

1. példa. Egy merőlegesen metsződő földelt fémsíkok által alakított sarokban egy $R = 3\text{ cm}$ sugarú, $Q = 15\text{ nC}$ töltéssel ellátott fémgömb helyezkedik el az ábrán látható módon az egyes síkktól $a = 1,5\text{ m}$ és $b = 2\text{ m}$ távolságra. A közeg levegő.

a) Vegyen fel olyan ekvivalens töltésrendezést, melynek elektromos tere megegyezik a fémlemez és a töltés által létrehozott térrel! (1 pont)

Helyes ábra. (1 p)

b) Mekkora és milyen irányú erő hat a gömbre? Az irányt elegendő az a) feladat ábráján jelölni! (3 pont)

Lásd Bilicz példatár 2.16-os feladata.

Az eredő térerősség helyes formulája. (1 p)

Innen az erő: $F = QE = 0,187\text{ }\mu\text{N}$. (1 p)

Az ábrán az erő helyes feltüntetése. (1 p)

c) Határozza meg a gömb potenciálját! (3 pont)

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \right) = 4,44\text{ kV} \quad (3\text{ p})$$

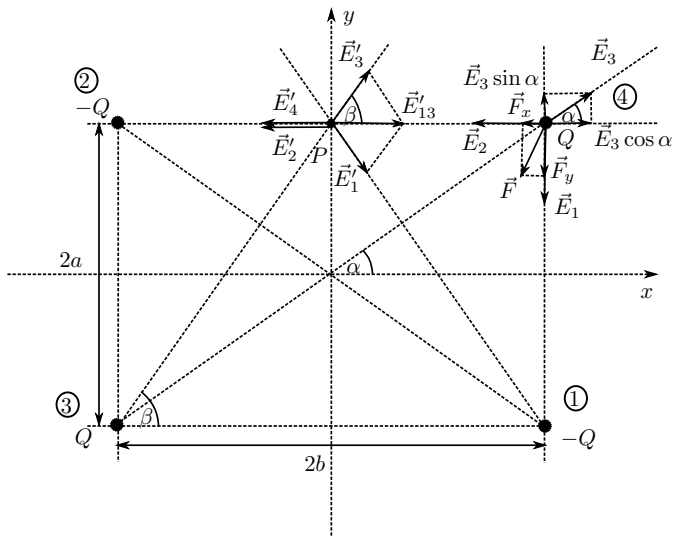
d) Határozza meg a felületi töltéssűrűséget az ábrán jelölt P pontban! (3 pont)

Térerősségkomponensek helyes kifejezése: (1 p)

$$E'_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 + (2a)^2} = E'_3, \quad E'_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2} = E'_4.$$

Az eredő térerősség: $E' = 2(E'_1 \cos \beta - E'_2)$, ahol $\beta = \arctan\left(\frac{2a}{b}\right)$. (1 p)

Végül a felületi töltéssűrűség a P pontban: $\sigma_P = \epsilon_0 E' = -494,98 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$. (1 p)



2. példa. Egy keresztirányban rétegzett hengerkondenzátor méretei: $R_1 = 1,5\text{ mm}$, $R_2 = 3,5\text{ mm}$, $R_3 = 5,5\text{ mm}$ és $l = 3,5\text{ cm}$. Az egyes rétegek relatív dielektromos állandói és vezetőképességei rendre $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1$ és σ_2 .

Tekintsük a két réteget tökéletes szigetelőnek ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)!

a) Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2,25$? (2 pont)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 l}{\ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right)} = 3,37\text{ pF} \quad (2\text{ p})$$

b) Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha $\epsilon_1 = 2,25, \epsilon_2 = 3,3$? (4 pont)

I. megoldás:

Az egyes rétegek kapacitásai: $C_i = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_i l}{\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)}$, ahol $i = \{1, 2\}$. (2 p)

Az eredő kapacitás pedig soros kapcsolással kapható: $C = C_1 \times C_2 = 3,79\text{ pF}$. (2 p)

II. megoldás: $C = \frac{Q}{U}$, ahol $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr + \frac{1}{\epsilon_2} \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{r} dr \right)$. (2 p)

A végeredmény: $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} = 3,79\text{ pF}$. (2 p)

Legyen a továbbiakban $\sigma_1 = 1 \cdot 10^{-12}\text{ S/m}$ és $\sigma_2 = 1 \cdot 10^{-13}\text{ S/m}$!

c) A fegyverzetek közé kapcsolt feszültség $U = 1,5\text{ kV}$. Határozza meg a kondenzátoron átfolyó szivárgási áramot! (4 pont)

I. megoldás: Elektrosztatikai analógia alapján az egyes rétegek konduktanciája:

$$G_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0 \epsilon_i} C_i, \text{ ahol } i = \{1, 2\}. \quad (2\text{ p})$$

Az eredő vezetés pedig párhuzamos kapcsolással kapható: $G = G_1 \times G_2$. (1 p)

$$G = \frac{I}{U} \Rightarrow I = \frac{2\pi l U}{\frac{1}{\sigma_1} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} = 61,46\text{ pA} \quad (1\text{ p})$$

II. megoldás: Az alábbi két összefüggés felhasználásával (1 p)

$$I = J(r) 2\pi r l,$$

$$J(r) = \sigma_i E(r), \text{ ahol } i = \{1, 2\},$$

majd a feszültség számítása a b) feladathoz hasonló módon. (2 p)

Végül az I áram kifejezése. (1 p)

Kis példák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon mellékelje.)

A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. Egy szigetelő közeg legnagyobb lineáris mérete 0,25 m. Alkalmazható-e tisztán elektrosztatikus modell 1 GHz-en az elektromos térerősség számítására a szigetelőben és annak közelében? Válaszát indokolja!

Nem, mert a c/f arány összemérhető a karakterisztikus mérettel.

2. A σ fajlagos vezetőképességű talajban h mélységben egy $r \ll h$ sugarú fémgömb helyezkedik el. Határozza meg a földelési ellenállást!

$$R = \frac{U}{I} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right)$$

3. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben $\phi(x, y, z) = 2 \sin(\pi x) \cos(\pi y)$. Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét!

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\text{grad}\phi = -2\pi[\cos(\pi x) \cos(\pi y)\mathbf{e}_x - \sin(\pi x) \sin(\pi y)\mathbf{e}_y]$$

4. A levegőben két egyforma, R sugarú igen hosszú vezeték helyezkedik el egymástól $d \gg R$ távolságban, melyek ellentétes irányú I áramot szállítanak (Lecher-vezeték). Adja meg a vezetékek síkjában, tőlük azonos távolságra lévő, párhuzamos egyenesen a térerősség nagyságát!

$$H = \frac{2I}{\pi d}$$

5. Egy toroid vasmagra két tekercset csévélünk, melynek menetszámai: N_1 és N_2 , a közepes erővonalhossz l , kör keresztmetszetének átmérője D . A vasmag relatív permeabilitása μ_r . Számítsa ki a kölcsönös indukciós együtthatót, ha a két tekercs külön-külön ellentétes irányú mágneses teret hoz létre a vasmagban!

$$M = -\frac{\mu_0\mu_r N_1 N_2 D^2 \pi}{4l}$$

Elemi töltés- és árameloszlások keltette mezők vákuumban:

- Ponttöltés: $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$, $E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$
- Végtelen egyenes vonaltöltés: $\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$, $E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$
- Végtelen egyenes vonaláram: $B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$

Konstansok: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$