ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI β **változat**

2012. márc. 8.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{x\ \mathrm{ch}(x)}{6y\ \mathrm{sh}(3y^2+1)}, \qquad y \neq 0$$

Elég a megoldást implicit alakban megadni.

$$\int \underbrace{6y}_{f'}\ \underbrace{\mathrm{sh}(3y^2+1)}_{\mathrm{sh} f}\, dy = \int x \cdot \mathrm{ch}x\, dx \qquad 3$$

$$\int x \cdot \mathrm{ch}x\, dx = x \cdot \mathrm{sh}x - \int \mathrm{sh}x\, dx = x\,\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x$$

$u = x \quad v' = \mathrm{ch}x$

$u' = 1 \quad v = \mathrm{sh}x$

A de. megoldása:

$$\underset{2}{\mathrm{ch}(3y^2+1)} = \underset{4}{x \cdot \mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x} + \underset{1}{C}$$

2. feladat (14 pont)

Az $u = \dfrac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg a következő differenciálegyenletet!

$$xy' = \sqrt{y^2+9x^2} + y, \qquad x > 0$$

A megoldást elég x és y közti implicit kapcsolat alakjában megadni.

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u \cdot 1 \qquad 3$$

A de-et átalakítva:

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 9} + \frac{y}{x}$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$u' \cdot x + u = \sqrt{u^2+9} + u \Rightarrow u' = \frac{1}{x}\sqrt{u^2+9} \qquad 3$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+9}} = \int \frac{1}{x}\, dx \qquad 2$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{3}\right)^2}}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\underset{3}{\frac{1}{3}\, \frac{\mathrm{arsh}\,\frac{u}{3}}{\frac{1}{3}}} = \underset{1}{\ln x} + \underset{1}{C} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Visszahelyettesítve:

$$\mathrm{arsh}\,\frac{y}{3x} = \ln x + C \qquad 1$$

an2z1β 120308/1.

3. feladat (16 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y' = \left(\frac{2y}{x^2+1} + x\right) \cdot x, \qquad y(0) = 6$$

A megoldást explicit alakban (y-ra kifejezve) adja meg!

Átrendezve:

$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = x^2$: lineáris elsőrendű de.

(H): $y' = \frac{2x}{1+x^2} y$: $y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú, ezért elegendő egy megoldást keresni.

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

$\ln y = \ln(x^2+1) \Rightarrow y = x^2+1 = \varphi(x)$

$\Rightarrow y_H = C(x^2+1), \quad C \in \mathbb{R}$ 6

$y_{ip} = c(x) \cdot (x^2+1)$ 1

$y'_{ip} = c'(x^2+1) + c \cdot 2x$

Behelyettesítve:

$c'(x^2+1) + c \cdot 2x - \frac{2x}{x^2+1} c \cdot (x^2+1) = x^2$

$\Rightarrow c = \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$

$= x - \operatorname{arctg} x$, tehát $y_{ip} = (x - \operatorname{arctg} x)(x^2+1)$ 5

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C \cdot (x^2+1) + (x - \operatorname{arctg} x)(x^2+1)$ 2

$y(0) = 6$: $\quad 6 = C + 0 \Rightarrow C = 6$:

$y = 6(x^2+1) + (x - \operatorname{arctg} x)(x^2+1)$ 2

an2z1/β 120308/2.

4. feladat (17 pont)

$$y' = x^2 - 2y + y^2 - 24$$

a) Rajzolja fel a fenti defferenciálegyenlet $K = 0$, -9 és $+11$ meredekséghez tartozó izoklináját, és ábrázoljon az izoklinákon néhány helyen egy-egy vonalelemet!

b) Van-e a fenti differenciálegyenlet $(x_0, y_0) = (3, 5)$ ponton átmenő megoldásának lokális szélsőértéke ebben a pontban? Ha igen, milyen jellegű?

a) Izoklinák: $x^2 - 2y + y^2 - 24 = K$ ②

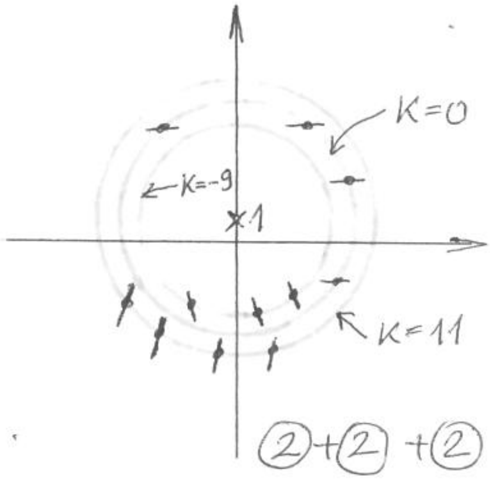
$\boxed{9}$

$x^2 + (y-1)^2 = K + 25$ ①

$K=0$: $x^2 + (y-1)^2 = 25$:
(0,1) középpontú 5 sugarú kör

$K=-9$: $x^2 + (y-1)^2 = 16$:
(0,1) középpontú 4 sugarú kör

$K=11$: $x^2 + (y-1)^2 = 36$:
(0,1) középpontú 6 sugarú kör.



② + ② + ②

b.) $y(3) = 5$

$\boxed{8}$

$y'(3) = x^2 - 2y + y^2 - 24 \Big|_{\substack{x=3\\y=5}} = 9 - 10 + 25 - 24 = 0$ ②
lehet lok. sz.é.

$y'' = 2x - 2y' + 2yy'$ ③

$y''(3) = 2x - 2y' + 2yy' \Big|_{\substack{x=3\\y=5\\y'=0}} = 6$ ①

$y'(3) = 0$ és $y''(3) > 0$: lokális minimum van az adott pontban. ②

5. feladat (17 pont)

$$y^{(4)} + 9y'' = f(x)$$

a) Határozza meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását, ha $f(x) = e^{3x}$!

b) Milyen alakban keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását, ha

$$f(x) = 2x + 1 - 3e^{-2x} \ ?$$

(A differenciálegyenletet most nem kell megoldani.)

an2z1β120308/3.

a.) $y^{IV} + 9y'' = e^{3x}$

$\boxed{13}$ (H): $\lambda^4 + 9\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+9) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm j3$

$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$ 6 $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$

(I):

$$\begin{array}{r|l} & y_{ip} = Ae^{3x} \quad 2 \\ & y'_{ip} = 3Ae^{3x} \\ 9\cdot & y''_{ip} = 9Ae^{3x} \\ & y'''_{ip} = 27Ae^{3x} \\ 1\cdot & y^{IV}_{ip} = 81Ae^{3x} \end{array}$$

Behelyettesítve (I)-be:

$e^{3x}(81A + 81A) = e^{3x}$

$\Rightarrow 162A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{162}$

$y_{ip} = \frac{1}{162} e^{3x}$ 3

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x + \frac{1}{162} e^{3x}$ 2

$C_i \in \mathbb{R}$

b.) $y_{ip} = (Ax + B)x^2 + Ce^{-2x}$

$\boxed{4}$ külső rezonancia

6. feladat (10 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabb rendű lineáris, homogén, állandó együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldásai között szerepel az

$$x\,e^{-2x} \qquad \text{és az} \qquad x^2$$

függvény! Írja föl az egyenlet általános megoldását is!

x^2 megoldás $\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0$ 2

$x e^{-2x}$ megoldás $\Rightarrow \lambda_{4,5} = -2$ 2

A karakterisztikus egyenlet:

$\lambda^3(\lambda+2)^2 = 0$

$\lambda^3(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = \lambda^5 + 4\lambda^4 + 4\lambda^3 = 0$ 2

A de.:

$y^{V} + 4y^{IV} + 4y''' = 0$ 2

A de. általános megoldása:

$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-2x} + C_5 x e^{-2x}$; $C_i \in \mathbb{R}$

2

7. feladat (16 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányados kritérium limeszes alakját!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$b1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}\cdot n^2}{10^{n+2}}, \qquad\qquad b2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

a.) T $\boxed{3}$

1. $(a_n>0,\ \forall n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c<1\right) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

2. $(a_n>0,\ \forall n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c>1 \text{ vagy } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

b.) $\boxed{13}$ b1.) $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{9^n\cdot n^2}{10^2\cdot 10^n}} = \frac{9\cdot(\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1})^2}{\underbrace{\sqrt[n]{100}}_{\to 1}\cdot 10} \to \frac{9}{10} < 1$ (2)

$\Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n$ konv. (4)

b2.) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} =$ (2) (2)

$= \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}} \to 4>1 \Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n$ div. (3)

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez, 40%-ig javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y' = e^y\cdot\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right), \qquad\qquad y(1)=0$$

A megoldást explicit alakban (y-ra kifejezve) adja meg!

Szeparálható de.: $\int \underbrace{\frac{1}{e^y}}_{e^{-y}}\,dy = \int\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right)dx$ (2)

$-e^{-y} = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^3}{3} + \tilde{C}, \qquad \tilde{C}\in\mathbb{R}$

(2) (2) (1)

an2z1β120308/5.

$e^{-y} = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = -\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} + C\right)$ 1 $\quad C \in \mathbb{R}$

$y(1) = 0$:

$0 = -\ln\left(1 + \frac{1}{3} + C\right) \Longrightarrow C = -\frac{1}{3}$

$y = -\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$ 2

9. feladat (10 pont)

$$f(n+1) = 5\,f(n) - 6\,f(n-1)$$

a) Határozza meg a fenti rekurzió általános megoldását!

b) Határozza meg a rekurzió

$$f(0) = 1\,, \qquad\qquad f(1) = 7$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldását!

a.) $f(n) = q^n$:

$\boxed{7}$ $q^{n+1} = 5q^n - 6q^{n-1} \quad \mid : q^{n-1} \neq 0$ 2

$q^2 = 5q - 6 \Rightarrow q^2 - 5q + 6 = 0 \Rightarrow q_1 = 3,\ q_2 = 2$ 3

$f(n) = c_1 3^n + c_2 2^n$ 2 $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b.) $\boxed{3}$

$$\left.\begin{array}{ll} f(0)=1: & c_1 + c_2 = 1 \\ f(1)=7: & 3c_1 + 2c_2 = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow c_1 = 5,\ c_2 = -4$$

$f(n) = 5 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n$