



Munkaidő: 90 perc, Max. pontszám: 54

Ponthatárok: 21,5– 2, 29,5– 3, 35– 4, 43– 5 (19– szóbeli lehetőség)

1. FELADAT. (3+3p)

a) Hány határértéke lehet maximálisan egy sorozatnak? Igazoljuk az állítást!

b) Határozzuk meg a rendőr-elv segítségével az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = \sqrt[n]{6n^5 + 3n^3}$$

2. FELADAT. (6p) Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának ívhosszát az

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

képlettel határozhatjuk meg. Ennek alapján adjuk meg az $f(x) = (2/\sqrt{27}) \cdot (x - 2)^{3/2}$, $x \in [2, 11]$ függvény grafikonjának ívhosszát!

3. FELADAT. (3+3p)

a) Adjuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi}$$

b) Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s(x)}{r(x)} = b$

határértékre, ahol a határérték "0/0" típusú és $x_0, b \in \mathbb{R}$!

4. FELADAT. (2+4p)

a) Adjuk meg az elsőrendű, lineáris differenciálegyenletek általános alakját! Mikor hívjuk homogénnek az ilyen egyenleteket?

b) Adjuk meg az

$$y' = \frac{e^{-3y}}{1+x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását explicit alakban!

5. FELADAT. (3+3p)

a) Mondjuk ki és igazoljuk a harmonikus sor összegéről szóló

tételt!

b) Konvergens-e az alábbi sor? $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+2}{k+1} \right)^{k^2}$

6. FELADAT. (3+3p)

a) Adjuk meg a Lagrange-féle maradéktagról szóló tételt!

b) Adjuk meg az $f(x) = 1/(3+x^3)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Mekkora a hatványsor konvergenciasugara?

7. FELADAT. (2+4p)

a) Hogyan kell kiszámolni egy (a, b) -ben totálisan deriválható kétváltozós függvény (v_1, v_2) vektor irányú iránymenti deriváltját?

b) Adjuk meg az alábbi függvény teljes differenciálját és érintősíkjának egyenletét a $(2,1)$ pontban!

$$f(x, y) = x^4 - 2x^3y + 8y$$

8. FELADAT. (2+4p)

a) Adjuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény integrálját az origó közepű 1 sugarú kör y -tengelytől balra lévő $(x \leq 0)$ részére!

b) Adjuk meg az $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ függvény integrálját az origó közepű 1 sugarú gömb $z \leq 0$ részére!

9. FELADAT. (4+2p) Adjuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$$

2π -periodikus függvény Fourier-sorában a $\cos x$ -es tag együtt-hatóját! Egyenletesen konvergens-e a függvény Fourier-sora?
