Valószínűségszámítás Műszaki informatikus BSc
2016. január 21.

1. Az egységintervallumon véletlenszerűen, egymástól függetlenül kiválasztunk 10 pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük olyan pont, amely az intervallum felezőpontjától $\frac{1}{3}$-nál távolabb esik?
Megoldás: Jelölje p annak valószínűségét, hogy egy pont a középpont $\frac{1}{3}$ sugarú környezetébe esik. Nyilván: $p = \frac{2}{3}$. Annak valószínűsége, hogy mind a 10 pont ebbe a környezetbe esik: $(\frac{2}{3})^{10}$. Az ellentett esemény valószínűségét keressük: $1 - (\frac{2}{3})^{10} = 0.98266$.

2. Addig dobunk ismételten egy szabályos kockával, amíg legalább ötöt nem kapunk. Jelölje X a szükséges dobásszámot. Legyen $Y = X^2 + 1$. Adja meg Y eloszlásfüggvényének értékét a $\sqrt{2}$ helyen.
Megoldás: $X \in G(\frac{1}{3}), F_Y\left(\sqrt{2}\right) = \mathbf{P}\left(Y < \sqrt{2}\right) = \mathbf{P}\left(|X| < \sqrt{\sqrt{2} - 1}\right) = 0.$

3. Legyenek $X, Y \in E(1)$ függetlenek. Számolja ki a $Z = X + \frac{1}{2}Y$ sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!
Megoldás: $\mathbf{P}(\frac{1}{2}Y < t) = \mathbf{P}(Y < 2t) = 1 - e^{-2t} \Rightarrow \frac{1}{2}Y \in E(2)$.

$$f_{X+\frac{1}{2}Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-u) f_{\frac{1}{2}Y}(u)du =$$

$$= \int_0^t 2e^{-2u}e^{-(t-u)}\,\mathrm{d}u = 2e^{-t}\int_0^t e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2e^{-t} - 2e^{-2t}, t > 0.$$

$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X + \frac{1}{2}\mathbf{E}Y = \frac{3}{2}, \boldsymbol{\sigma}^2 Z = \boldsymbol{\sigma}^2 X + \frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{5}{4}, \boldsymbol{\sigma} Z = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

4. Két urna közül az egyikben 5 fekete és 7 fehér, a másikban 3 fekete és 8 fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk kettőt a másodikba, majd onnan találomra vissza veszünk egyet. Megint az elsőből húzva egyet, mennyi a valószínűsége a fehérnek?
Megoldás: f-fekete, F- fehér golyó.
A_1 : a ($f,f \leftrightarrow f$ ill. $f,F \leftrightarrow F$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 4 fekete, 7 fehér;
A_2 : a ($f,f \leftrightarrow F$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 3 fekete, 8 fehér;
A_3 : a ($f,F \leftrightarrow f$ ill. $F,F \leftrightarrow F$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 5 fekete, 6 fehér,
A_4 :a ($F,F \leftrightarrow f$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 6 fekete, 5 fehér
B : a keverés után az első urnából fehéret húzunk.
$\mathbf{P}(A_1) = \frac{10}{66}\frac{5}{13} + \frac{35}{66}\frac{9}{13} = \frac{365}{858}; \mathbf{P}(A_2) = \frac{10}{66}\frac{8}{13} = \frac{80}{858}; \mathbf{P}(A_3) = \frac{35}{66}\frac{4}{13} + \frac{21}{66}\frac{10}{13} = \frac{350}{858}; \mathbf{P}(A_4) = \frac{21}{66}\frac{3}{13} = \frac{63}{858}.$
$\mathbf{P}(B \mid A_1) = \frac{7}{11}; \mathbf{P}(B \mid A_2) = \frac{8}{11}; \mathbf{P}(B \mid A_3) = \frac{6}{11}, \mathbf{P}(B \mid A_4) = \frac{5}{11}.$
A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(B) = \frac{7}{11}\cdot\frac{365}{858} + \frac{8}{11}\cdot\frac{80}{858} + \frac{6}{11}\cdot\frac{350}{858} + \frac{5}{11}\cdot\frac{63}{858} = \frac{85}{143} = \frac{5610}{9438} \approx 0.59441$

5. Egy bizonyos csavar esetében a selejtes darabok aránya 5%. Egy üzlet 1000 darabot vásárolt a kérdéses csavarból. Mennyi a valószínűsége annak, hogy több mint 60 selejtes csavar lesz köztük?
Megoldás: A selejtes csavarok száma $X \in B(1000, 0.05)$. A Moivre-Laplace tétel szerint X sztandardizáltja jól közelíthető a sztandard normális eloszlással, azaz $\tilde{X} = \frac{X-50}{\sqrt{50\cdot 0.95}} = \frac{X-50}{6.892} \sim N(0,1)$.
$\mathbf{P}(X > 60) = 1 - \mathbf{P}(X < 60) = 1 - \mathbf{P}(X - 50 < 10) = 1 - \mathbf{P}(\frac{X-50}{6.892} < \frac{10}{6.892}) = 1 - \Phi(1.4510) = 1 - 0.9265 = 0.0735$
: