1. gyakorlat

2010 X. 27.

Vető Bálint

www.math.bme.hu/~vetob

vetob@math.bme.hu

20/ 550 0116

Fogadóóra: Kedd 16-17 H 53c.

$\boxed{\text{1. feladatsor 6 és 17 → beadható HF, nem muszáj.}}$

(1.) Jelölje X: 5 érmedobásból a fejek száma.

↑ ez egy valváltozó

$$P(X=2) = ?$$

Binomiális valószínűségi változó

↓ függetlenül végzünk kísérleteket

$$\mathrm{BIN}\left(5, \tfrac{1}{2}\right)$$

↑ kísérletek száma

↖ egy kísérlet ilyen valószínűséggel sikerül

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

↑ melyik kettő ad fejet az 5 érme közül

Általában: ha Y binomiális n és p paraméterekkel:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

↑ adott számúnak sikerülnie kell

↑ a többinek nem szabad sikerülnie

(2.) Diszkrét egyenletes eloszlása van,

az $1, 2, \ldots, 6$ számokat veheti fel.

A kijöhető lehetséges értékeket súlyozzuk

$$\underbrace{EX}_{\text{várható érték}} = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \underbrace{P(X=k)}_{=\frac{1}{6} \text{ mert, ez szabályos kocka}} = 3{,}5$$

(3.) Feltételes valószínűség

P(van fiúgyerek | van lánygyerek) = ?

kétgyerekes családok

események

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\text{van fiú és lány is})}{P(\text{van lány})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

2 \ 1	F	L
F	FF	FL
L	FL	LL

leszűkíti az eseményteret

Felt. valószínűség

leszűkíti a teljes eseményteret

(4.) $E_1 = \{$ a dobott összeg $= 6 \}$

$F = \{$ az első kockán 4-est dobunk $\}$

Független-e ez a két esemény egymástól?

A és B fgtln, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ha $P(B) \neq 0$, akkor vele osztva:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

↑ ezzel tehát ellenőrizni lehet ~~felté~~ függetlenséget.

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$P(F|E_1) =$$

	1	2	…	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3) …	(1,6)
2				
⋮				
6				

Ω

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$$

önmagával vett Descartes-szorzat.

Az E_1 esemény: ezt kivesszük a teljes Ω-ból, s ezen dolgozunk.

Valamilyen párokból áll:

$$E_1 = \{ (1,5)\ (2,4)\ (3,3)\ \boxed{(4,2)}\ (5,1) \}$$

ez a egy valósítja meg az E_1-en belül az F-et.

$$P(F|E_1) = \frac{1}{5}$$

$$P(F \cap E_1) = \frac{1}{36}$$

így is kijön.

$$P(E_1) = \frac{5}{36}$$

Ezek nem függtl.-ek tehát.

Ha viszont

$E_2 = \{$ az összeg 7 $\}$

$\downarrow$

$E_2 = \{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1)\}$

$\downarrow$

$P(E_2) = \frac{6}{36}$

$P(F \cap E_2) = \frac{1}{36}$

$P(F | E_2) = \frac{1}{6}$. Ezek tehát függtl.-ek

5.

$A_1 = \{$ tudom a választ $\}$

$A_2 = \{$ azt hiszem, hogy tudom a választ $\}$

$A_3 = \{$ nem tudom a választ $\}$

$P(A_1) = \frac{4}{7}$ Milyen valószínűséggel fogunk helyes választ adni.

$P(A_2) = \frac{2}{7}$

$P(A_3) = \frac{1}{7}$ $\rightarrow$ teljes eseményrendszert alkotnak.

és ezek diszjunktak is egymástól.

A feltételes ~~esemény~~ valószínűségekből össze fogjuk tudni rakni az ~~teljes~~ esemény valószínűségét

Legyen $H = \{$ helyesen válaszolok $\}$

Ekkor $P(H) = \sum_{k=1}^{3} P(H|A_k) \cdot P(A_k)$ teljes valószínűség tétele.

most ez a következőt mondja:

$$P(H) = 1\cdot\frac{4}{7} + 0\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{9}{14}$$

k=1-re — biztos jót írok

k=2 — biztos rosszat írok

k=3 — jót és rosszat is lehet..

(6) → Bayes-tétellel.

(7.) Bayes-tétel:

$$P(A_2|H) = \frac{P(H|A_2)\cdot P(A_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(H|A_k)\cdot P(A_k)}$$

fordított esemény

matrel.

teljes valószínűség

1.	2.
90% L	10% L
10% J	90% J

$$P(\underbrace{\text{1.-be nyúlt}}_{A_1}) = \frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(\underbrace{\text{2.-be nyúlt}}_{A_2}) = \frac{1}{2}$$

L = {lyukas zoknit vett ki}

J = {jó zoknit vett ki}

Először azt nézzük meg, hogy mi a valószínűsége A_1-nek feltéve, hogy lyukas zoknit vett a bal lábára

$$P(A_1 \mid L \text{ a bal lábára}) = \underset{\text{Bayes}}{=}$$

$$= \frac{P(L \text{ a bal lábba } | A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{k=1}^{2} P(L \text{ a bal lába } | A_k) \cdot P(A_k)} =$$

~~Ha A_1-re (...) fel, akkor~~

$$= \frac{0{,}9 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}9 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}1 \cdot \frac{1}{2}} = 0{,}9$$

Ekkor $P(A_2 | L \text{ a bal lábban}) = 0{,}1$

Teljes valószínűség tételét alkalmazva:

$$P(L \text{ a jobb lábban } | L \text{ a bal lábban}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} P(L \text{ a jobb lábban } | A_k \text{ és } L \text{ a bal lábban}) \cdot P(A_k | L \text{ a bal lábban}) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}82}}$$

ugyanazt húz
a második
(a doboz)

(8) Egyenletes lesz az eloszlása a tagnak.

(9.) 5-ből meg kell mondani, hogy melyik kettő nézne ez e-nyiket:

$$P = \binom{5}{2} \cdot 0{,}2^{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot 0{,}1^{3}$$

külön-külön ekkora valószínűséggel van

multinomiális eloszlás.

(nem 2, hanem több – itt 3 db – fajta esemény van).

(10.)

előtte nem 6-ost dob

$$\Omega = \{ 6,\ N6,\ NN6,\ NNN6, \dots \}$$

~~felosztott~~ nézzük hogy mit ad ki: egymás után írjuk az egyes emberek által dobottakat

egyből 6-ost dob

Ezeknek valószínűségei:

$$P = \left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6},\ \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6},\ \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}, \dots \right.$$

$$P(\text{András nyer}) = ?$$

$$\| \quad P(\{ 6,\ NN6,\ NNNN6, \dots \})$$

eseménytér elemeiből írjuk fel.

(akkor nyer András, ha páros sok van N-ből)

Ez egy mértani sor:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{6}{11}}}$$

Horgolni feladat: ezt rekurzióval megoldani

11. A hibás alkatrészek száma binomiális eloszlású lenne, de ennek a paraméterei nagyon eltorzult lenne. Ehelyett van a Poisson-közelítés -> a hibás alkatrészek várható, stb. Poisson-eloszlással lehet közelíteni.

$$X \sim Po(\lambda)$$

$$\downarrow$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$EX = \lambda$ várható érték

Most $\lambda = 11$.

~~P(X~~ X: hibásak darabszáma

$$P(X<20) = \sum_{k=0}^{19} e^{-11} \cdot \frac{11^k}{k!}$$

$$P(X=k) = e^{-11} \cdot \frac{11^k}{k!}$$

Két szomszédos valószínűség hányadosa:

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k+1)} = \frac{e^{-11} \cdot \frac{11^k}{k!}}{e^{-11} \cdot \frac{11^{k+1}}{(k+1)!}} = \frac{1}{11} \cdot \frac{(k+1)!}{k!} = \frac{k+1}{11}$$

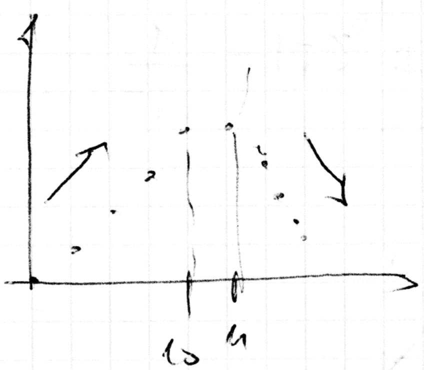
Ha növeked ez a valószínűségi fgv, akkor $\frac{k+1}{11} < 1$.

Ez felel meg tehát $P(X=k) \le P(X=k+1)$ -nek.

Ha $\ge$, akkor annak felel meg, hogy nagyobb.

$\frac{k+1}{11} = 1$ megoldása $k=10$

Vagyis a 10 és 11 találat pont egyenlő. A korábbi találatok kisebb, a későbbieké is kisebb.



(12.) $P(X>10) = 0,8$

exp. eloszlású

$Y \sim EXP(\lambda)$

ekkor Y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

eloszlásfgv-e: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

vagyis $P(Y<x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$P(X>10) = 0,8$, így komplementer eseményt véve

$$P(Y>x) = 1 - P(Y<x) = e^{-\lambda x}$$

(egyenlőséget nem kell beleírni, mert folytonos eloszlásra 0 az olyannak a valószínűsége).

így $x = 10$

és $e^{-\lambda x} = 0{,}8$

$$e^{-\lambda \cdot 10} = 0{,}8 \rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}8}{10}$$

Ekkor $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ várható érték

$$D^2(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$ szórásnégyzet

(14.) X exp. eloszlású

$E(X) = 100$ $\rightarrow$ $X \sim EXP\left(\frac{1}{100}\right)$

$P(X < 200 \mid X > 150) = ?$

feltételes valószínűség $\rightarrow$ használjuk a definíciót.

$$P = \frac{P(150 < X < 200)}{P(X > 150)} =$$

$$= \frac{e^{-1{,}5} - e^{-2}}{e^{-\frac{1}{100} \cdot 150}} = 1 - e^{-0{,}5} = 1 - e^{-\frac{1}{100} \cdot 50} =$$

$$= P(X < 50)$$

örökifjú tulajdonság.

$$P(150 < X < 200) = \underbrace{P(X < 200)}_{1 - e^{-\frac{1}{100} \cdot 200}} - \underbrace{P(X < 150)}_{1 - e^{-\frac{1}{100} \cdot 150}}$$

öröklődik: már eltelt 150 életegység, de ha

$t < 200$ → még a 150-et követő 50 egy-

ségben bekövetkezik

Elfelejtjük a 150 életegységet, s

onnantól nézzük.