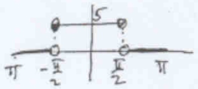
3. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ) !

$$f(x)=\begin{cases} 5, & \text{ha } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{ha } x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases} \qquad f(x)=f(x+2\pi),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját! $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=?$, $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

f páros 1 $\Longrightarrow b_k=0$ 1



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \underset{1}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}5\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot 5\cdot\frac{\pi}{2}=5 \quad 1$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx \underset{1}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}5\cos kx\,dx= \quad 1$$

$$=\frac{2}{\pi}\,5\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{10}{\pi\cdot k}\left(\sin k\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)= \quad 2$$

$$=\frac{10}{\pi\cdot k}\cdot\begin{cases}0, & \text{ha } k \text{ ps}\\ 1, & \text{ha } k=4l+1\\ -1, & \text{ha } k=4l+3\end{cases}$$

$$f(x)\rightsquigarrow\phi(x)=\frac{5}{2}+\frac{10}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x\pm\dots\right) \quad 4$$

$\phi(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ miatt $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{0+5}{2}$

3

an2 zh2 04.04.15/3.

4. feladat (12 pont)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+4x^3}}$$

a) Írja fel az függvény $x_0=0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

b) A sorfejtésből adjon választ:
$f^{(9)}(0)=?$, $f^{(10)}(0)=?$ (Az értékeket elemi műveletekkel adja meg!)

a.) $$f(x)=(1+4x^3)^{-\frac{1}{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/5}{n}(4x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/5}{n}4^n x^{3n} \quad 4$$

$$\left((1+u)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}u^n\;;\quad |u|<1\right) \quad 1$$

$$|4x^3|=4|x|^3<1 \Longrightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=R \quad 2$$

b.) $$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad 1$$

$$f^{(9)}(0)=a_9\cdot 9!=\binom{-1/5}{3}4^3\cdot 9!=\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)}{3!}4^3\cdot 9! \quad 3$$

$$f^{(10)}(0)=\underbrace{a_{10}}_{=0}\cdot 10!=0 \quad 1$$

5. feladat (17 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}-\frac{1}{7}, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\\ \frac{xy}{6x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$

b) $f'_y(0,0)=?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) Totálisan deriválható-e az f függvény az origóban?

d) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(0,0)}=?$, ha $\underline{e}\parallel \underline{i}-\underline{j}$

$\boxed{4}$ a.) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^2}{6x^2+m^2x^2}=\dfrac{m}{6+m^2}$ függ m-től $\Rightarrow \nexists$ a h.é.

Vagy: $\lim\limits_{\substack{\rho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}}\dfrac{\rho_n^2\cos\varphi_n\sin\varphi_n}{6\rho_n^2\cos^2\varphi_n+\rho_n^2\sin^2\varphi_n}=\lim\limits_{\rho_n\to 0}\dfrac{\cos\varphi_n\sin\varphi_n}{1+5\cos^2\varphi_n}=\nexists$, mert függ φ_n-től (pl. $\varphi_n=0$ ill. $\varphi_n=\frac{\pi}{4}\dots$)

an2 zh2 04.04.15/4.