ANALÍZIS(2) **II. ZÁRTHELYI** **2004. április 15.**
Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát!

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \left(\frac{k+1}{k+6}\right)^{k^2} x^k$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \left(\frac{k+1}{k+6}\right)^{k^2} x^{2k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \left(\frac{k+1}{k+6}\right)^{k^2} (3x+1)^k$

2. feladat (15 pont)

a) Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a1) $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad x_0 = 0$ *a2)* $g(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \quad x_0 = 4$

b) Számítsa ki az

$$\int_0^{0,1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt hatodfokú Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

3. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ) !

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{ha } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját! $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ?, \quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

4. feladat (12 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+4x^3}}$$

a) Írja fel az függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

b) A sorfejtésből adjon választ:
$f^{(9)}(0) = ?, \quad f^{(10)}(0) = ?$ (Az értékeket elemi műveletekkel adja meg!)

5. feladat (17 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{7}, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{6x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) $f'_y(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) Totálisan deriválható-e az f függvény az origóban?

d) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)} = ?, \quad$ ha $\underline{e} \parallel \underline{i} - \underline{j}$

6. feladat (8 pont)

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\frac{x}{2y}$ -t $(y \neq 0)$ és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$-nal!

Adja meg $y \neq 0$ esetére az alábbi parciális deriváltakat!

$f'_x(x,y) = ?, \quad f'_y(x,y) = ?$

$f''_{xy}(x,y) = ?, \quad f''_{yx}(x,y) = ?$

7. feladat (20 pont)

$$f(x,y) = y^3 - 12y + 2(x+y)^2 - 8(x+y)$$

a) Határozza meg a függvény lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!
b) $df((5,-1),(h,k)) = ?$
c) $d^2f((5,-1),(h,k)) = ?$

Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{2x+y}}{x^2+1}$$

a) $\operatorname{grad} f = ?$ Hol és miért létezik a gradiens?

b) Adja meg $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,1)}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel -8\underline{i} + 6\underline{j}$

ANALÍZIS(2) II. ZÁRTHELYI 2004. április 15.
Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát!

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}\left(\frac{k+1}{k+6}\right)^{k^2}x^k$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}\left(\frac{k+1}{k+6}\right)^{k^2}x^{2k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}\left(\frac{k+1}{k+6}\right)^{k^2}(3x+1)^k$

a.) $\boxed{6}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+6}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{6}{n})^n} = \frac{e}{e^6} = \frac{1}{e^5} = \frac{1}{R_a}$

$\Rightarrow R_a = e^5$

b.) $\boxed{3}$ $|x^2| < e^5 \Rightarrow |x| < e^{5/2} = R_b \quad (x_0 = 0)$

c.) $\boxed{4}$ $\sum_1^\infty (-1)^{k+1}\left(\frac{k+1}{k+6}\right)^{k^2} 3^k \left(x+\frac{1}{3}\right)^k \quad \left(x_0 = -\frac{1}{3}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\left(\frac{n+1}{n+6}\right)^n\cdot 3 = \frac{3}{e^5} = \frac{1}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{e^5}{3}$

(Vagy $u := 3x+1$ helyettesítéssel a.)-ra visszavezethető:

$-e^5 < u = 3x+1 < e^5$

$-\frac{e^5}{3} < x+\frac{1}{3} < \frac{e^5}{3}$ $\quad R_c = \frac{e^5}{3} \quad \left(x_0 = -\frac{1}{3}\right)$

2. feladat (15 pont)

a) Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a1) $f(x) = x^3\,e^{-2x}$, $x_0 = 0$ a2) $g(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 4$

b) Számítsa ki az

$$\int_0^{0,1} f(x)\,dx$$

integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt hatodfokú Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

a.) $\boxed{9}$ $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ (1), $x\in\mathbb{R}$ $(R=\infty)$ (1)

a1) $e^{-2x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-2)^n}{n!}x^n$ $\quad R=\infty$

$f(x) = x^3\sum_{n=0}^\infty\frac{(-2)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-2)^n}{n!}x^{3+n} =$

$= x^3 - \frac{2x^4}{1!} + \frac{2^2x^5}{2!} - \frac{2^3x^6}{3!} \pm\dots$ (2) $\quad x\in\mathbb{R}$ $(R=\infty)$ (1)

a2) $g(x) = e^{-2(x-4)-8} \overset{(1)}{=} e^{-8}e^{-2(x-4)} = e^{-8}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-2)^n(x-4)^n}{n!} =$ (2)

$= e^{-8}\left(1 - \frac{2(x-4)}{1!} + \frac{2^2(x-4)^2}{2!} - \frac{2^3(x-4)^3}{3!}\pm\dots\right)$ $\quad x\in\mathbb{R}$ $(R=\infty)$ (1)

b.) $\boxed{6}$ $\int_0^{0,1} f(x)\,dx = \int_0^{0,1}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-2)^n}{n!}x^{n+3}\,dx = \sum_{n=0}^\infty\int_0^{0,1}\frac{(-2)^n}{n!}x^{n+3}\,dx =$

$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n 2^n}{n!}\frac{x^{n+4}}{n+4}\Big|_0^{0,1} = \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n2^n}{n!}\frac{0,1^{n+4}}{n+4} =$

$\left(= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+4)}\left(\frac{2}{10}\right)^n 0,1^4\right) \approx \frac{1}{4}0,1^4 - \frac{2\cdot 0,1^5}{5} + \frac{2^2\, 0,1^6}{2!\,6} - \frac{2^3\, 0,1^7}{3!\,7}$ (3)

$c_n \searrow 0$ (Ez származik a hatodfokú közelítésből.)

Leibniz sor: $|H| < |a_{n+1}|$

$|H| < \frac{2^4\, 0,1^8}{4!\,8}$ (3)

an2 zh2 04.04.15/1

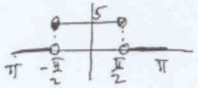
3. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ) !

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{ha } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját! $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ?$, $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

f páros ① $\Rightarrow b_k = 0$ ①



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \; ① = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} 5\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{2} = 5 \quad ①$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx \; ① = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} 5 \cos kx\,dx = \quad ①$$

$$= \frac{2}{\pi}\, 5\, \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{10}{\pi \cdot k} \left(\sin k\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \quad ②$$

$$= \frac{10}{\pi \cdot k} \cdot \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ ps} \\ 1, & \text{ha } k = 4l+1 \\ -1, & \text{ha } k = 4l+3 \end{cases}$$

$$f(x) \rightsquigarrow \phi(x) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x \pm \dots\right) \quad ④$$

$$\phi(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \text{miatt} \quad \phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0+5}{2}$$

③

an2 zh2 04.04.15/3.

4. feladat (12 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+4x^3}}$$

a) Írja fel az függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

b) A sorfejtésből adjon választ:
$f^{(9)}(0) = ?$, $f^{(10)}(0) = ?$ (Az értékeket elemi műveletekkel adja meg!)

a.) $$f(x) = (1+4x^3)^{-\frac{1}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} (4x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} 4^n x^{3n} \quad ④$$

$$\left((1+u)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} u^n \;;\; |u| < 1 \right) \quad ①$$

$$|4x^3| = 4|x|^3 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = R \quad ②$$

b.) $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad ①$$

$$f^{(9)}(0) = a_9 \cdot 9! = \binom{-1/5}{3} 4^3 \cdot 9! = \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)}{3!} 4^3 \cdot 9! \quad ③$$

$$f^{(10)}(0) = \underbrace{a_{10}}_{=0} \cdot 10! = 0 \quad ①$$

5. feladat (17 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{7}, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{6x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) $f'_y(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) Totálisan deriválható-e az f függvény az origóban?

d) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(0,0)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel \underline{i} - \underline{j}$

$\boxed{4}$ a.) $$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m x^2}{6x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{6+m^2} \text{ függ } m\text{-től} \Rightarrow \nexists \text{ a h.é.}$$

Vagy: $$\lim_{\substack{\rho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\rho_n^2 \cos\varphi_n \sin\varphi_n}{6\rho_n^2 \cos^2\varphi_n + \rho_n^2 \sin^2\varphi_n} = \lim_{\rho_n\to 0} \frac{\cos\varphi_n \sin\varphi_n}{1 + 5\cos^2\varphi_n} = \nexists, \text{ mert}$$

függ φ_n-től (pl. $\varphi_n = 0$ ill. $\varphi_n = \frac{\pi}{4}$ ...)

an2 zh2 04.04.15/4.

$\boxed{4}$ b.) $f_y'(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0\pm} \dfrac{0-(-\frac{1}{7})}{k} = \pm\infty$ (∄) (2) (1) (1)

$\boxed{3}$ c.) ∄ $f_y'(0,0) \Rightarrow$ ∄ $\operatorname{grad} f|_{\underline{0}}$ (tehát nem tot. deriválható)

(Vagy: f nem folyt. $(0,0)$-ban (∄ a h.é.) $\Rightarrow$ itt nem tot. deriválható)

$\boxed{6}$ d.) $\dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{0}} = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(\underline{0}+\underline{e}t)-f(\underline{0})}{t} = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(\frac{1}{\sqrt2}t, -\frac{1}{\sqrt2}t)-f(0,0)}{t} =$ (2) (1)

$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt2}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt2}\underline{j}$

$= \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\frac{-\frac12 t^2}{6\cdot\frac12 t^2+\frac12\cdot t^2} - (-\frac17)}{t} = \lim\limits_{t\to+0}\dfrac{0}{t} = 0$ (1) (2)

6. feladat (8 pont)

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{x}{2y}$ -t $(y \neq 0)$ és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$-nal!

Adja meg $y \neq 0$ esetére az alábbi parciális deriváltakat!

$f_x'(x,y) = ?,\qquad f_y'(x,y) = ?$

$f_{xy}''(x,y) = ?,\qquad f_{yx}''(x,y) = ?$

$f(x,y) = g\left(\frac{x}{2y}\right)$

$f_x' = g'\left(\frac{x}{2y}\right)\cdot\frac{1}{2y}$ (2) $\qquad f_y' = g'\left(\frac{x}{2y}\right)\cdot\frac{x}{2}\,\frac{-1}{y^2}$ (2)

$f_{xy}'' = f_{yx}'' = \left(g''\left(\frac{x}{2y}\right)\frac{x}{2}\,\frac{-1}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y} + g'\left(\frac{x}{2y}\right)\frac{-1}{2y^2}$ (1) (3)

7. feladat (20 pont)

$$f(x,y) = y^3 - 12y + 2(x+y)^2 - 8(x+y)$$

a) Határozza meg a függvény lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!
b) $df((5,-1),(h,k)) = ?$
c) $d^2f((5,-1),(h,k)) = ?$

$\boxed{13}$ a.) $f_x' = 4(x+y)-8=0$ (1)

$f_y' = 3y^2-12+\underbrace{4(x+y)-8}_{=0}=0$ (1) (1) $\Rightarrow y=\pm2$ és $x+y=2$

$P_1(0,2)$, $P_2(4,-2)$ pontokban lehet lokális szélsőérték. (2)

$f_{xx}''=4$; $f_{xy}''=f_{yx}''=4$; $f_{yy}''=6y+4$

an2 zh2 04.04.15/5.

(3)

$D(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 4\\ 4 & 6y+4\end{vmatrix} = 4(6y+4)-16=2y$

$D(0,2)>0$; $f_{xx}''(0,2)>0 \Rightarrow P_1$-ben lok. min. van (3)

$D(4,-2)<0 \Rightarrow P_2$-ben nincs lok. szé. (2)

$\boxed{3}$ b.) $df((\underbrace{5,-1}_{:=Q}),(h,k)) = f_x'(Q)\cdot h + f_y'(Q)k = 8h-k$ (2) (1)

$\boxed{4}$ c.) $d^2f(Q,(h,k)) = [h\ \ k]\begin{bmatrix} f_{xx}''(Q) & f_{xy}''(Q)\\ f_{yx}''(Q) & f_{yy}''(Q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix} = [h\ \ k]\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix} =$ (2)

$= 4h^2+8hk-2k^2$ (2)

Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{2x+y}}{x^2+1} = \frac{e^{2x}}{x^2+1}\,e^y$$

a) grad f = ? Hol és miért létezik a gradiens?

b) Adja meg $\dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_{(0,1)}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel -8\underline{i}+6\underline{j}$

$\boxed{6}$ a.) $f_x' = \dfrac{2e^{2x}(x^2+1)-e^{2x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\,e^y$ (2) ; $f_y' = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}\,e^y$ (1) mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow$ grad f ∃ mindenütt (2)

grad $f = f_x'\underline{i} + f_y'\underline{j} = \dots$ (1)

$\boxed{4}$ b.) $\underline{e} = \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \dfrac{-8\underline{i}+6\underline{j}}{\sqrt{64+36}} = -\dfrac{8}{10}\underline{i}+\dfrac{6}{10}\underline{j}$ (1)

f tot. differenciálható $\Rightarrow \dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_{(0,1)} = \operatorname{grad} f|_{(0,1)}\cdot\underline{e}$ (1)

$\operatorname{grad} f|_{(0,1)} = f_x'(0,1)\underline{i} + f_y'(0,1)\underline{j} = 2e\underline{i}+e\underline{j}$ (1)

$\dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_{(0,1)} = (2e\underline{i}+e\underline{j})\left(-\frac{8}{10}\underline{i}+\frac{6}{10}\underline{j}\right) = -\frac{16}{10}e+\frac{6}{10}e = -e$ (1)

an2 zh2 04.04.15/6.