INFO AN2. 2. PPZH | ← 1-1 MEGOLDÁS | 2017. 05. 19.

1, $\boxed{16}$

$\boxed{6}$ a, Hányados krit.: $(a_n > 0)$ ⑥

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{3(n+1)+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{3n+1}} = \frac{2^3}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \Rightarrow \text{konvergens.}$$

b, $n \geq 100$:

$\boxed{10}$

$$a_n = \frac{2^{3n+1}}{n!} = \frac{2\cdot 8^n}{n!} = \underbrace{2\cdot\frac{8}{1}\cdot\frac{8}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{8}{100}}_{2\cdot\frac{8^{100}}{100!}}\cdot\overbrace{\underset{\frac{8}{101}}{\underset{\wedge\!\backslash}{\frac{8}{101}}}\cdot\ldots\cdot\underset{\frac{8}{101}}{\underset{\wedge\!\backslash}{\frac{8}{n}}}}^{n-100\text{ db.}}$$ ④

$$|S - S_{100}| = \sum_{n=101}^{\infty} 2\cdot\frac{8^n}{n!} \leq \sum_{n=101}^{\infty} 2\cdot\frac{8^{100}}{100!}\cdot\left(\frac{8}{101}\right)^{n-100} =$$ ③

$$= \frac{2\cdot 8^{100}}{100!}\cdot\frac{8}{101}\cdot\frac{1}{1-\frac{8}{101}}$$ ③

2, $\boxed{7}$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n+2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n}_{a_n} x^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$ ④

$x = \pm 1$-ben a sor divergens, mert $n\cdot(\pm 1)^n \not\to 0$. ③

Tehát $\underline{\underline{K.T. = (-1, +1)}}$

$\boxed{10}$

Tudjuk, hogy $|x| < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Ezt tagonként deriválva: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

x^3-el szorozva:

$$x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+2} = S(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

3, $\boxed{12}$

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{3(x-1)+5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-3}{5}\right)(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{5}\right)^n (x-1)^n, \quad 8$$

ha $\left|\frac{-3}{5}(x-1)\right| < 1$, azaz

$|x-1| < \frac{5}{3} \iff x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ 4

4, $\boxed{10}$

$$f(x) = \mathrm{ch}\left(\sqrt{3x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{3x}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}x^n \quad 7$$

; K.T. = ℝ, így $[0,\infty)$ 3

5, a,

$\boxed{7}$ $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n}, \quad 5$$

$R = 1$ 2

$\boxed{7}$ b,

$$g(x) = \arcsin x = \underbrace{g(0)}_{0} + \int_{t=0}^{x}\underbrace{g'(t)}_{f(t)}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\int_{t=0}^{x}t^{2n}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1} \quad 6,$$

$R = 1$ 1 (nem változik)

c,

$\boxed{7}$ $$T_4(x) = \frac{(-1)^0}{1}\binom{-1/2}{0}x + \frac{(-1)^1}{3}\binom{-1/2}{1}x^3 = x - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)x^3$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 \quad 7$$

6,
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+2y^2}, & ha\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & ha\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\boxed{6}$ a, Az origón kívül f folytonos, mert polinomok hányadosa, és a nevező nem nulla. ②

Az origóban f nem folytonos, mert például az $y=x^2$ görbe mentén: $f(x,x^2)=\dfrac{x^4}{x^4+2x^4}=\dfrac{1}{3}\neq f(0,0)=0$. ④

— • —

b, Az origón kívül:

$\boxed{13}$
$$f'_x(x,y)=\frac{4x^3(\cancel{x^4}+2y^2)-\cancel{x^4\cdot 4x^3}}{(x^4+2y^2)^2}=\frac{8x^3y^2}{(x^4+2y^2)^2}$$ ④

$$f'_y(x,y)=\frac{-4x^4y}{(x^4+2y^2)^2}$$ ③

Az origóban:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(h,0)-f(0,0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-0)=\nexists$$ ③

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(0,h)-f(0,0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(0-0)=0$$ ③

— • —

$\boxed{5}$ c, Az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ nyílt halmazon $\exists f'_x$, $\exists f'_y$, és mindkettő folytonos $\Longrightarrow$ az origón kívül f totálisan deriválható. ③

Az origóban f nem diff.-ható totálisan, mert itt nem folytonos. (vagy mert $\nexists f'_x(0,0)$) ②