VIK, Műszaki Informatika

ANALÍZIS (1)

Numerikus sorok

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.

Kónya Ilona

2003. szeptember

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Numerikus sorok konvergenciája

A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen összeghez hozzárendelünk egy (s_n) számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{s_1} + a_2}_{s_2} + a_3}_{s_3} + \cdots + a_n}_{s_n} + \cdots$$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k : \quad n\text{-edik részletösszeg}$$

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

D A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s, ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}, & \text{az összeg konvergens} \\ \left.\begin{array}{r} +\infty, \\ -\infty, \\ \nexists, \end{array}\right\} & \text{az összeg divergens.} \end{cases}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ esetén $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \qquad \text{(Divergens a sor.)}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^k + \cdots$ divergens, mert

$$\left.\begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \to 1 \\ s_{2k} = 0 \to 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (s_n) \text{ -nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

Pl.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \quad \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 \, ,$$

tehát a sor konvergens.

Pl.

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1}$, mert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad \text{konvergens a sor.}$$

Pl. $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{(harmonikus sor) divergens}}$

Ugyanis

$$s_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \;\to\; \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$$

Ugyanis $s_n \geq s_{2^k}$, ha $n > 2^k$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

•••

(T) Geometriai sor

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{ha } |q|<1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

(B) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$

Ha $q = 1$:

$$s_n = n\,, \quad \text{ezért} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty\,.$$

Ha $q \neq 1$:

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}\,, \text{ ha } |q| < 1.$$

Mivel $q^n \to \infty$, ha $q > 1 \quad \Longrightarrow \quad s_n \to \infty$, ha $q > 1$.

Ha $q = -1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

$\Longrightarrow \quad s_n$-nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha $q < -1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$.

$\Longrightarrow \quad s_n$-nek is 2 torlódási pontja van: $-\infty$ és ∞, tehát divergens.

■

(Pl.) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} q^k = q^3 + q^4 + q^5 + \cdots = \dfrac{q^3}{1-q}$, ha $|q| < 1$.

A részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek q^3-szeresei, így a határérték (a sor összege) is q^3-nel szorzódik.

(Pl.) $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a\,q^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a\,q^{k-1} = \dfrac{a}{1-q}\,, \text{ ha } |q| < 1}$

Most a részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek a-szorosai, így a határérték is a-szoros lesz.

(M) Ha a sorban *véges sok* tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

(M) $\sum_{k=1}^{\infty}(c\cdot a_k)$ és $\sum_{1}^{\infty}a_k$ $(c\neq 0)$ egyszerre konvergens illetve divergens.

(Ugyanis $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ és $s_n^*=\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)$ egyidejűleg konvergens illetve divergens.)

(Pl.) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^k+3^{k+1}}{4^{k+2}}=?$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{4^{k+2}}+\frac{3^{k+1}}{4^{k+2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$s_n=\frac{1}{16}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)\to\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+3\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)=\frac{5}{8}$$

(Pl.) Milyen x-re konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty}(\log_2 x)^k$ sor?

$$q=\log_2 x,\quad |\log_2 x|<1 \iff -1<\log_2 x<1,$$
$$2^{-1}<\quad x\quad<2,\quad \text{azaz } x\in(2^{-1},2)\,.$$

●●●

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele (Cauchy kritérium):

(T) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\,\varepsilon>0$-hoz $\exists\,M(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon,\quad \text{ha } n>M(\varepsilon) \text{ és } k\in\mathbb{N}^+$$

(B) Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és elégséges tétel alkalmazható. (s_n) akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\,\varepsilon>0$ -hoz $\exists\,M(\varepsilon)$, hogy $n,m>M(\varepsilon)$ esetén $|s_m-s_n|<\varepsilon$.
Legyen $m>n$ és $m=n+k$, ekkor

$$|s_m-s_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon\,,$$

ha $n>M(\varepsilon)$ és $k\in\mathbb{N}^+$ tetszőleges. ∎

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{konvergens}}$

Ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k} \right| =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páros} \\ \\ \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right)}_{>0} + \frac{1}{n+k} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

Vagyis

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

Későbbiekben könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez egy úgynevezett Leibniz sor.

1.1. A konvergencia szükséges feltétele

T $\boxed{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)}$

B A Cauchy kritériumból:

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

Vagy

$$s_n = s_{n-1} + a_n \quad \Longrightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

■

Ⓜ A feltétel nem elégséges. Például a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, c_n \quad , \qquad c_n > 0$$

Leibniz kritérium:

Ⓣ $\boxed{\text{Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent } (c_n)\text{) monoton fogyóan tart 0-hoz } (c_n \searrow 0)\text{, akkor a sor konvergens.}}$

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz sor**.

Ⓑ Belátjuk, hogy $s_{2k} \nearrow$ és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \quad \Longrightarrow \quad s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát s_{2k} monoton növő és felülről korlátos $\Longrightarrow$ s_{2k} konvergens, legyen $s = \lim\limits_{k \to \infty} s_{2k}$.
Megmutatjuk, hogy $s_{2k+1} \to s$ szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \to s + 0 = s$$

■

Ⓜ Az is megmutatható, hogy az s_{2k+1} részsorozat monoton csökkenően tart s-hez.

Hibabecslés Leibniz típusú soroknál

Leibniz típusú soroknál a páros indexű részletösszegek s-nél kisebbek vagy egyenlők:
$$s_{2k} \le s.$$
A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak s-hez, ezért
$$s \le s_{2k+1}.$$
Mivel
$$s - s_{2k} \le s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1} \quad \text{és} \quad s_{2k+1} - s \le s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2},$$
ezért
$$H = |s - s_n| \le c_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k}$

2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, 2k}{k^2 - 1}$

4. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

5. $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{2^3} - \cdots - \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2^n} - \cdots$

6. $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^3} - \dfrac{1}{(2n)^2} + \cdots$

7. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2^n} + \cdots$

3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

Ⓓ $\sum^{\infty} a_k$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens.

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ abszolút konvergens.

(Konvergens geometriai sorokról van szó, ahol a kvóciens $-\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{2}$.)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ nem abszolút konvergens, de konvergens.

Ⓓ *Feltételesen konvergens sor:*
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor

Ilyen pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens.

Ⓣ $\left(\sum^{\infty} |a_k| \text{ konvergens}\right) \implies \left(\sum^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right)$
Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.

Ⓑ Ha $\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens, akkor teljesül rá a Cauchy kritérium, továbbá

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \ \leq \ |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq \underbrace{\big||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|\big| < \varepsilon, \quad \text{ha } \ n > M(\varepsilon), \ k \in \mathbb{N}^+}_{\text{Cauchy kritérium } \sum^{\infty} |a_k|\text{-ra}}$$

Így $\sum^{\infty} a_k$-ra is teljesül a szükséges és elégséges tétel (Cauchy kritérium), tehát konvergens. ∎

Ez a tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergencia vizsgálata igen hasznos lehet. A $\sum^{\infty} |a_k|$ sor elemei nem negatívak, sőt pozitívnak tekinthetők, mivel a nulla elemeket nyilván nem kell figyelembe vennünk.

4. Pozitív tagú sorok

Ⓣ
> (i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.
>
> (ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

Ⓑ

(i) Ha $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \;\; \forall\, n$-re.

(ii) a) Ha a sor konvergens, akkor (s_n) konvergens $\Longrightarrow$ (s_n) korlátos

b) Ha (s_n) korlátos, akkor $(s_n) \nearrow$ miatt (s_n) konvergens.

■

Ⓜ Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy ∞-nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja (pl. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$).

Ⓣ
> $a_k > 0$; $a_k \geq a_{k+1}$ feltételek mellett
>
> a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{2^l} \cdot 2^l$ is konvergens

Ⓑ (¬B)
A bizonyítás lényege, hogy az első sor részletösszegei a második sor megfelelő részletösszegeivel alulról és felülről is becsülhetőek. A becslés igazolásához fontos feltenni, hogy az (a_k) sorozat monoton csökken.
(A részletes bizonyítás megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.)

Példák a tétel alkalmazására:

Pl.
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergens, ha } \alpha > 1\,. \quad \text{Egyébként divergens.}}$$

Ha $\alpha \leq 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \not\to 0$
A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül $\Longrightarrow$ divergens a sor.

Ha $\alpha > 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \searrow$, így alkalmazható az előző tétel:

Vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha - l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} q^l$$

Geometriai sort kaptunk, mely csak akkor konvergens, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha $\alpha - 1 > 0$, vagyis $\alpha > 1$.

Vigyázat! A tételben szereplő két sor összege nem azonos, tehát nem tudtuk megállapítani a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor összegét, csak a konvergencia tényét tudtuk megállapítani $\alpha > 1$-re. Ilyenkor a megfelelő s_n részletösszeggel tudjuk közelíteni a sor összegét az esetleg előírt pontossággal (lásd hibabecslések).

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n} \quad \text{divergens}}$

Ugyanis: $\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l}$ divergens.

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p} \quad p > 1 \text{ konvergens, egyébként divergens}}$

$p > 0$ esetén alkalmazható az előző tétel:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \qquad 0 < p \leq 1: \text{ div.}; \quad 1 < p: \text{ konv.}$$

($p \leq 0$ esete HF. Pl. minoráns kritériummal — lásd később — megmutatható.)

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \quad \text{divergens}}$

A tétel alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

- majoráns kritérium (csak konvergencia eldöntésére)
- minoráns kritérium (csak divergencia eldöntésére)
- hányados kritérium
- gyökkritérium
- integrál kritérium

Ezeket a kritériumokat kizárólag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konvergenciája is.)

5.1. Majoráns kritérium

T $$\boxed{\text{Ha } \; 0 < a_n \leq c_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \; \text{konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; \text{konvergens}}$$

B A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy

$$s_n^a \leq s_n^c.$$

Továbbá $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \leq K \quad \Longrightarrow \quad s_n^a$ korlátos és pozitív tagú a sor

$$\Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

■

5.2. Minoráns kritérium

(T) $$\boxed{\text{Ha } 0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}}$$

(B) $s_n^a \ge s_n^d \to \infty \quad \Longrightarrow \quad s_n^a \to \infty$ (spec. rendőrelv) ■

(M) Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel $\forall\, n$ helyett $n \ge N_0$-ra teljesül.

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei $c = \sum\limits_{n=1}^{N_0-1} a_n$ konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

Feladatok

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+2}$
2. $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$
3. $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 \log_2 n}$
4. $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{1}{n \log_2 n^2}$
5. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{2^n}{2^{n+2} - 3}$
6. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{2^n}{2^{2n} - 3}$
7. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{2^{2n}}{2^n - 3}$
8. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{6^n + 2^{n+1}}$
9. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{3^n + n}{n \cdot 4^n - 3}$
10. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$
11. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 3n^2 - \sqrt{n}}$
12. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3}$
13. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3}$
14. $\sum\limits_{6}^{\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

5.3. Hányados kritérium

(T1)

1. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1,\ \forall\ n \right) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.
2. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \ge 1,\ \forall\ n \right) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

(B)

1. Mivel $\quad a_{n+1} \le q\, a_n \le q^2\, a_{n-1} \le q^3\, a_{n-2} \le \cdots \le q^n\, a_1, \quad \forall\ n\,,$ ezért $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$ -nek $\displaystyle\sum_1^{\infty} q^{n-1}\, a_1$ konvergens majoránsa (geometriai sor, $0 < q < 1$) $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$ konvergens.

2. Mivel $\quad a_{n+1} \ge q\, a_n \ge q^2\, a_{n-1} \ge \cdots \ge q^n\, a_1, \quad \forall\ n\,,$ ezért $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$ -nek $\displaystyle\sum_1^{\infty} q^{n-1}\, a_1$ divergens minoránsa (geometriai sor, $q \ge 1$) $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$ divergens.

$\blacksquare$

(M1) $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$ és $\displaystyle\sum_{N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, ezért elég, ha a T_1 feltételei $\forall\ n \ge N_0$ -ra teljesülnek.
(Természetesen, ha konvergensek, akkor az első sor összege $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0-1}$ -gyel több, mint a második sor összege.)

(M2) T_1 (1)-nél nem elég megmutatni, hogy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1\,,$ q -t is kell találni.

(Pl.) $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, pedig

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{miatt} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1\,.$$

Pl. $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$ konvergens. És most is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1 . \qquad (\text{De } \nexists \quad 0<q<1)$$

T_1 (2)-nél viszont q megtalálása nem fontos. A tétel így is kimondható.

$$(a_n > 0) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,\ \forall\, n \geq N_0\right) \implies \sum_1^\infty a_n \text{ div.}$$

Ekkor ugyanis:

$0 < a_n \leq a_{n+1}$, tehát $a_n \nearrow$ (és $a_n > 0$) $\implies$ $a_n \not\to 0$ (nem teljesül a szükséges feltétel) $\implies$ $\sum\limits_1^\infty a_n$ divergens

A hányados kritérium egy kényelmesebben használható formában is kimondható:

T_{1^*}

1. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \implies \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ konv.

2. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1\right) \implies \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ div.

B

1. Legyen $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2}$, így $q = c + \varepsilon < 1$. A határérték tulajdonsága miatt

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1 , \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

   Ezért T_1 (1)-ből adódik, hogy $\sum\limits_{n=N(\varepsilon)}^\infty a_n$ és így vele együtt $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ is konvergens.

2. Legyen $\varepsilon = \dfrac{c-1}{2}$, így $q = c - \varepsilon > 1$. Ekkor $\exists\ N(\varepsilon)$, hogy

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

   Így T_1^* (2)-ből adódik az állítás. ■

T_1^* (2) állítása $c = \infty$ esetén is igaz. Ugyanis, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, akkor is található megfelelő q. (Pl. $q = 2$ is választható.)

M$_3$ Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor nem tudtunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.

Pl. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergens, és a $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergens sorok esetén egyaránt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$

M$_4$ A fenti tétel tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall\, n, \text{ és } \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall\, n, \text{ és } \underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

($\overline{\lim}\, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a konvergenciáról nem mond semmit.)

5.3.1. Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{(2n+1)!}$
2. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^{n+2}\,(n+2)!}$
3. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$
4. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$
5. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{n+2}{(n+1)^{n+3}}$
6. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{n^k}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}^+$

5.4. Gyökkritérium

T2

> Ha $\forall n \geq N$-re $a_n > 0$ és
>
> 1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{N}^{\infty} a_n$ konv.
>
> 2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{N}^{\infty} a_n$ div.

B

1. $0 < a_n \leq q^n$ és $\sum_{N}^{\infty} q^n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{N}^{\infty} a_n$ konvergens a majoráns kritérium miatt.

2. $a_n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \not\to 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{N}^{\infty} a_n$ div.

■

M5 $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ elég, ha végtelen sok n-re igaz. Nem kell, hogy $\forall\ n > N$-re teljesüljön. Ekkor már $\exists\ a_{n_r} \not\to 0$ részsorozat.

Ez a tétel is kimondható limeszes alakban:

T2*

> Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ és
>
> $c < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n$ konvergens.
>
> $c > 1$ vagy $c = \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n$ divergens.

B Hasonló a hányados kritériumnál látotthoz.

M6 $c = 1$, tehát $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetén nem használható a gyökkritérium. Az alábbi két példa igazolja állításunk helyességét.

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \text{ és } \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konv.} \\ \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \text{ és } \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ div.} \end{array}}$$

M6 A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} > 1$-ből következik a divergencia, mivel végtelen sok n-re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n > 1\ ; \quad \text{tehát } \exists\ a_{n_r} \not\to 0 \text{ részsorozat.}$$

5.4.1. Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{3^n}{n^2\, 7^n}$

2. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{n^2\, 3^n}{7^{n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{n^6}{2^{n+3}}$

4. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2}$

5. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{n^2+2n}$

6. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{4n+1}$

7. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{2n+1}\,(3n+1)}$

8. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{4^n}$

5.5. Integrálkritérium

T Legyen f pozitív értékű <u>monoton csökkenő</u> függvény $[1,\infty)$-en és $f(k)=a_k>0$

1. Ha $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$ konvergens

2. Ha $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ divergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$ divergens

M $\Longleftrightarrow$ állítás is igaz, tehát a sor és az improprius integrál egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

B

1. Mivel

$$a_2+a_3+\cdots+a_n \le \underbrace{\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{monoton növő függvénye } n\text{-nek}} \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

$a_k>0$ és $\sum\limits_2^n a_k$ korlátos $\Longrightarrow$ $\sum\limits_2^\infty a_k$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_1^\infty a_k$ konvergens

2. $$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=s_{n-1}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=\infty$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}=\infty$, tehát a sor divergens.

■

5.6. Hibabecslés pozitív tagú sorösszegek közelítése esetén

1. Ha a sor konvergenciája integrálkritériummal állapítható meg, akkor az s sorösszeg s_n részletösszeggel való közelítésének hibáját is egy integrállal becsülhetjük.

(T) Ha az integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek, akkor az $s \approx s_n$ közelítésnél elkövetett hiba

$$H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int\limits_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(B) Mivel

$$a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_m \leq \int\limits_n^{m} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ezért

$$H = r_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k \leq \lim_{m\to\infty} \int\limits_n^{m} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

2. Ha a sor konvergenciájára hányados vagy gyökkritériummal következtettünk, akkor a sorhoz található konvergens majoráló geometriai sor. A majoráló sor r_n^* maradékösszegével becsülhetjük az eredeti sor r_n maradékösszegét.
(L. előadás és gyakorlat!)

6. Műveletek konvergens sorokkal

(T) Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, $S_a, S_b \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a\,.$$

(B)

$$S_a = \lim_{n\to\infty} s_n^a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_b = \lim_{n\to\infty} s_n^b = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$S_{a+b} = \lim_{n\to\infty} s_n^{a+b} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) = S_a + S_b$$

Másrészt

$$S_{c\,a} = \lim_{n\to\infty} s_n^{c\,a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (c\,a_k) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c\,S_a$$

6.1. Végtelen sorok természetes szorzata

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + & \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & + & b_1a_2 & + & b_1a_3 & + & b_1a_4 & + & \cdots & + & b_1a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & + & b_2a_2 & + & b_2a_3 & + & b_2a_4 & + & \cdots & + & b_2a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & + & b_3a_2 & + & b_3a_3 & + & b_3a_4 & + & \cdots & + & b_3a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & + & b_4a_2 & + & b_4a_3 & + & b_4a_4 & + & \cdots & + & b_4a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & + & b_ka_2 & + & b_ka_3 & + & b_ka_4 & + & \cdots & + & b_ka_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

A természetes szorzat elemei:

$t_1 = b_1a_1, \quad t_2 = b_2a_1 + b_2a_2 + b_1a_2, \quad t_3 = b_3a_1 + b_3a_2 + b_3a_3 + b_2a_3 + b_1a_3, \ldots$

A természetes szorzat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k\,, \qquad \text{ahol} \qquad \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ⓣ Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok természetes szorzata konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) = S_a\,S_b.$$

(Bizonyítás az előzőek alapján nyilvánvaló.)

6.2. Végetelen sorok Cauchy-szorzata

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + & \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & & b_1a_2 & & b_1a_3 & & b_1a_4 & & \cdots & & b_1a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & & b_2a_2 & & b_2a_3 & & b_2a_4 & & \cdots & & b_2a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & & b_3a_2 & & b_3a_3 & & b_3a_4 & & \cdots & & b_3a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & & b_4a_2 & & b_4a_3 & & b_4a_4 & & \cdots & & b_4a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & & b_ka_2 & & b_ka_3 & & b_ka_4 & & \cdots & & b_ka_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

A Cauchy-szorzat elemei:

$c_1 = b_1a_1,$

$c_2 = b_1a_2 + b_2a_1,$

$c_3 = b_1a_3 + b_2a_2 + b_3a_1,$

$\cdots,$

$c_n = b_1a_n + b_2a_{n-1} + b_3a_{n-2} + \cdots + b_na_1$ (indexek összege $n+1$).

A Cauchy-szorzat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \, a_{n-k+1} \,.$$

(T) Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ abszolút konvergens sorok és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S_a \, S_b \,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \, a_{n-k+1} \,.$$

(¬B)

(Pl.) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x}\,,$ ha $|x| < 1.$

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k\, x^k + \cdots = \frac{1}{1+x}\,,$ ha $|x| < 1\,.$

Írjuk fel a fenti két sor Cauchy-szorzatát!

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots & + & x^k & + & \cdots \\
\hline
1 & 1 & & x & & x^2 & & x^3 & & \cdots & & x^k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x & -x & & -x^2 & & -x^3 & & -x^4 & & \cdots & & -x^{k+1} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
x^2 & x^2 & & x^3 & & x^4 & & x^5 & & \cdots & & x^{k+2} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x^3 & -x^3 & & -x^4 & & -x^5 & & -x^6 & & \cdots & & -x^{k+3} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
(-1)^k x^k & \cdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Cauchy-szorzat:

$$1+0+x^2+0+x^4+0+x^6+\cdots = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2k}+\cdots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\,,$$

ha $|x| < 1\,.$

Házi feladat:

Határozzuk meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \mathrm{e}^y$ sorok Cauchy-szorzatát!

(Megjegyzés: $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$ eredményt kell kapni.)

6.3. Zárójelek elhelyezése illetve elhagyása végtelen sor esetén

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots$$

A fenti sor részletösszegei:
$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1+a_2,\ s_3 = a_1+a_2+a_3,\ s_4 = a_1+a_2+a_3+a_4,\ s_5 = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5, \ldots$
stb. Az

$$a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5)}_{a_3^*} + a_6 + \cdots$$

bezárójelezett új sor részletösszegei

$$s_1^* = a_1,\ s_2^* = a_1 + a_2,\ s_3^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\ s_4^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,\ \ldots$$

Zárójelek elhelyezése esetén a részletösszegek sorozata szűkül. Ha a sor konvergens volt, akkor zárójelek behelyezése esetén is konvergens marad. Előfordulhat, hogy divergens sorból – zárójelek elhelyezése után – konvergens sor lesz.

Pl. $(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1 - \cdots.$

Véges sok zárójel elhelyezése nem befolyásolja a konvergenciát!

Zárójelek elhagyása után a részletösszegek sorozata bővül. Ha a sor divergens volt, akkor zárójelek elhagyása esetén is divergens marad. Előfordulhat, hogy konvergens sorból – zárójelek elhagyása után – divergens sor lesz. Véges sok zárójel elhagyása nem befolyásolja a konvergenciát!

6.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_k + \cdots$$

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_{100} + a_5 + a_6 + \cdots + a_{99} + a_4 + a_{101} + \cdots$$

Véges sok elem felcserélése nem változtatja meg a konvergencia vagy divergencia tényét, nem változik meg a sorösszeg sem. Végtelen sok elemcsere megváltoztathatja a sorösszeget, feltételesen konvergens sor átrendezhető akár divergenssé is.

T Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens és $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergens, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, és átrendezhető úgy is, hogy egy előre tetszőlegesen megadott szám legyen az összege. (Nem bizonyítjuk.)

T Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens, akkor tetszőleges átrendezése is abszolút konvergens, az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget. (Nem bizonyítjuk.)

7. Feladatok sorokhoz

1. a) $\sum_{2}^{\infty} \frac{3^{k+1} + 2^{2k+1}}{5^k} = ?$

   b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = ?$

   c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} = ?$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

   a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}$

   b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n n^3 + 1}{n^5 + 1}$

   c) $\sum_{1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+5}}$

   d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+3)!}$

   e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{3n+1}$

   f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n\, 4^{n+1}}$

   g) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n + 2^n}$

   h) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n + n}$

   i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   j) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

   k) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{7^{3n+2}}$

   l) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{(3n)!}$

   m) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$

   n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n + 6^n}$

   o) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$

   p) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5}$

   q) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+5}$

   r) $\sum_{10}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n - \sqrt{n^2 - \sqrt{n} + 3}}$

   s) $\sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^n$

   t) $\sum_{1}^{\infty} \frac{10^n}{n!\, n^2}$

   u) $\sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{n}\right)^{n^2+n}$

v) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(4+\frac{2}{n^2}\right)^n}$

w) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

x) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

y) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

z) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$

3. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét 10^{-3}-nál kisebb hibával!

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!-n!}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n+10^n}$

d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n+5}$

e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{(2n)!}$

4. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 10. részletösszegével közelítjük?

$\left(s \approx s_{10}; \quad H = r_{10} = \sum\limits_{k=11}^{\infty} a_k; \quad |H| \leq ?\right)$

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{2}}$

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}+n^2+3}$

f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(n-1)}{n^2+n}$

5. Abszolút illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{n+4}{n^2+4}$

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\log_2 n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-3n+8}$

d) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3^n}+\cdots$

e) $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{1^2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}+\cdots$

8. Számsorozatok nagyságrendje

(D) $a_n = O(b_n)$ („nagy ordó b_n”), ha $\exists\ c_1$:
$|a_n| \le c_1 |b_n|, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

(D) $a_n = \Omega(b_n)$ („omega b_n”), ha $b_n = O(a_n)$.

Vagyis $|b_n| \le c_1 |a_n| \quad n > N \quad (\exists\ c_1)$.
Ekkor: $c_2|b_n| = \dfrac{1}{c_1}|b_n| \le |a_n|$, vagyis most $|a_n|$ alulról becsülhető $|b_n|$ segítségével.

(D) $a_n = \Theta(b_n)$ („teta b_n”), ha $a_n = O(b_n)$ és $a_n = \Omega(b_n)$.

Az előzőből következik:

(T) $a_n = \Theta(b_n) \iff c_2|b_n| \le |a_n| \le c_1|b_n|$

(Pl.) $a_n = 2n^2 - n + 3$

1. $a_n = O(n^2)$, mert $2n^2 - n + 3 \le 2 \cdot n^2$, ha $n \ge 3$. Persze $a_n = O(n^3)$ is igaz, sőt általánosságban: $a_n = O(n^{2+\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
2. $a_n = \Omega(n^2)$, mert $1 \cdot n^2 = 2n^2 - n^2 \le 2n^2 - n + 3$. Sőt $a_n = \Omega(n^{2-\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
3. Tehát $a_n = \Theta(n^2)$.

8.1. Műveletek Θ-val

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \Theta(c_n) \\ b_n &= \Theta(d_n) \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} 1. \quad a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2. \quad \dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) \\ 3. \quad a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{cases}$$

Különbségre nem igaz!

Megj.: Akkor van értelme használni ezt, ha c_n és d_n sokkal „egyszerűbb” sorozatok.

(B)

$$0 < \alpha_1 c_n \le a_n \le \alpha_2 c_n, \quad \text{mert } a_n = \Theta(c_n)$$

$$0 < \beta_1 d_n \le b_n \le \beta_2 d_n, \quad \text{mert } b_n = \Theta(d_n)$$

1. Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeszorozhatók:

$$(\alpha_1\beta_1)c_nd_n \le a_nb_n \le (\alpha_2\beta_2)c_nd_n \quad\Longrightarrow\quad a_nb_n = \Theta(c_nd_n)$$

2.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha_1 c_n \le \alpha_n \le \alpha_2 c_n \\ 0 < \dfrac{1}{\beta_2}\dfrac{1}{d_n} \le \dfrac{1}{b_n} \le \dfrac{1}{\beta_1}\dfrac{1}{d_n} \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n} \le \frac{a_n}{b_n} \le \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n},$$

tehát $\dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right)$

3.

$$\alpha(c_n+d_n) \le \alpha_1c_n + \beta_1d_n \le a_n + b_n \le \alpha_2c_n + \beta_2d_n \le \beta(c_n+d_n)$$

$$\alpha = \min\{\alpha_1,\beta_1\}, \quad \beta = \max\{\alpha_2,\beta_2\}$$

$\Longrightarrow a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n)$

■

Pl. $a_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{n^2+4n}{\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$

$$= \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)+\Theta(n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n+n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)} = \Theta\left(\frac{n^2}{n}\right) = \Theta(n) \quad\Longrightarrow\quad a_n \to \infty$$

Pl. $a_n = \sqrt{7n^2-2n+10} - \sqrt{7n^2-2n+3} = \dfrac{10-3}{\sqrt{7n^2-2n+10}+\sqrt{7n^2-2n+3}} =$

$$= \frac{\Theta(1)}{\Theta(n+n)} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \quad\Longrightarrow\quad a_n \to 0$$

8.2. $a_n \sim b_n$

D

a_n aszimptotikusan egyenlő b_n-nel, jelben $a_n \sim b_n$, ha $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$$

Pl. $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$, mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

Pl. $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ **Stirling formula** ($\neg$B)

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim c_n \\ b_n \sim d_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1. & a_n + b_n \sim c_n + d_n \\ 2. & a_n b_n \sim c_n d_n \\ 3. & \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n} \\ 4. & \dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{d_n}{c_n} \end{array}\right.$$

Megint nincs különbség!

(B)

$$a_n \sim c_n : \quad \frac{a_n}{c_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1-\varepsilon < \frac{a_n}{c_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N_1$$

$$b_n \sim d_n : \quad \frac{b_n}{d_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1-\varepsilon < \frac{b_n}{d_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N_2$$

Legyen $n > \max\{N_1, N_2\} = N$

1. $1-\varepsilon = \dfrac{(1-\varepsilon)c_n + (1-\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} < \dfrac{a_n + b_n}{c_n + d_n} < \dfrac{(1+\varepsilon)c_n + (1+\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} = 1 + \varepsilon\,,$

ha $n > N$

2. $\neg$B

3. $\dfrac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{c_n}} = \dfrac{c_n}{a_n} = \dfrac{1}{\frac{a_n}{c_n}} \to 1$

4. Az előző kettőből következik: $a_n \sim c_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n}$; másrészt $b_n \sim d_n$

$$\Longrightarrow \quad \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n}$$

(Pl.) $a_n = \sqrt[3]{2n^2+n+1} - \sqrt[3]{2n^2-3n-7} =$

$$= \frac{2n^2+n+1-(2n^2-3n-7)}{\left(\sqrt[3]{2n^2+n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{2n^2+n+1}\sqrt[3]{2n^2-3n-7} + \left(\sqrt[3]{2n^2-3n-7}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{4n}{\left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{4n}{\sqrt[3]{4}\cdot 3\,n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{n}} \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

(Pl.) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^2+n+1} - \sqrt[3]{2n^2-3n-7}} \sim \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}}} =$konst$\cdot\sqrt[3]{n} \to \infty$

Pl. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \dfrac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{4^n} \to 0$

Pl. Az előző példa felhasználásával:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \qquad \left(= \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

M $a_n \sim b_n \quad \not\Longrightarrow \quad (a_n)^n \sim (b_n)^n$ Pl. $\underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{1+\frac{1}{n}}} \sim \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{2}}}$, de $\underset{\displaystyle \mathrm{e}}{\underset{\downarrow}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} \not\sim 2$

Persze $a_n \sim b_n$ esetén $a_n^k \sim b_n^k$, $k \in \mathbb{N}^+$ már igaz $(k \neq f(n))$. (k valós is lehet)

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \to 1\right)$$

És igaz a következő tétel is:

T $\boxed{a_n, b_n > 0 \qquad a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}}$

B $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1-\varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{1-\varepsilon}}} < \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} < \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{1+\varepsilon}}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} \to 1$$

■

Pl. $\sqrt[n]{\dfrac{3n^2 - n\sqrt{n} + 6}{2n^2 + 3n + 7}} \sim \sqrt[n]{\dfrac{3}{2}} \sim 1$

Pl. $\boxed{\text{Határozza meg } A \text{ és } \alpha \text{ értékét úgy, hogy } \cos\frac{1}{n} - 1 \sim An^\alpha \text{ teljesüljön!}}$

1. megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{An^\alpha}=1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{n^\alpha}=A\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=0\text{-ra } A=0 \text{ lenne}\\ \alpha>0\text{-ra } \frac{0}{\infty}\to 0=A \text{ lenne}\end{array}\right\}\Longrightarrow \quad \alpha<0$$

$$u:=\frac{1}{n}\ \underset{\infty}{\overset{n}{\longrightarrow}}\ 0$$

$$\lim_{u\to+0}\underbrace{\frac{\cos u-1}{u^{-\alpha}}}_{\frac{0}{0}\text{ alakú } (-\alpha>0)}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{u\to+0}\frac{-\sin u}{-\alpha u^{-\alpha-1}}=\lim_{u\to+0}\frac{\sin u}{u^{-\alpha-1}}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}=A$$

ha $-\alpha-1=1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha=-2, A=-\frac{1}{2}.$

Tehát $\cos\frac{1}{n}-1\sim-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$

2. megoldás:

$\cos x-1=-2\sin^2\frac{x}{2}$ azonosság segítségével: $\dfrac{\cos\frac{1}{n}-1}{An^\alpha}=\dfrac{-2\sin^2\frac{1}{2n}}{An^\alpha}\to 1$, ha

$An^\alpha=-2\left(\frac{1}{2n}\right)^2\to A=-\frac{1}{2}, \alpha=-2$

Feladat:

Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sim An^\alpha$ fennálljon!

T

$$\boxed{\begin{array}{l}a_n>0, b_n>0\\ a_n\sim b_n \quad\Longrightarrow\quad \sum^\infty a_n \text{ és } \sum^\infty b_n \text{ egyidejűleg konvergens, illetve divergens}\\ (\text{Jelben: } \sum^\infty a_n\sim\sum^\infty b_n)\end{array}}$$

B $a_n\sim b_n \quad\Longrightarrow\quad \frac{a_n}{b_n}\to 1 \quad\Longrightarrow\quad 1-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<1+\varepsilon$. Legyen $\varepsilon<1$.

Tehát $c_1 b_n<a_n<c_2 b_n \quad (c_1=1-\varepsilon>0, \quad c_2=1+\varepsilon)$

Ha $\sum^\infty a_n$ konvergens, akkor $b_n<\frac{1}{c_1}a_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum^\infty a_n$ divergens, akkor $\frac{1}{c_2}a_n<b_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is divergens (minoráns kritérium)

Ha $\sum\limits^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $a_n < c_2 b_n$ miatt $\sum\limits^{\infty} a_n$ is konvergens (majoráns kritérium)
Ha $\sum\limits^{\infty} b_n$ divergens, akkor $c_1 b_n < a_n$ miatt $\sum\limits^{\infty} a_n$ is divergens (minoráns kritérium)

■

Pl. $\sum\limits^{\infty} \dfrac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum\limits^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{3n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Pl. $\sum\limits^{\infty} \dfrac{1}{7n + \sqrt[3]{n} - 1} = \sum\limits^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{7n} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Pl. $\sum\limits^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n} = \sum\limits^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{n} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Pl. $\sum\limits^{\infty} \left(1 - \cos \dfrac{1}{n}\right) = \sum\limits^{\infty} a_n$

$$a_n = 2\sin^2 \frac{1}{2n} \sim 2\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ konvergens} \Longrightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Feladatok:
Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}\right)$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \dfrac{2}{n} - \cos \dfrac{3}{n}\right)$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\binom{3n}{n}}$

(D) $\boxed{\begin{array}{l} a_n = o(b_n) \quad (\text{„kis ordó } b_n\text{"}), \text{ ha } \forall\, c > 0\text{-ra} \\ \qquad\qquad |a_n| \le c|b_n| \quad n > N\text{-re} \end{array}}$

Más jelölés is használatos:

$$a_n \ll b_n, \text{ ha } a_n = o(b_n)$$

(Nagyságrendileg kisebb vagy lényegesen kisebb.)

A definíció következménye, hogy $b_n \neq 0$ esetén $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \le c, \quad n > N \quad \forall\, c > 0$-ra. Ebből persze már következik, hogy ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N_0(\varepsilon)$, hogy $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$, ha $n > N_0(\varepsilon)$.

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás is:

(T) $\boxed{a_n = o(b_n), \quad b_n \neq 0 \iff \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0}$

(Pl.) Mit jelent $a_n = o(1)$?

Mivel $\forall\, c > 0$-ra $|a_n| \le c$, ha $n > N$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(M) A következő állítás is könnyen bizonyítható lenne:

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + o(1)).$$

(Pl.) $n! = o(n^n)$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

1. megoldás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \qquad + \text{ rendőrelv}$$

2. megoldás:

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \to 0$$

Vége!