Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2010. november 25..

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen adott a 2 dimenziós V vektortéren az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

* * * * *

Mivel $\underline{b}_1 = 1 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_2$ és $\underline{b}_2 = 0 \cdot \underline{b}_1 + 1 \cdot \underline{b}_2$, ezért $[\underline{b}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $[\underline{b}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pont)

Mivel $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, ezért a tanult tétel szerint $[\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{b}_1]_B = [\underline{b}_2]_B$, (3 pont)

vagyis $\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4 pont)

Ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $1 \cdot p + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$ és $1 \cdot q + 0 \cdot \sqrt{3} = 1$, vagyis $p = 0$ és $q = 1$.(1 pont)

2. Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak.
a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét!
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p \\ 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) A tanult tétel szerint $\lambda = 3$ akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha $\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. (2 pont)

A fenti determinánst (például) az első sor szerinti kifejtéssel kiszámolva:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + p \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 + p \cdot 1 = p + 1.$$ (2 pont)

Ezekből tehát $p + 1 = 0$, vagyis $p = -1$. (1 pont) b)Tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátérték, vagyis kereshetünk egy ehhez tartozó sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektort keresünk, melyre $A \cdot \underline{v} = 3 \cdot \underline{v}$. (1 pont)

Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ekkor a mátrixszorzás definíciója szerint (és a $p = -1$ értéket figyelembe véve) a $4x - z = 3x$, $5x + 7y + 7z = 3y$, $x + y + 5z = 3z$ feltételek adódnak. (2 pont)

Az első egyenletből $z = x$, ezt a másik két egyenletbe helyettesítve rendezés után mindkét esetben az $y = -3x$ egyenletet kapjuk. (1 pont)

Így sajátvektor lesz a $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ x \end{pmatrix}$ vektor minden $x \neq 0$ értékre. (1 pont)

Megjegyzés. A fenti megoldásban csak a $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat határoztuk meg. További (kellemetlen, de nem nehéz) számolással megkapható a mátrix további két sajátértéke is: $\frac{13 \pm \sqrt{17}}{2}$. Ezekhez is tartoznak sajátvektorok, így elvileg a b) feladatnak további megoldásai is vannak. Azonban ezek meghatározása nyilván sokkal körülményesebb volna.

3. Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex számok halmazán (és az eredményt adjuk meg algebrai alakban)!

a) $(3 + 2i)^2$ b) $(1 + 17i) : (3 + i)$ c) $\sqrt[3]{-1000}$

* * * * *

a) $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$. (1 pont)

b) $\dfrac{1 + 17i}{3 + i} = \dfrac{(1 + 17i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \dfrac{3 - i + 51i - 17i^2}{9 - i^2} = \dfrac{20 + 50i}{10} = 2 + 5i$ (2 pont)

c) $-1000 = 1000(\cos \pi + i \sin \pi)$. (1 pont)

Így a tanult képlet szerint $\sqrt[3]{-1000} = 10 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, ahol $k = 0, 1, 2$. (1 pont)

Ebből $k = 0$-ra $10\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 + 5\sqrt{3}i$, (2 pont)

$k = 1$-re $10 (\cos \pi + i \sin \pi) = -10$, (1 pont)

és $k = 2$-re $10\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right) = 10\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 - 5\sqrt{3}i$ adódik. (2 pont)

4. Egy MIRNIXDIRNIX nevű országban furcsa szabályok szerint játsszák a lottót: egy szelvény kitöltése abból áll, hogy a játékos az ország nevének betűit összekeveri és valamilyen sorrendben leírja. (Így például egy lehetséges szelvény így nézhet ki: XIIRXMNDNIRI.) Az ország egyik lakója ezen a héten három szelvénnyel is szeretne játszani. Hányféleképpen töltheti ki a három szelvényt, ha arra azért szeretne vigyázni, hogy a szelvényei között ne legyen két ugyanolyan?

* * * * *

Egy szelvény kitöltésére a lehetőségek száma nem más, mint 4 db I, 2 db R, 2 db N, 2 db X, 1 db M és 1 db D elemekből készíthető ismétléses permutációk száma. (1 pont)

A tanult képlet szerint ez $\dfrac{12!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} =$ (2 pont)

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$. (1 pont)

Ha a feladatbeli lakó három szelvénnyel játszik, akkor a feladata nem más, mint a fenti számú – jelöljük ezt N-nel – lehetőségből kiválasztani három különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül. (2 pont)

Így az ismétlés nélküli kombinációra tanult képlet szerint a lehetőségek száma: $\dbinom{N}{3} =$ (1 pont)

$= \dfrac{N(N-1)(N-2)}{6}$. (3 pont)

5. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét (két tizedesjegy pontossággal)!

$$\log_2\left[\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\binom{101}{2}+\ldots+\binom{101}{50}\right]$$

$*\quad*\quad*\quad*\quad*$

$(1+1)^{101}$-et a binomiális tétellel kiszámítva: $2^{101}=\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{101}$. (2 pont)

Az $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ összefüggéstből: $\binom{101}{101}=\binom{101}{0}, \binom{101}{100}=\binom{101}{1}, \ldots, \binom{101}{51}=\binom{101}{50}$. (2 pont)

Ezt az 51 egyenlőséget a fentibe helyettesítve és összevonva:

$$2^{101}=2\cdot\left[\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}\right]. \quad \text{(4 pont)}$$

Ebből $\left[\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}\right]=2^{100}$, (1 pont)

Így a feladatbeli kifejezés pontos értéke 100. (1 pont)

Második megoldás.

A feladatbeli szögletes zárójelben álló összeg egy 101 elemű halmaz összes, legföljebb 50 elemű részhalmazát számlálja meg, az elemszám szerint vizsgálva, majd összeadva az eseteket. (2 pont)

A legföljebb 50 elemű részhalmazok párba állíthatók a legalább 51 eleműekkel: minden részhalmaz párja legyen a komplementere. (2 pont)

Ezért a legföljebb 50, illetve a legalább 51 elemű részhalmazok száma azonos. (2 pont)

A 101 elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^{101}, hiszen egy részhalmaz kiválasztásakor egymás után mind a 101 elemről kétféle döntés hozható: eleme lesz a részhalmaznak vagy sem. (2 pont)

A fentiekből $\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}=\frac{2^{101}}{2}=2^{100}$, (1 pont)

Így a feladatbeli kifejezés pontos értéke 100. (1 pont)

6. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?

$*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Ismert, hogy minden (legalább 2 pontú) fában van elsőfokú pont. Így az egyik fokszám 1. (1 pont)

Jelölje a másik fokszámot k.

A fában összesen $9+92=101$ csúcs van, így az éleinek száma (a tanultak szerint) 100. (2 pont)

Ezért a fában a fokszámok összege (az ismert összefüggés szerint) 200. (2 pont)

Először tegyük fel, hogy 9 db elsőfokú és 92 db k fokú pont van. Ekkor a fokok összege $92k+9$. (1 pont)

A $9+92k=200$ egyenletet megoldva k-ra nem egész szám adódik, így ez az eset nem lehetséges. (1 pont)

Ezért tehát 9 db k-adfokú és 92 db elsőfokú pont kell legyen a fában. Így a fokok összege $9k+92$. (1 pont)

A $9k+92=200$ egyenletből $k=12$ adódik. (1 pont)

Így a két előforduló fokszám: 1 és 12. (1 pont)

Megjegyzés. Valóban létezik olyan fa, amelyben 9 db 12 fokú és 92 db elsőfokú pont van. Ennek megmutatása elvileg hozzátartozna a feladat teljes értékű megoldásához, de nem jár pontlevonás azért, ha valaki ezt elmulasztja.