ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT** α **változat** **2009. jan. 8.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (8 pont)

$$a_n = \frac{4^{n+1} + (-9)^n}{3^{2n+1} + 6}\,, \qquad \overline{\lim}\, a_n = ?\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = ?\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

Megoldás:

Ha n páros,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4^n + (-9)^n}{3\cdot 9^n + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\left(\frac{-4}{9}\right)^n + 1}{\underbrace{3\cdot(-1)^n}_{=+1} + \frac{6}{(-9)^n}} = \frac{1}{3}$$

Ha n páratlan,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{3}$$

$\overline{\lim}\, a_n = \frac{1}{3}$; $\underline{\lim}\, a_n = -\frac{1}{3}$; $\nexists \lim_n a_n$, mert $\overline{\lim} \neq \underline{\lim}$

0

2. feladat (11 pont)

a) Definiálja a következő fogalmat!

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$$

b) Fogalmazza meg a valós egyváltozós függvényekre vonatkozó Weierstrass I. és Weierstrass II. tételeket!

c) Mondja ki a számsorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

Megoldás:

a, 3 $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists P(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - (-3)| < \varepsilon$, ha $x > P(\varepsilon)$

b, W I.: Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor ott f korlátos 2

W II.: Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor ott felveszi infimumát és supremumát. 3

E 2 - 1

2/c, a_n konvergens $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_m - a_n| < \varepsilon$, ha $n, m > M(\varepsilon)$

3

3. feladat (17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} -3x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-3}, & \text{ha} \quad x \neq 3 \\ -6, & \text{ha} \quad x = 3 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = ?$; $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = ?$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$, ha $x \in \mathbb{R}$

c) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény

- szigorúan monoton,
- alulról konvex vagy alulról konkáv!

Indokoljon!

Megoldás:

a)

$$f(3+0) = \lim_{x \to 3+0} (-3x + \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\downarrow\, +\infty}) = -9 + \frac{\pi}{2}$$

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} (-3x + \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\downarrow\, -\infty}) = -9 - \frac{\pi}{2}$$

$$f(3-0) \neq f(3+0) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 3} f(x) \nexists$$

b) $f'(3) \nexists$, mert a függvény nem folytonos $x = 3$-ban, mivel nem létezik a pontban a határérték.
Ha $x \neq 3$, akkor f differenciálható, mert differenciálható függvények összetétele és

$$f'(x) = -3 + \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2} \quad \frac{-1}{(x-3)^2} = -3 - \frac{1}{(x-3)^2 + 1}$$

c) f szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 3)$ és az $(3, \infty)$ intervallumokon, mivel itt $f'(x) < 0$.

$$f''(x) = \frac{2\,(x-3)}{\left((x-3)^2 + 1\right)^2}$$

f alulról konkáv $(-\infty, 3)$- en, mert itt $f''(x) < 0$
f alulról konvex $(3, \infty)$- en, mert itt $f''(x) > 0$

4. feladat (8+6=14 pont)

a) Adjon szükséges feltételt lokális szélsőérték létezésére differenciálható függvénynél az értelmezési tartomány belső pontjában! Állítását bizonyítsa be!

b) Van-e lokális szélsőértéke az $f(x) = 3x + \operatorname{sh}(x-1)^5$ függvénynek?

Megoldás:

a) T Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$. $(K_{c,\delta} \subset D_f)$

B Pl. lokális maximumra:

$$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$$

$\Longrightarrow \quad f'(c) = 0 \quad$ (vízszintes érintő)

b) $f'(x) = 3 + \operatorname{ch}(x-1)^5 \cdot (5\,(x-1)^4) \ \geq\ 3 > 0 \implies f$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en, tehát nincs lokális szélsőértéke.

5. feladat (10 pont)

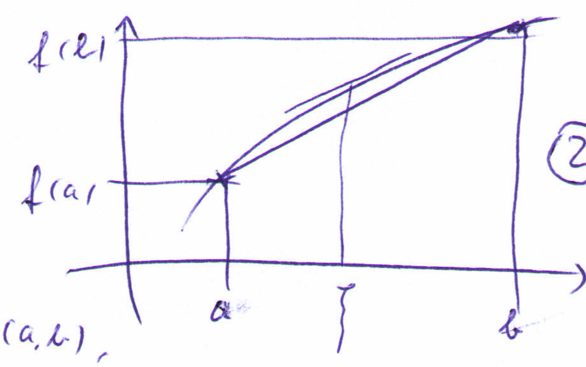
a) Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!
Szemléltesse ábrával a tétel tartalmát!

b) Mit állíthatunk f-ről, ha folytonos $[a,b]$-n és $f'(x) \equiv 0$ (a,b)-n?
Állítását bizonyítsa be!

Megoldás:

a, Ha f folyt. $[a,b]$-n, és diff.-ható (a,b)-n, akkor $\exists\, \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ 2



2

b, Ha $f \in C[a,b]$, és $f'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a,b)$,
6 akkor $f(x) \equiv c$.

B.: Alkalmazzuk a Lagrange-tételt $x_1, x_2 \in [a,b]$-re: $\exists\, \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = 0 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \implies f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

$(x_1 \neq x_2)$

6. feladat (14 pont)*

$$x(t) = e^{2t} + t^3\,, \qquad y(t) = \frac{t+5}{t^2+3}$$

a) $\dot{x}(t) = ?\,, \qquad \dot{y}(t) = ?$

b) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

c) Írja fel a görbe $t_0 = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordinátákkal!

Megoldás:

a, $\dot{x}(t) = 2e^{2t} + 3t^2$ (2) ; $\dot{y}(t) = \dfrac{(t^2+3)-(t+5)2t}{(t^2+3)^2}$ (2)

b, $\dot{x}(0) = 2 \neq 0$; $\dot{x}(t)$ folytonos $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \dot{x}(t) > 0$, ha $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$

(4) $\Rightarrow x(t)$ szig. monoton $(-\varepsilon, +\varepsilon)$-on $\Rightarrow \exists\, x^{-1}(t)$ a $(-\varepsilon, +\varepsilon)$-on

$f(x) = (y \circ x^{-1})(x)$

c, $\dfrac{dy(t_0)}{dx} = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \dfrac{3/9}{2} = \dfrac{3}{18}$

$y_0 = y(t_0) = \dfrac{5}{3}$; $x_0 = x(t_0) = 1$

Az érintő egyenlete: $y_e(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ (3) képlet

$$\underline{\underline{y_e(x) = \frac{5}{3} + \frac{3}{18}(x-1)}}$$ (3) számérték

7. feladat (11 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+9}\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{3x^2+9}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{3x}{3x^2+9}\,dx = ?$

Megoldás:

(4) a) $$\int \frac{1}{3x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

(3) b) $$\int \frac{3x^2}{3x^2+9}\,dx = \int \frac{(3x^2+9)-9}{3x^2+9}\,dx = \int 1\,dx - 9\int \frac{1}{3x^2+9}\,dx =$$

$$= x - 9\,\frac{\sqrt{3}}{9}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

(Felhasználtuk az a) feladat megoldását.)

(4) c) $$\int \frac{3x}{3x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{6x}{3x^2+9}}_{\frac{f'}{f}}\,dx = \frac{1}{2}\ln(3x^2+9) + C$$

8. feladat (7+8=15 pont)*

a) $$\int \arcsin(3x)\,dx = ?$$

b) $$\int_{1/2}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$$

Megoldás:

a,

$\boxed{8}$ $$\int \arcsin(3x)\,dx = \int 1\cdot\arcsin(3x)\,dx = x\arcsin(3x) - \int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx =$$

$u' = 1$ $\quad v = \arcsin(3x)$

$u = x$ $\quad v' = \dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$ (2)

(2) $f'\cdot f^{-1/2}$

$$= x\arcsin(3x) - \frac{1}{6}\int \frac{18x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = x\arcsin(3x) - \frac{1}{6}\cdot 2\cdot(1-9x^2)^{1/2} + C$$

(3) (1)

(7) b, improprius int.:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\frac{\arcsin^2 x}{2}\right]_{1/2}^{1-\varepsilon} =$$

(1) (3)

$f'\cdot f$ alak

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\frac{\arcsin^2(1-\varepsilon)}{2} - \frac{\arcsin^2(1/2)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{36}\right)$$ (3)

$$\frac{\arcsin^2(1-\varepsilon)}{2} \to \frac{(\pi/2)^2}{2}, \qquad \frac{\arcsin^2(1/2)}{2} = \frac{(\pi/6)^2}{2}$$

Pótfeladat (csak az elégséges és közepes vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (12 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x^3)}{\sin(4x^3)} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - \sqrt{9x^2-3x}\right) = ?$

Megoldás:

a, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x^3)}{\sin(4x^3)} \overset{L'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2\cdot 3\cancel{x^2}}{1+(2x^3)^2}}{\cos(4x^3)\cdot 4\cdot 3\cancel{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{4\cos(4x^3)(1+(2x^3)^2)}$

6

$= \dfrac{1}{2}$

6 b, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - \sqrt{9x^2-3x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^2+7-(9x^2-3x)}{\sqrt{9x^2+7}+\sqrt{9x^2-3x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+7}{\sqrt{9x^2+7}+\sqrt{9x^2-3x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+\frac{7}{x}}{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{9-\frac{3}{x}}} = \dfrac{3}{3+3} = \dfrac{1}{2}$

$\frac{7}{x} \to 0$, $\frac{7}{x^2} \to 0$, $\frac{3}{x} \to 0$

10. feladat (8 pont)

$$\int \frac{7x+5}{(x+3)(x-1)}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás:

$\dfrac{7x+5}{(x+3)(x-1)} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-1} \Rightarrow 7x+5 = A(x-1)+B(x+3)$

2

$x=+1:\ 12 = 4B \Rightarrow B = 3$

$x=-3:\ -16 = -4A \Rightarrow A = 4$

3

$I = \int\left(\dfrac{4}{x+3} + \dfrac{3}{x-1}\right)dx = 4\ln|x+3| + 3\ln|x-1| + C$

3

A *-gal jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!