1. A vizsgát írók közül az emberek fele másodjára próbálkozik, negyede harmadjára és negyede először. Azok akik először próbálkoznak 70%, a másodjára próbálkozók 40%, míg a harmadjára próbálkozók 30% arányban fognak átmenni. A zh után véletlenszerűen választva egy sikertelen dolgozatot, mennyi annak a valószínűsége, hogy az illető harmadjára próbálkozott.

   (1pont) $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(M) = \frac{1}{2}$, $P(H) = \frac{1}{4}$
   (1pont) $P(S|E) = 0{,}7$, $P(S|M) = 0{,}4$, $P(S|H) = 0{,}3$
   (2pont) $P(H|\overline{S}) =?$
   (3pont) Bayes-tétel:
   (3pont) $P(H|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|H)P(H)}{P(\overline{S})}$
   (6pont) TVT: $P(\overline{S}) = 0{,}3\frac{1}{4} + 0{,}6\frac{1}{2} + 0{,}7\frac{1}{4} = \frac{11}{20}$
   (2pont) $P(H|\overline{S}) = \frac{0{,}7\frac{1}{4}}{\frac{11}{20}}$
   (2pont) $= \frac{7}{22} \approx 0{,}3182$

2. Célbalövő pályán 20,40,60,80 és 100 méterre helyezkednek el apró célpontok. A gépfegyverünkkel sorra mindegyiket lelőjük (mindegyikre az első találatig próbálkozunk). A találati valószínűségünk a különböző távolságokra 40%,20%,10%,5%,2% (minden lövés teljesen független egymástól). Mennyi a lövések számának várható értéke és szórása?

   (2pont) Egyesével a célpontokra geometriai eloszlású a lövések száma: X_1, X_2, X_3, X_4, X_5
   (1pont) A p paraméter rendre $0{,}4; 0{,}2; 0{,}1; 0{,}05; 0{,}02$.
   (1pont) $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) =?$
   (2pont) $E(X_1) = \frac{10}{4}; E(X_2) = \frac{10}{2}; E(X_3) = 10; E(X_4) = \frac{100}{5}; E(X_5) = \frac{100}{2}$.
   (2pont) $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) =$
   (2pont) $= 2{,}5 + 5 + 10 + 20 + 50 = 87{,}5$.
   (1pont) $\sigma(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) =?$
   (2pont) $\sigma^2(X_1) = \frac{6}{10}\left(\frac{10}{4}\right)^2; \sigma^2(X_2) = \frac{8}{10}\left(\frac{10}{2}\right)^2; \sigma^2(X_3) = \frac{9}{10}10^2; \sigma^2(X_4) = \frac{95}{100}\left(\frac{100}{5}\right)^2; \sigma^2(X_5) = \frac{98}{100}\left(\frac{100}{2}\right)^2$.
   (3pont) Függetlenség miatt: $\sigma^2(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \sigma^2(X_3) + \sigma^2(X_4) + \sigma^2(X_5)$
   (2pont) $= \frac{15}{4} + 20 + 90 + 380 + 2450 = 2943{,}75$
   (2pont) $\sigma(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \approx 54{,}2563$

3. Egy francia kártya pakliból kihúzunk visszatevéssel 4 lapot. Adjuk meg a kihúzott treffek és kárók számának kovarianciamátrixát!

   Maximális pontot érhet az a megoldás, ahol a polinomiális eloszlást fedezi fel a hallgató, és az arra vonatkozó képlet szerint számolja a kovarianciát. A polinomiális vetületei közötti kovarianciára vonatkozó képlet nélkül legfeljebb 7 pontot kaphat (de ekkor a szórásoknak helyeseknek kell lenniük).
   (10pont) Az együttes eloszlás táblázatból tudunk majd számolni:

K\ T	0	1	2	3	4
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}$	$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{32}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$
1	$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\binom{4}{1}\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}$	$\binom{4}{1}\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{32}$	$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{64}$	0
2	$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}$	$\binom{4}{1}\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{32}$	$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{128}$	0	0
3	$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{32}$	$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{64}$	0	0	0
4	$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$	0	0	0	0

   (3pont) Peremeloszlás számolása vagy a binomiálisság alapján a szórások $\sigma_K = \sigma_T = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   (4pont) $E(KT) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{32} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{64} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{32} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{128} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{12+12+3+12+6+3}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$
   (2pont) $cov(K,T) = E(KT) - E(K)E(T) = \frac{3}{4} - 1 \cdot 1 = -\frac{1}{4}$
   (1pont) A kovarianciamátrix: $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

4. Választunk egy (x,y) pontot az egységnégyzetről az $f_{X,Y}(x,y) = 3x^2y^2 + 2x^2$ sűrűségfüggvénnyel $(0 < x, y < 1)$. Legyen a pont két koordinátája X és Y. Adjuk meg az $E(X|Y)$ regressziót!

   Ha valaki a függetlenséget szépen megindokolja, és abból következtet (végig részletesen és helyesen), akkor maximális pontot érdemel.
   (4pont) $f_Y(y) = \int_0^1 3x^2y^2 + 2x^2\, dx =$
   (2pont) $= [x^3y^2 + \frac{2}{3}x^3]_0^1 = y^2 + \frac{2}{3}$, ahol $0 < y < 1$ (1pont)
   (4pont) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{3x^2y^2+2x^2}{y^2+\frac{2}{3}} = 3x^2$, ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$ (2pont)
   (4pont) $E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 3x^3 = \frac{3}{4}$, ahol $0 < y < 1$ (1pont)
   (2pont) $E(X|Y) = \frac{3}{4}$

5. András kosárpalánkra próbálja dobni a labdát. Jelenlegi tudása szerint pontosan $\frac{2}{5}$ valószínűséggel talál be. Ma 1000 dobásból 390-szer talált bele (kicsit peches volt). Bíbor kétli, hogy valaha fejlődni fog, így fogadnak, hogy egy év múlva

ilyenkor már 420 is menni fog Andrásnak (1000 dobásból). Mennyi annak a valószínűsége, hogy András megnyeri a fogadást, ha feltesszük, hogy a tudása nem fejlődik az év alatt?

(4pont) Ha nem fejlődik, akkor a találatok számának eloszlása $X \in Bin(1000, \frac{2}{5})$ lesz
(2pont) $P(X \geq 420) = ?$
(2pont) binomiális eloszlással nagyon nehéz lenne számítani, ezért alkalmazzuk a Moivre–Laplace tételt (vagy CHT-t)
(2pont) $EX = 400$ és $\sigma X = \sqrt{240} \approx 15{,}4919$
(5pont) $P(X < 420) = P(\frac{X-400}{\sqrt{240}} < \frac{420-400}{\sqrt{240}}) \approx \Phi(1{,}291) =$
(2pont) $= 0{,}9015$
(3pont) $P(X \geq 420) = 1 - 0{,}9015 = 0{,}0985$

6. Egy mobiltelefon első meghibásodásának ideje folytonos és örökifjú tulajdonságú. Annak a valószínűsége, hogy 1 év alatt nem lesz baja 50%. Az első két évben lehetséges, hogy ellopják a telefont (utána már nem akarják), aminek a valószínűsége 10%, amennyiben nem hibásodott meg a két év alatt. A lopás valószínűsége egyenletes, azaz a két év folyamán minden napon egyforma valószínűségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az új telefonunkat előbb fogják ellopni, mint ahogy meghibásodik?

(1pont) Az első meghibásodás ideje $X \in Exp(\lambda)$
(1pont) $P(X > 1) = \frac{1}{2}$
(1pont) $P(X < 1) = 1 - e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$
(1pont) $\lambda = ln2$
(1pont) $f_X(t) = ln2e^{-ln2t}$
(3pont) Folytonos TVT valószínűségre: $P(LOP) = \int_{-\infty}^{\infty} P(LOP|X = t) f_X(t) dt$
(2pont) $P(LOP|X = t) = \frac{1}{10}\frac{t}{2}$, ahol $t \leq 2$
(1pont) $P(LOP|X = t) = \frac{1}{10}$, ahol $2 < t$
(3pont) $P(LOP) = \int_0^2 \frac{t}{20} ln2e^{-ln2t} dt + \int_2^{\infty} \frac{1}{10} ln2e^{-ln2t} dt =$
(2pont) $= \left[-\frac{t}{20}e^{-ln2t}\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{20}e^{-ln2t} dt + \left[-\frac{1}{10}e^{-ln2t}\right]_2^{\infty} =$
(2pont) $= -\frac{1}{40} + \left[-\frac{1}{20ln2}e^{-ln2t}\right]_0^2 + \frac{1}{40} =$
(2pont) $= -\frac{1}{80ln2} + \frac{1}{20ln2} = \frac{3}{80ln2} \approx 0{,}0541$

2. megoldás:
(1pont) Az első meghibásodás ideje $X \in Exp(\lambda)$
(1pont) $P(X > 1) = \frac{1}{2}$
(1pont) $P(X < 1) = 1 - e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$
(1pont) $\lambda = ln2$
(1pont) $f_X(t) = ln2e^{-ln2t}$
(2pont) Ha az ellopás időpontja Y, akkor $f_Y(t) = \frac{1}{20},\ 0 < t < 2$
(2pont) $P(Y < X) = \iint_{Y<X} f_X(x) f_Y(y)\, dxdy =$
(2pont) $\int_0^2 \int_0^x \frac{1}{20} ln2e^{-ln2x} dydx + \int_2^{\infty} \int_0^2 \frac{1}{20} ln2e^{-ln2x} dydx =$
(3pont) $= \int_0^2 \frac{x}{20} ln2e^{-ln2x} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{10} ln2e^{-ln2x} dx =$
(2pont) $= \left[-\frac{x}{20}e^{-ln2x}\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{20}e^{-ln2x} dx + \left[-\frac{1}{10}e^{-ln2x}\right]_2^{\infty} =$
(2pont) $= -\frac{1}{40} + \left[-\frac{1}{20ln2}e^{-ln2x}\right]_0^2 + \frac{1}{40} =$
(2pont) $= -\frac{1}{80ln2} + \frac{1}{20ln2} = \frac{3}{80ln2} \approx 0{,}0541$