ANALÍZIS(2) **VIZSGADOLGOZAT** 2011. jún. 2.
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

## 1. feladat (13 pont)

a) Írja fel az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és oldja meg!
b) A homogén vagy az inhomogén differenciálegyenlet megoldásai alkotnak lineáris teret? Hány dimenziós ez a lineáris tér?

a.) $y' + g(x)\,y = 0$ 2 $g \in C^0_{(\alpha,\beta)}$

$y' + g(x)\cdot y = 0$ (szeparábilis differenciálegyenlet)

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x)\cdot y$ $y \equiv 0$ megoldás

Ha $y \neq 0$: $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jelöljük $g$ primitív függvényét $G$-vel! ($G$ létezik $g$ folytonossága miatt.) Ekkor

$$\ln|y| = -G(x) + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{-G(x)} = K\,\mathrm{e}^{-G(x)}, \quad K > 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} y>0: & y = K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ y<0: & y = -K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ & (K>0) \\ \text{és} & y \equiv 0 \text{ is megoldás.} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = C\,\mathrm{e}^{-G(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$ 8

az általános megoldás.

b.) A homogén egyenlet megoldásai alkotnak lineáris teret. 2
Mivel $y = C\cdot\varphi(x)$ alakú, 1 dimenziós a lineáris tér. 1

## 2. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvények megadott $x_0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = x\,\mathrm{sh}\,(3x^2)$, $x_0 = 0$ b) $g(x) = \frac{1}{3+x}$, $x_0 = 1$

a.) $\mathrm{sh}\,u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$

$\boxed{6}$

$f(x) = x\,\mathrm{sh}3x^2 = 3x^3 + 3^3\frac{x^7}{3!} + 3^5\frac{x^{11}}{5!} + \ldots$ 4

$\left(\text{Vagy } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(3x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k+1}x^{4k+3}}{(2k+1)!}\right)$

K.T.: $(-\infty, \infty)$ 2

(Nem kell mindkét alak.) an2v110602/1.

b.) $g(x)=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{-(x-1)}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(x-1)}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$ (4)

$|q|=\left|-\frac{x-1}{4}\right|=\frac{|x-1|}{4}<1 \Rightarrow |x-1|<4$

K.T.: $(-3,5)$ (2)

(A végpontokat nem kell megadni!!! Tudjuk, hogy a geometriai sor $|q|=1$-re divergens.)

**3. feladat (16 pont)**

a) Mit értünk binomiális soron?
Bizonyítsa be a konvergenciasugárra tanult állítást!

b) Írja fel az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}$$

függvény $x_0=0$ bázispontú Taylor sorát és határozza meg a konvergencia sugarát!

$a_6=?$ (Elemi műveletekkel írja fel!)

a.) $\boxed{8}$ Binomiális sor: $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ ; $\alpha\neq -1$ (2)

(T) $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \text{ esetén } R=1}$ (1)

(B) $a_k=\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

$$a_{k+1}=\binom{\alpha}{k+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!}=\binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=\left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[\infty]{k} |-1|=1=\frac{1}{R} \implies R=1$$ (5)

b.) $\boxed{8}$ $f(x)=(1+(-3x^2))^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-3x^2)^k=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-3)^k x^{2k}$$ (4)

$|-3x^2|=3|x|^2<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (2)

$a_6=\binom{-1/2}{3}(-3)^3=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-27)$ (2)

**4. feladat (13 pont)**

$$f(x,y) = e^{x(4-y)}$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$, $\operatorname{grad} f = ?$
Hol létezik a gradiens? (Indokoljon!)

b) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, $P_0(1,3)$, $\underline{e} \parallel 4\underline{i} - 3\underline{j}$

a.) $\boxed{8}$

$f'_x = e^{x(4-y)}(4-y)$ 2

$f'_y = e^{x(4-y)}(-x)$ 2

mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow$ grad f mindenütt létezik 2

$\operatorname{grad} f = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} = \dots$ 2

b.) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$ 2

$\underline{e} = \frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}$ 1

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (e\underline{i} - e\underline{j})\left(\frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}\right) = \frac{4}{5}e + \frac{3}{5}e \left(= \frac{7}{5}e\right)$ 2

**5. feladat (7 pont)***

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{3x}{y^2+2}$ -et és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$-nal!

$f'_x(x,y) = ?$, $f'_y(x,y) = ?$, $f''_{xy}(x,y) = ?$

$f(x,y) = g\left(\frac{3x}{y^2+2}\right)$

$f'_x = g'\left(\frac{3x}{y^2+2}\right) \cdot \frac{3}{y^2+2}$ 2

$f'_y = g'\left(\frac{3x}{y^2+2}\right) \cdot 3x \frac{-1}{(y^2+2)^2} \cdot 2y$ 2

$f''_{xy} = \left(g''\left(\frac{3x}{y^2+2}\right) 3x \frac{-2y}{(y^2+2)^2}\right) \frac{3}{y^2+2} + g'\left(\frac{3x}{y^2+2}\right) \frac{-3}{(y^2+2)^2} \cdot 2y$ 3

an2v110602/3.

**6. feladat (5+6+7=18 pont)***

a) Egy ábrán mutassa be a hengerkoordináták jelentését!
Írja le hengerkoordináták segítségével az alábbi térrészt!

$$z \geq 0, \qquad z \leq 9 - x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2 \leq 4, \qquad x \leq 0$$

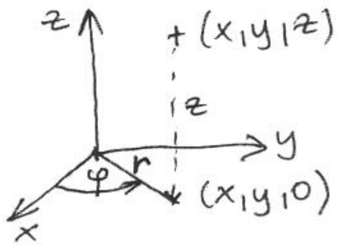
b) Írja fel és számítsa ki a hengerkoordinátás transzformáció Jacobi determinánsát!

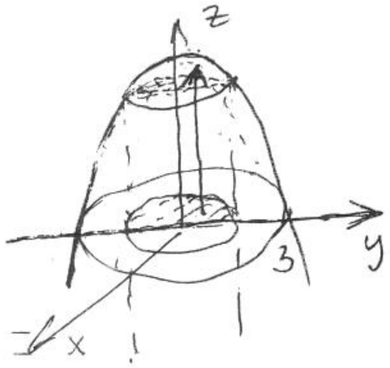
c)

$$\iiint_V \left(x^2 + y^2\right)^2 \; \mathrm{d}V = ? \qquad V: \text{ az a) feladatban leírt térrész}$$

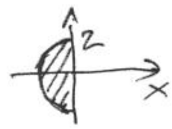
a.) $\boxed{5}$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$ 2




Vetületpontok:




$0 \leq z \leq 9 - r^2$
$0 \leq r \leq 2$
$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ 3

b.) $\boxed{6}$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r$$

c.) $\boxed{7}$

$$\int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{z=0}^{9-r^2} r^4 \cdot r \; dz \, d\varphi \, dr \;\; 2 \;\; = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{r^5 \cdot z \Big|_{z=0}^{9-r^2}}_{r^5(9-r^2) = 9r^5 - r^7 \;\; 2} d\varphi \, dr =$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \int_{r=0}^{2} \left(9r^5 - r^7\right) dr = \pi \left(9\frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8}\right)\Big|_0^2 =$$

1

$$= \pi\left(\frac{3}{2}\cdot 2^6 - \frac{1}{8}\, 2^8\right) \;\; 2$$

an2v110602/4.

**7. feladat (21 pont)***

a) A

$$v(x,y) = y + \mathrm{ch}(2y)\ \cos(\alpha x)\,, \qquad \alpha > 0$$

függvény egy reguláris komplex függvény képzetes része. Határozza meg az $\alpha$ értékét!
$f'(1-j) = ?$

b) $\displaystyle\oint_{|z+2+j|=1} \frac{f(z)}{z^2+16}\ \mathrm{d}z = ?$, ahol $f$ az előző.

Készítsen ábrát az indokláshoz!

c) $e^{j2z} + 4j = 0$, $\mathrm{Re}\, z = ?$, $\mathrm{Im}\, z = ?$ (Oldja meg az egyenletet $z$-re!)

a) $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} \equiv 0$ -nak kell teljesülnie (2)

$\boxed{9}$

$v'_x = -\alpha\ \mathrm{ch}\,2y\ \sin\alpha x \qquad v''_{xx} = -\alpha^2\, \mathrm{ch}\,2y \cos\alpha x$

$v'_y = 1 + 2\ \mathrm{sh}\,2y \cos\alpha x \qquad v''_{yy} = 4\ \mathrm{ch}\,2y \cos\alpha x$

$\Delta v = \mathrm{ch}\,2y \cos\alpha x\,(4-\alpha^2) \equiv 0 \underset{\alpha>0}{\Longrightarrow} \alpha = 2$ (4)

Tehát $v(x,y) = y + \mathrm{ch}\,2y \cos 2x$

$f'(1,-j) = \underbrace{u'_x(1,-1)}_{u'_x = v'_y} + j\, v'_x(1,-1) = v'_y(1,-1) + j\, v'_x(1,-1) =$ (2)

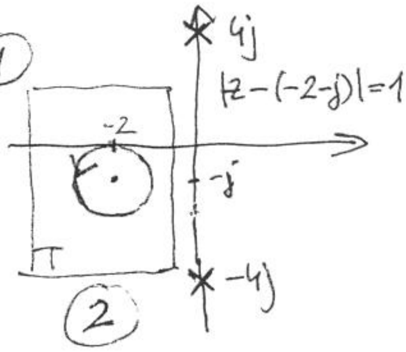
$= (1 + 2\,\mathrm{sh}(-2)\cos 2) + j\,(-2\ \mathrm{ch}(-2)\sin 2) =$

$= (1 - 2\,\mathrm{sh}\,2 \cos 2) - j\, 2\,\mathrm{ch}\,2 \sin 2$ (1)

b.) $\boxed{6}$ Szinguláris pontok: $z^2+16=0 \Longrightarrow z = \pm 4j$ (1)

$\oint_L \frac{f(z)}{z^2+16}\, dz = 0$ a Cauchy-féle alaptétel miatt. (3)

reguláris T-n

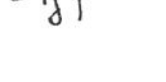



(2)

c) $\boxed{6}$ $e^{j2z} + 4j = 0 \Longrightarrow e^{j2z} = -4j$

$\Longrightarrow j\,2z = \mathrm{Ln}(-4j)$ (2)

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + j\,(\mathrm{arc}\, z + 2k\pi)$




$j\,2z = \ln 4 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (2)

$z = \underbrace{\frac{1}{j}}_{=-j}\ \frac{1}{2}\left(\ln 4 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + j\left(-\frac{1}{2}\ln 4\right)$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$; $\mathrm{Im}\, z = -\frac{1}{2}\ln 4$ (2)

an2v110602/5.

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

---

**Pótfeladatok.** Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

**8. feladat (10 pont)**

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' - 7y' + 6y = -6x$$

(H): $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 6$

$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$ (4)

(I) $6 \cdot \ | \ y_{ip} = Ax + B$ $\qquad (6A)x + (6B - 7A) = -6x$

$-7 \ | \ y'_{ip} = A$ $\qquad 6A = -6 \Rightarrow A = -1$

$\quad | \ y''_{ip} = 0$ $\qquad 6B - 7A = 0 \Rightarrow B = -\frac{7}{6}$

$y_{ip} = -x - \frac{7}{6}$ (4)

$y_{ia} = y_H + y_{ip} = \ldots$ (2)

**9. feladat (10 pont)**

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2^{3n}\, n} \quad (x-1)^n$$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4}{2^3 \sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 2$ (5)

$\sum_1^{\infty} \frac{(-4)^n}{8^n \cdot n} (x-1)^n = \sum_1^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n} (x-1)^n$ $\qquad -1 \quad x_0 = 1 \quad 3$

(4) Végpontok:

$x = -1$: $\sum^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n} (-2)^n = \sum^{\infty} \frac{1}{n}$ div.

$x = 3$: $\sum^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n} \cdot 2^n = \sum^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konv. (Leibniz sor)

K.T.: $(-1, 3]$ (1)

an2v-110602/6.