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \quad ③$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-2y\sqrt{x^2+y^2} - (2x^3-y^2)\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \quad ③$$

Origóban:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(h,0)-f(0,0)\right) \overset{②}{=} \lim_{h\to 0}\frac{2h^3}{h\cdot|h|} = 0 \quad ②$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(0,h)-f(0,0)\right) \overset{②}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-2h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\cdot|h|} = \nexists \quad ②$$

c, f'_x, f'_y folytonos az $\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$ nyílt halmazon, tehát

5

f totálisan diff.-ható $\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$-án. ③

Az origóban $\nexists\, f'_y$, tehát f nem diff.-ható totálisan az origóban. ②

IMSC a, $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(0-0) = 0$ ②

6

$(x,y)\neq(\underline{0},\underline{0})$: $f'_x(x,y) = \frac{(2xy+y^2)(x^2+y^2)-(x^2y+xy^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \overset{②}{=} \frac{-x^2y^2+2xy^3+y^4}{(x^2+y^2)^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(\underline{0},\underline{0})} f'_x(x,y) = \underbrace{\lim_{r\to 0}}\frac{\cancel{r^4}(-\cos^2\varphi\sin^2\varphi+2\cos\varphi\sin^3\varphi+\sin^4\varphi)}{\cancel{r^4}} = \text{függ } \varphi\text{-től, tehát}$$

f'_x nem folyt. az origóban! ②

b, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, tehát az „elegyenes" vin": $v(x,y) = f(x,y) - 0 - 0\cdot x - 0\cdot y$

6

$$\frac{v(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^2y+xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{r^3(\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi)}{r^3} = \text{függ } \varphi\text{-től} \xrightarrow{r\to 0}\!\!\!\!\!\!/\;\; 0$$

$\Rightarrow \nexists$ grad $f(0,0)$ (A definíciót kell alkalmazni, a szükséges feltételek teljesülnek, az elégséges nem.)

(-4-)

B variáns (Csak végeredmények. A pontozás az α-hoz hasonló)

1, A minoráns kritériummal látható, hogy a sor nem abs. konv. 5
15 A sor Leibniz, így konvergens ⇒ feltételesen konv.

$$\frac{2(n+1)+7}{3(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{2n+7}{3n^2} \iff \cancel{6n^3}+27n^2 \overset{!}{\leq} \cancel{6n^3}+33n^2+48n+21$$

$$0 \leq 6n^2+48n+21$$

2, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot n\left(x+\frac{3}{2}\right)^n$; $x_0=-\frac{3}{2}$; $R=\frac{1}{2}$; K.T. $=(-2,-1)$
25

$$\int \frac{S(x)}{2x+3}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{2x+3}{1-(2x+3)}=\frac{2x+3}{-4(x+1)}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{4x+4}$$

$$S(x)=(2x+3)\cdot\left(\frac{-1}{2}-\frac{1}{4x+4}\right)'=\frac{4(2x+3)}{(4x+4)^2}=\frac{2x+3}{4(x+1)^2}$$, ha $x\in(-2,-1)$

3, $T_4(x)=5+5x-3x^2-\frac{5^3}{6}x^3+0\cdot x^4+\frac{5^5\cos(5\xi)}{5!}x^5$, 0 és x között van ξ
10

4, 10 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(2n)!}x^{4n}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

5, 15
10 a, $f(x)=3^{-1/3}\left(1-\frac{x^5}{3}\right)^{-1/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}\frac{(-1)^n}{3^n}x^{5n}$; $R=\sqrt[5]{3}$

5 b, $f^{(15)}(0)=15!\,a_{15}\underset{n=3}{=}15!\,\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)}{3!}\,\frac{-1}{3^3}$

6 a, 6 Az origón kívül és az origóban is folytonos.
25
14 b, $f'_x(x,y)=\dfrac{2x\sqrt{x^2+y^2}-(x^2-3y^3)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$, ha $(x,y)\neq\underline{0}$; $f'_x(\underline{0})=\nexists$

$f'_y(x,y)=\dfrac{-9y^2\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+3y^3)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$, ha $(x,y)\neq\underline{0}$; $f'_y(\underline{0})=0$

c, $\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$-on tot. diff.-ható,
5 $\underline{0}$-ban nem — " —