ANALÍZIS(2) **1. Pótzárthelyi** **2009.10.14.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenletnek az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldását az $x > -\frac{2}{3}$, $y > -\frac{1}{2}$ tartományban!

$$y' = \frac{2y+1}{3x+2}, \qquad y(2) = 4, \qquad y(x) = ?$$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int \frac{dx}{3x+2} \quad 3 \quad \text{szeparálható}$$

$$\frac{1}{2} \ln|2y+1| = \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C \quad 3$$

$x > -\frac{2}{3}$, $y > -\frac{1}{2}$ tehát az absz. jelek elhagyhatók.

$$(2y+1)^{1/2} = \underbrace{e^C}_{K>0} \cdot (3x+2)^{1/3}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}K^2 (3x+2)^{2/3} - \frac{1}{2} \quad 3$$

A kezdeti értéket beírva:

$$4 = \frac{1}{2} K^2 (\underbrace{3 \cdot 2 + 2}_{8})^{2/3} - \frac{1}{2} = \frac{K^2 \cdot 4 - 1}{2} \implies K^2 = \frac{9}{4}$$

Tehát

$$y(x) = \frac{9}{8}(3x+2)^{2/3} - \frac{1}{2} \quad 3$$

2. feladat (18 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - \frac{e^x}{e^x+3} y = \frac{e^x+3}{e^{2x}}$$

Elsőrendű, lineáris, inhomogén egyenletről van szó.
A homogén általános megoldása:

$$(H) \quad y' = \frac{e^x}{e^x+3} y \qquad y \equiv 0 \text{ e.h. (megoldás)}$$

Ha $y \neq 0$: $$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx \quad 3$$

$$\ln|y| = \ln(e^x+3) + C \quad 2 \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm e^C \cdot (e^x+3) \\ y \equiv 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{y_{H,\acute{a}ll}(x) = K(e^x+3)}} \quad 2$$

$$K \in \mathbb{R}$$

Az inhomogén partikuláris megoldását az állandó variálásával keressük:

$$y_{I,p}(x) = K(x)\cdot(e^x+3) \quad 2$$

$$y'_{I,p}(x) = K'(x)\cdot(e^x+3) + K(x)\cdot e^x \quad 2$$ ezeket visszaírva:

$$K'(e^x+3) + \cancel{K e^x} - \cancel{\frac{e^x}{e^x+3} K(e^x+3)} = \frac{e^x+3}{e^{2x}}$$

$$K'(x) = e^{-2x} \; 2; \qquad K(x) = \int e^{-2x}\,dx = \frac{-1}{2}e^{-2x} + \cancel{C} \quad 2$$

Tehát $$\underline{y_{I,p}(x) = \frac{-e^{-2x}}{2}(e^x+3)}; \quad 1$$

$$y_{I,\acute{a}ll}(x) = y_{H,\acute{a}ll}(x) + y_{I,p}(x) = \underline{\underline{\left(K - \frac{e^{-2x}}{2}\right)(e^x+3)}} \quad 2$$

3. feladat (12 pont)

Az $u(x) = 2y(x) + x$ helyettesítéssel határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$2y' = \frac{xe^{x^2}}{2y+x} - 1, \qquad\qquad y(x) = ?$$

$$u'(x) = 2y'(x) + 1 \quad 2$$

$$u' = \frac{x \cdot e^{x^2}}{u} \quad 3 \qquad \text{szeparálható}$$

$$\int u\,du = \int x e^{x^2}\,dx \quad 2$$

$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$ ③ ; $C \in \mathbb{R}$

$u = 2y + x = \pm\sqrt{e^{x^2} + 2C}$

$y(x) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{e^{x^2} + 2C} - \frac{x}{2}$ ②

4. feladat (15 pont)

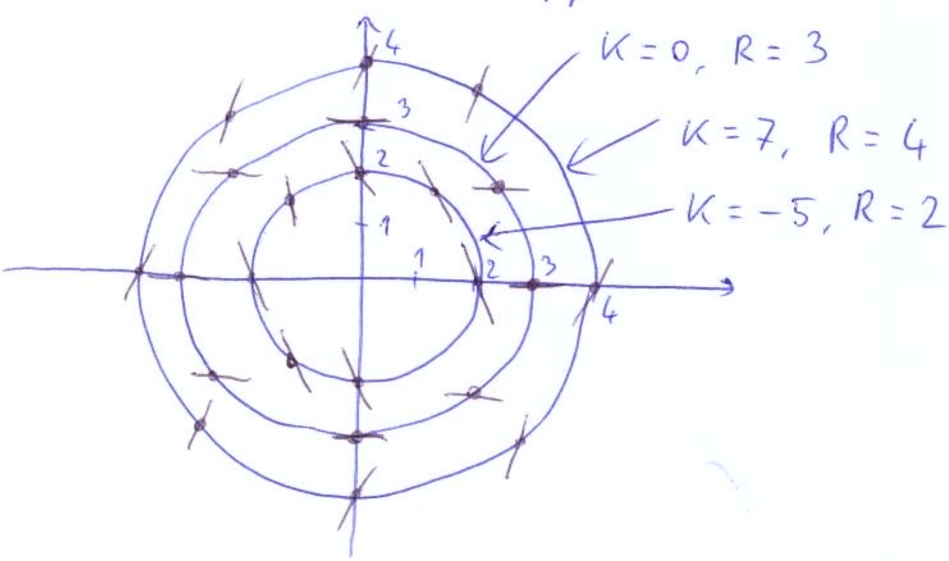
$$y' = x^2 + y^2 - 9$$

a) Vázoljon három izoklinát! A vonalelemeket is rajzolja be!

b) Vizsgálja meg, hogy az $A(1,2)$, illetve a $B(-3,0)$ ponton áthaladó megoldásgörbének van-e lokális szélsőértéke A-ban, illetve B-ben? Ha igen, milyen jellegű?

a, Izoklinák: $x^2 + y^2 - 9 = K$; $x^2 + y^2 = 9 + K$

$\boxed{6}$ $\sqrt{9+K}$ sugarú, (0,0) középpontú kör



⑥

b, A(1,2) esetén $y'_A(1) = 1^2 + 2^2 - 9 = -4 \neq 0$

$\boxed{9}$ $\Rightarrow$ A-ban nincs lokális szélsőértéke a megoldásnak ③

B(−3,0) esetén $y'_B(-3) = (-3)^2 + 0^2 - 9 = 0$ ②

$y''(x) = 2x + 2y(x)\,y'$

$y''_B(-3) = 2\cdot(-3) + 2\cdot 0 \cdot 0 = -6 < 0$ ③

lokális maximuma van B-ben a megoldásnak ①

5. feladat (14 pont) 4-

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + 5y = 3x$$

Karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases} \quad 2$$

$$y_{H,\acute{a}lt}(x) = C_1 e^x \sin(2x) + C_2 e^x \cos(2x) \;;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad 2$$

Nincs külső rezonancia, tehát

3 →

$$\left.\begin{aligned} y_{I,p}(x) &= Ax + B \\ y'_{I,p}(x) &= A \\ y''_{I,p}(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 - 2A + 5(Ax+B) &= 3x \\ 5A = 3 &\implies A = \frac{3}{5} \\ -2A + 5B = 0 &\implies B = \frac{2}{5}A = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

$$y_{I,p}(x) = \frac{3}{5}x + \frac{6}{25} \quad 3$$

$$y_{I,\acute{a}lt}(x) = y_{H,\acute{a}lt}(x) + y_{I,p}(x) = \underline{\underline{e^x\left(C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)\right) + \frac{3x}{5} + \frac{6}{25}}} \quad 2$$

6. feladat (15 pont)

Vizsgálja meg a következő sorokat konvergencia szempontjából!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^{3n+1}}{3^{2n-2}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

a) $\boxed{5}$

$$a_n = \frac{n^3 2^{3n+1}}{3^{2n-2}} = 18n^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Hányados-kritériummal:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \, \frac{8}{9} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{8}{9} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8}{9} < 1$$

Tehát $\sum_n a_n$ konvergens!

b, $b_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n^2} > 0$, gyökkritériummal:

$\boxed{5}$

$$\sqrt[n]{b_n} = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{3/2}}{e^{1/2}} = e^{+1} = e > 1$$

Tehát $\sum_n b_n$ divergens!

c, $c_n = \frac{n!}{n^n}$; hányados-kritériummal:

$\boxed{5}$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

Tehát $\sum_n c_n$ konvergens.

7. feladat (12 pont)

Az a_n sorozat tagjai kielégítik a következő feltételeket:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \qquad a_0 = 5, \qquad a_1 = 12.$$

Határozza meg a sorozat általános elemét!

Karakterisztikus egyenlet:

$\lambda^2 = 5\lambda - 6$ ② $\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 3$ ②

$a_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n$ ②

$a_0 = A + B = 5$ $\quad /\times(-2)$

$a_1 = 2A + 3B = 12$ $\quad \oplus$

$0\cdot A + B = 2 \qquad B = 2,\ A = 3$ ④

$\boxed{a_n = 3\cdot 2^n + 2\cdot 3^n}$ ②

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges szint (40%) eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)

Írja fel azt a legalacsonyabb rendű, állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenletet, melynek megoldása $2x\sin(3x)$.

$e^{0x}\cdot\sin(3x)$ miatt $0\pm 3i$ komplex gyökpár. 2

Az x szorzó belső rezonanciára utal, tehát $\pm 3i$ kétszeres komplex gyökpár. 3

A karakterisztikus polinom:

$$\big((\lambda+3i)(\lambda-3i)\big)^2=(\lambda^2+9)^2=\lambda^4+18\lambda^2+81 \qquad 3$$

A diff. egyenlet:

$$y^{(4)}+18y''+81y=0 \qquad 2$$

9. feladat (10 pont)

a) Írja föl a szeparálható differenciálegyenlet általános alakját!

b) Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását! (Elég az implicit alak.)

$$y'=\frac{2xy^2}{1+x^2}$$

a, $y'(x)=f(x)\cdot g(y)$ 3

b, $y\equiv 0$ megoldás. 1

Ha $y\neq 0$, $$\frac{dy}{y^2}=\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx \qquad 3$$

$$\frac{-1}{y}=\ln(1+x^2)+C\,;\quad C\in\mathbb{R} \qquad 3$$