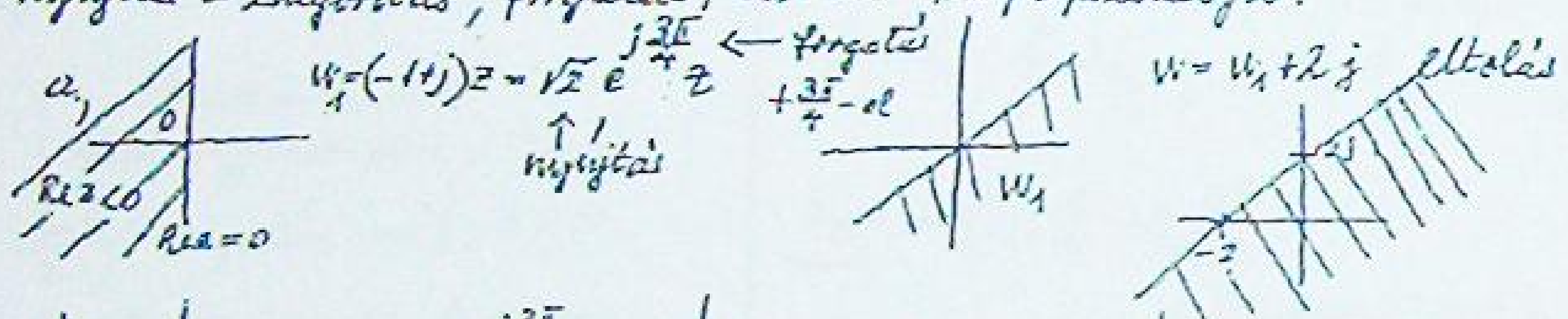
Analízis (2) VIK, Informatika — Komplex fv. tan 2. gyakorlat — 2003. május

(1.) Mibe viszi át a $w=(-1+j)z+2j$ függvény az
a, $\mathrm{Re}\,z<0$, b, $|z|<1$ tartományokat?
Mi a képe a $\mathrm{Re}\,z=0$ ill. a $|z|=1$ görbéknek?

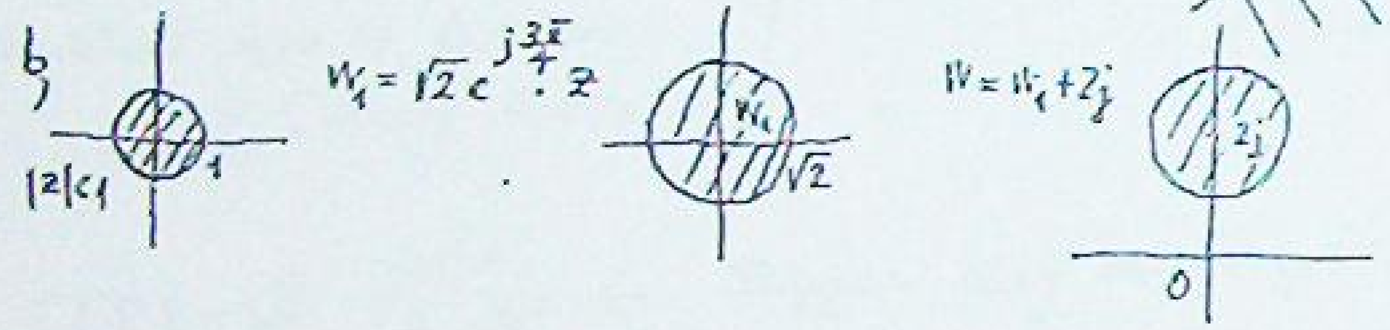
· A lin. egészfüggvény kört körbe, egyenest egyenesbe visz át.
Nyújtás – zsugorítás, forgatás, eltolás szuperpozíciója.

a, $w_1=(-1+j)z=\sqrt{2}\,e^{j\frac{3\pi}{4}}z$ ← forgatás $+\frac{3\pi}{4}$-el; ↑ nyújtás

$w=w_1+2j$ eltolás

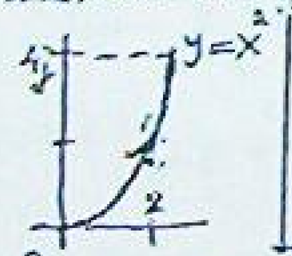


b, $w_1=\sqrt{2}\,e^{j\frac{3\pi}{4}}z$ $\quad w=w_1+2j$



KOMPLEX VONALINTEGRÁL

(2.) $\int_L \bar{z}^2\,dz=?$ L:



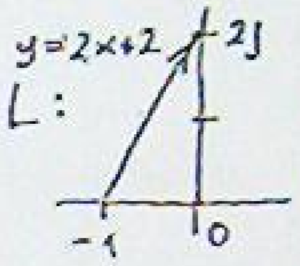
$$\boxed{\int_L f(z)\,dz=\int_{t=\alpha}^{\beta} f[z(t)]\,\dot z(t)\,dt \qquad L:\ z(t)=x(t)+j\,y(t);\ \alpha\le t\le\beta}$$

($\bar z^2$ sehol sem reguláris, integrálja két pont között függ a görbétől)

$z(x)=x+jx^2;\ 0\le x\le 2$
$\dot z(x)=1+j2x$ (most x-szel jelöljük a paramétert)

$$\int_L \bar z^2 dz=\int_L (x-jy)^2 dz=\int_L (x^2-y^2-j2xy)\,dz=\int_0^2 (x^2-x^4-j2x^3)(1+j2x)\,dx=$$
$$=\int_0^2 (x^2-x^4\cancel{-j2x^3}\cancel{+j2x^3}-j2x^5+4x^4)\,dx=\int_0^2 (x^2+3x^4-j2x^5)\,dx=$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^5}{5}-j\frac{2x^6}{6}\right]_0^2=\frac{8}{3}+\frac{96}{5}-j\frac{64}{3}=\underline{\underline{\frac{328}{15}-j\frac{64}{3}}}$$

(3.) $I=\int_L (\mathrm{Im}\,2\bar z+\mathrm{ch}\,5z)\,dz;\ \mathrm{Re}\,I=?\ \mathrm{Im}\,I=?$ L:



$z(x)=x+j(2x+2)$, $-1\le x\le 0$
$\dot z(x)=1+2j$

$$\int_L \underbrace{\mathrm{Im}\,2\bar z}_{\text{sehol sem reg.}}\,dz+\int_L \underbrace{\mathrm{ch}\,5z}_{\text{az egész síkon reguláris, integrálja csak a kezdő- és a végponttól függ.}}\,dz=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_L -2y\,dz=-2\int_{-1}^{0}(2x+2)\cdot(1+2j)\,dx=-2(1+2j)\left[x^2+2x\right]_{-1}^{0}=-2(1+2j)\underbrace{(-1+2)}_{1}=-2-4j$$

$$I_2=\int_L \mathrm{ch}\,5z\,dz=\frac{1}{5}\left[\mathrm{ch}\,5z\right]_{-1}^{2j}=\frac{1}{5}\big(\underbrace{\mathrm{ch}\,10j}_{=\cos 10}-\underbrace{\mathrm{ch}(-5)}_{=\mathrm{ch}\,5}\big)=\frac{1}{5}(\cos 10-\mathrm{ch}\,5)$$

$$\underline{\mathrm{Re}\,I=-2+\frac{1}{5}(\cos 10-\mathrm{ch}\,5)\ ;\ \mathrm{Im}\,I=-4}$$

(4.) $I=\oint_{|z|=2}\left(\frac{1}{j\bar z}+z\cos z\right)dz=?$

$z(\varphi)=2e^{j\varphi};\ 0\le\varphi\le 2\pi$
$\dot z(\varphi)=2je^{j\varphi}$

$$I=\oint_{|z|=2}\underbrace{\frac{1}{j\bar z}}_{\text{sehol sem reguláris}}dz+\underbrace{\oint_{|z|} z\cos z\,dz}_{=0\ \text{A CAUCHY–GOURSAT TÉTEL MIATT}}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{-j\cdot 2e^{-j\varphi}}\cdot 2j e^{j\varphi}\,d\varphi=$$
$$=-\int_0^{2\pi} e^{2j\varphi}\,d\varphi=-\left[\frac{e^{2j\varphi}}{2j}\right]_0^{2\pi}=-\frac{1}{2j}\big(\underbrace{e^{4\pi j}}_{=1}-1\big)=\underline{\underline{0}}$$

Cauchy integrálformula:

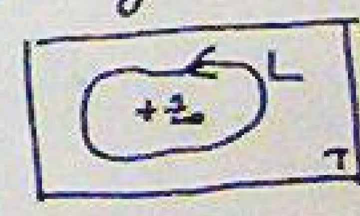
(I) $\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi j\,f(z_0)$; (II) $\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=\frac{2\pi j}{n!}f^{(n)}(z_0)$

(Az I. formula az $n=0$ eset)

Ahol $f(z)$ reguláris az L által határolt egyszeresen összefüggő tartományon.

L:

$\}\equiv$ f reg T e.ö.f-on

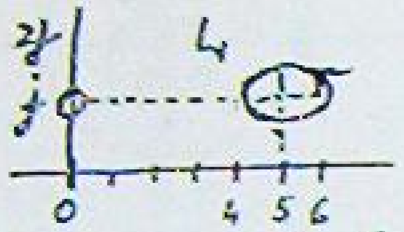


⑤ $I=\oint_L \frac{\ln z}{z-j}\,dz = ?$

a, $L_1: (x-5)^2+4(y-1)^2=1$

b, $L_2: |z-2j|=1{,}5$

a,



$L_1: (x-5)^2+\frac{(y-1)^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$

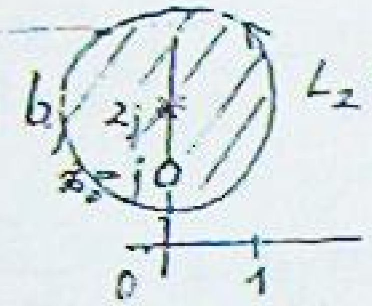
ellipszis $C(5,1)$

féltengelyeinek hossza: 1 és $\frac{1}{2}$

$\frac{\ln z}{z-j}$ reguláris az L_1 által határolt egysz. öf. tart.-on

$\underline{I_1=0}$ (Cauchy-Goursat)

b,



$L_2: |z-2j|=1{,}5$

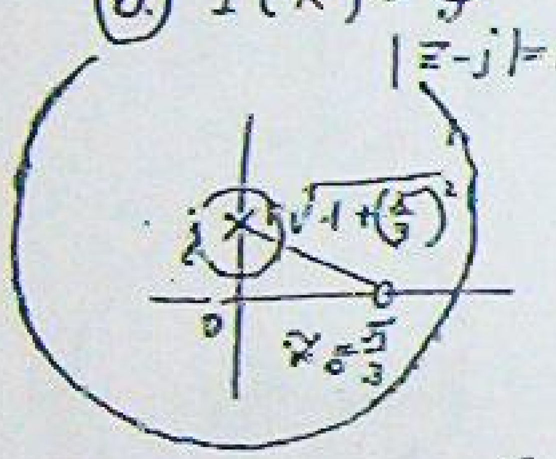
ln z reguláris az L_2 által határolt egysz. öf. tartományon.

$I_2 = 2\pi j \ln z\Big|_{z_0=j} = 2\pi j \ln j = 2\pi j\big(\underbrace{\ln 1}_{=0}+j\tfrac{\pi}{2}\big)$

$\underline{I_2 = 2\pi j\cdot j\frac{\pi}{2} = -\pi^2}$

(Integrálformula I)

⑥ $I(R)=\oint_{|z-j|=R}\frac{\cos^6 z}{z-\frac{\pi}{3}}\,dz$ Hogyan függ az integrál értéke R-től? (R poz. szám)



$$I(R)=\begin{cases} \underline{0} & \text{ha } R<\sqrt{1+(\frac{\pi}{3})^2} \quad \text{(Cauchy-Goursat)} \\ 2\pi j\cos^6 z\Big|_{z_0=\frac{\pi}{3}} = 2\pi j\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^6 = 2\pi j\frac{1}{2^6} = \frac{\pi j}{32}, \quad \text{(Integrálformula I)} & \text{ha } R>\sqrt{1+(\frac{\pi}{3})^2} \end{cases}$$

($R=\sqrt{1+(\frac{\pi}{3})^2}$ esetén az integrál NINCS ÉRTELMEZVE)

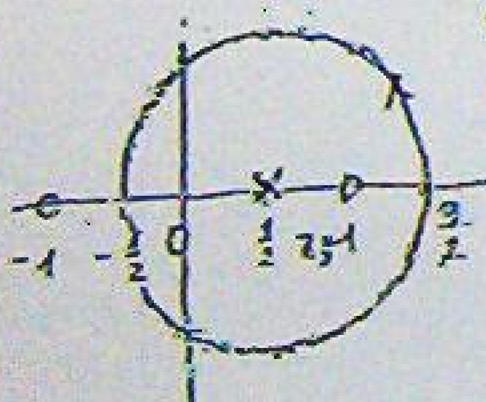
⑦ $\oint_L \frac{\sin jz}{z^2-1}\,dz = ?$

$L: |z-\frac{1}{2}|=1$

$z^2-1=0$

$(z-1)(z+1)=0$

$z_1=1$ ($z_2=-1$ nincs L belsejében)



$\oint_L \frac{\sin jz}{(z-1)(z+1)}\,dz = \oint_L \frac{\frac{\sin jz}{z+1}}{z-1}\,dz =$ (Integrálformula I)

Reguláris az egész síkon

$= 2\pi j\,\frac{\sin jz}{z+1}\Big|_{z_0=1} = 2\pi j\,\frac{\sin j}{2} =$

$= \pi j\cdot j\,\mathrm{sh}\,1 = \underline{-\pi\,\mathrm{sh}\,1}$

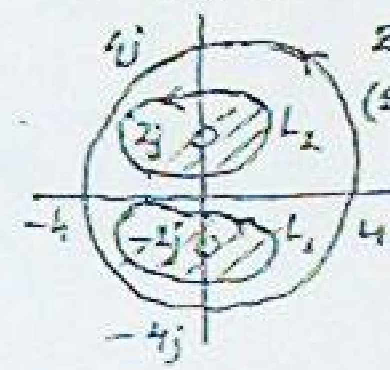
($\sin j = j\,\mathrm{sh}\,1$)

⑧ $\oint_{|z|=4}\frac{z^4\cdot e^{\pi z}}{z^2+4}\,dz = \oint_{L_1}\frac{\frac{z^4 e^{\pi z}}{z-2j}}{z+2j}\,dz + \oint_{L_2}\frac{\frac{z^4 e^{\pi z}}{z+2j}}{z-2j}\,dz =$

Reguláris L_1 belsejében

Reguláris L_2 belsejében

(Integrálformula I)



$z^2+4=0$

$(z+2j)(z-2j)=0$

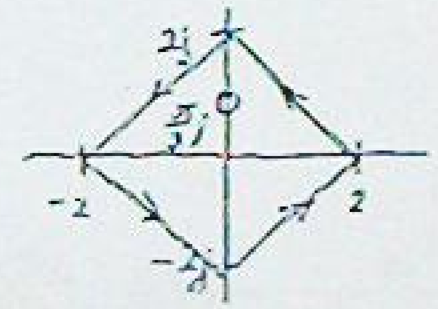
$z_1=-2j$, $z_2=2j$

$= 2\pi j\,\frac{z^4 e^{\pi z}}{z-2j}\Big|_{z_0=-2j} + 2\pi j\,\frac{z^4 e^{\pi z}}{z+2j}\Big|_{z_0=2j} =$

$= 2\pi j\,\frac{\overbrace{(-2j)^4}^{=16}\,\overbrace{e^{-2\pi j}}^{=1}}{-4j} + 2\pi j\,\frac{\overbrace{(2j)^4}^{=16}\,\overbrace{e^{2\pi j}}^{=1}}{4j} = \underline{0}$

⑨ $\oint_{|x|+|y|=2}\frac{\mathrm{ch}\,3z}{(z-\frac{\pi}{3}j)^3}\,dz = \frac{2\pi j}{2!}\left(\mathrm{ch}\,3z\right)''_{z_0=\frac{\pi}{3}j} = \pi j\cdot 3^2\,\mathrm{ch}\left(3\frac{\pi}{3}j\right) =$

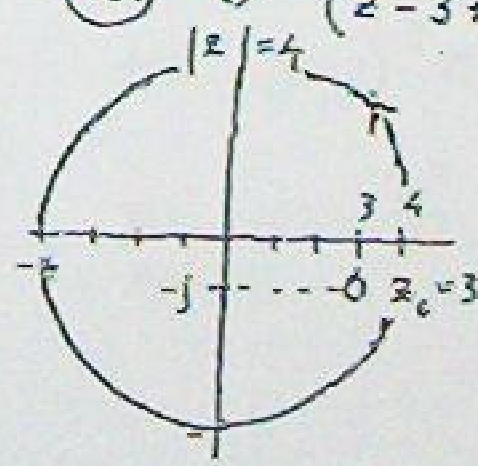
Reguláris az egész síkon



(Integrálformula II, n=2 re) $= 9\pi j\,\underbrace{\mathrm{ch}(\pi j)}_{\cos\pi=-1} = -9\pi j$

⑩ $\oint_{|z|=4}\frac{z^6-z^3}{(z-3+j)^5}\,dz = \oint_{|z|=4}\frac{z^6-z^3}{(z-(3-j))^5}\,dz = \frac{2\pi j}{4!}\left(z^6-z^3\right)^{(4)}_{z_0=3-j} =$

Reg. az egész síkon



$n=4$

$z_0=3-j$

$$\boxed{\begin{aligned} (z^6-z^3)' &= 6z^5-3z^2 \\ (z^6-z^3)'' &= 30z^4-6z \\ (z^6-z^3)''' &= 120z^3-6 \\ (z^6-z^3)^{(IV)} &= 360z^2 \end{aligned}}$$

$= \frac{\pi j}{12}\,\overset{30}{\cancel{360}}z^2\Big|_{z_0=3-j} =$

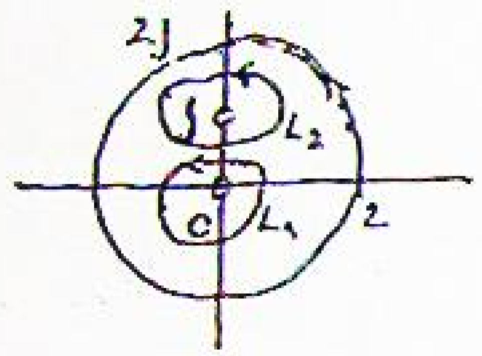
$= 30\pi j\,(3-j)^2 =$

$= 30\pi j\,(8-6j) =$

$= \underline{180\pi + j\,240\pi}$

11. $$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z(z-j)^2}\,dz = \oint_{L_1} \frac{\overbrace{\frac{\sin z}{(z-j)^2}}^{\text{Reguláris } L_1 \text{ belsejében}}}{z}\,dz + \oint_{L_2} \frac{\overbrace{\frac{\sin z}{z}}^{\text{Reguláris } L_2 \text{ belsejében}}}{(z-j)^2}\,dz =$$

(n=1 eset)



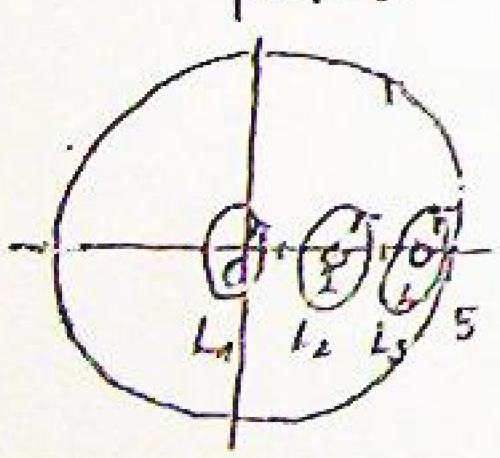
$$= 2\pi j \left.\frac{\sin z}{(z-j)^2}\right|_{z_0=0} + \frac{2\pi j}{1!}\left.\left(\frac{\sin z}{z}\right)'\right|_{z_0=j} =$$

$$= \underbrace{2\pi j \frac{0}{(-j)^2}}_{=0} + 2\pi j \left.\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}\right|_{z_0=j} =$$

$$= 2\pi j \frac{j\overbrace{\cos j}^{=\operatorname{ch}1} - \overbrace{\sin j}^{j\operatorname{sh}1}}{-1} = \frac{2\pi j}{-1}\left(j\operatorname{ch}1 - j\operatorname{sh}1\right) = \frac{2\pi j^2}{-1}\left(\operatorname{ch}1 - \operatorname{sh}1\right) =$$

$$= \underline{\underline{2\pi\left(\operatorname{ch}1 - \operatorname{sh}1\right)}} = \frac{2\pi}{e} \qquad \left(\operatorname{ch}1 - \operatorname{sh}1 = \frac{e+e^{-1}}{2} - \frac{e-e^{-1}}{2} = e^{-1}\right)$$

12. $$\oint_{|z|=5} \frac{z^2-7z+10}{z^3-6z^2+8z}\,dz = \oint_{|z|=5} \frac{(z-5)(z-2)}{z(z-4)(z-2)}\,dz =$$



$$= \oint_{L_1} \frac{\overbrace{\frac{z-5}{z-4}}^{\text{reg. } L_1 \text{ belsejében}}}{z}\,dz + \underbrace{\oint_{L_2} \frac{(z-5)\cancel{(z-2)}}{z(z-4)\cancel{(z-2)}}\,dz}_{=0} + \oint_{L_3} \frac{\overbrace{\frac{z-5}{z}}^{\text{reg. } L_3 \text{ belsejében}}}{z-4}\,dz$$

L_2 belsejében reg. és konstans ha $z \neq 2$

($z=2$ megszüntethető szingularitás)

$$= 2\pi j \left.\frac{z-5}{z-4}\right|_{z_0=0} + 2\pi j \left.\frac{z-5}{z}\right|_{z_0=4} =$$

$$= 2\pi j \frac{5}{4} + 2\pi j \cdot \frac{-1}{4} = \underline{\underline{2\pi j}}$$

LAURENT SORFEJTÉS ÉS REZIDUUM TÉTEL

13. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z^2 - 1}{z^5}$

a, Írja fel $z_0=0$ körüli Laurent sorát! KT. ?

b, $\operatorname{Rez}_{z_0=0} f(z) = ?$

c, $\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = ?$

$\sum a_k z^k$ alakú sort keresünk.

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \operatorname{ch} z^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} + \frac{z^{12}}{6!} + \dots \quad 0 \le |z| < \infty$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{4k-5}}{(2k)!} = \frac{z^{-1}}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \frac{z^7}{6!} + \dots \quad 0<|z|<\infty \ (z \neq 0), \quad \operatorname{Rez}_{z_0=0} f(z) = \frac{1}{2!}, \quad I = 2\pi j \operatorname{Rez}_{z_0=0} f(z) = 2\pi j \frac{1}{2} = \pi j$$

14. $f(z) = \dfrac{e^{jz} - 1}{z^2}$

a, Írja fel a $z_0=0$ körüli Laurent sorát! KT. ?

b, $\operatorname{Rez}_{z_0=0} f(z) = ?$

c, $\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = ?$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \Rightarrow e^{jz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jz)^k}{k!} = 1 + jz + \frac{(jz)^2}{2!} + \frac{(jz)^3}{3!} + \dots \quad 0 \le |z| < \infty$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^k z^{k-2}}{k!} = \frac{j}{z} - \frac{1}{2!} - \frac{jz}{3!} + \dots \quad 0<|z|<\infty \ (z \neq 0), \quad \operatorname{Rez}_{z_0=0} f(z) = j, \quad I = 2\pi j j = -2\pi$$

15. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^3}$

a, Írja fel $z_0=2$ körüli Laurent sorát! KT. ?

b, $\operatorname{Rez}_{z_0=2} f(z) = ?$

c, $\oint_{|z-1|=2} f(z)\,dz = ?$

$\sum a_k (z-2)^k$ alakú sort keresünk.

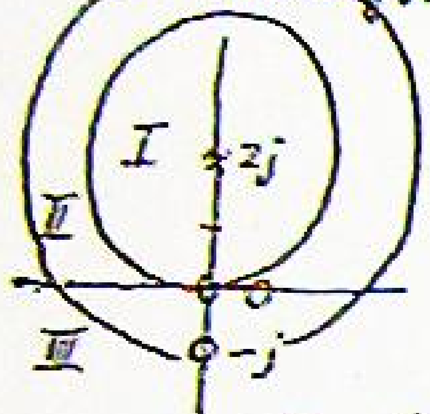
$$f(z) = (z-2)^{-3} e^z = (z-2)^{-3} e^{z-2} \cdot e^2 = e^2 (z-2)^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2)^k}{k!} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{k-3}}{k!}$$

$0 < |z-2| < \infty$ $(z \neq 2)$

$$\operatorname{Rez}_{z_0=2} f(z) = \frac{e^2}{2!} \quad (k=2), \quad I = 2\pi j \frac{e^2}{2} = e^2 \pi j$$

(16.) $f(z) = \frac{1}{z+j} + \frac{j}{z}$

Fejtse Laurent sorba a $z_0 = 2j$ hely körül minden lehetséges tartományon és adja meg a konvergenciatartományokat is!



A szinguláris helyek $z_1=0$, $z_2=-j$, $\Sigma a_k (z-2j)^k$ alakú sort keresünk.

$$f(z)=\frac{1}{z+j}+\frac{j}{z}=\underbrace{\frac{1}{3j+(z-2j)}}_{g(z)}+\underbrace{\frac{j}{2j+(z-2j)}}_{h(z)}$$

$g(z)$ és $h(z)$ is kétféleképp írható fel:

$$g_1(z)=\frac{1}{3j}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2j}{3j}}=\frac{1}{3j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-2j}{3j}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-2j)^k}{(3j)^{k+1}} \quad \left\{ \left|\frac{z-2j}{3j}\right|<1 \Downarrow |z-2j|<3 \right.$$

$$g_2(z)=\frac{1}{z-2j}\frac{1}{1+\frac{3j}{z-2j}}=\frac{1}{z-2j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{3j}{z-2j}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(3j)^k}{(z-2j)^{k+1}} \quad \left\{ \left|\frac{3j}{z-2j}\right|<1 \Downarrow 3<|z-2j| \right.$$

$$h_1(z)=\frac{j}{2j}\frac{1}{1+\frac{z-2j}{2j}}=\frac{j}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-2j}{2j}\right)^k=j\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-2j)^k}{(2j)^{k+1}} \quad \left\{ \left|\frac{z-2j}{2j}\right|<1 \Downarrow |z-2j|<2 \right.$$

$$h_2(z)=\frac{j}{z-2j}\cdot\frac{1}{1+\frac{2j}{z-2j}}=\frac{j}{z-2j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2j}{z-2j}\right)^k=j\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2j)^k}{(z-2j)^{k+1}} \quad \left\{ \left|\frac{2j}{z-2j}\right|<1 \Downarrow 2<|z-2j| \right.$$

Az I tartományon: $f(z)=g_1(z)+h_1(z)$ $\quad |z-2j|<2$

A II —"— : $f(z)=g_1(z)+h_2(z)$ $\quad 2<|z-2j|<3$

A III —"— : $f(z)=g_2(z)+h_2(z)$ $\quad 3<|z-2j|<\infty$

(17.) $f(z)=\frac{1}{z^2+2z}$

a, Fejtse Laurent sorba $z_0=0$ körül azon a tartományon, amely tartalmazza a $z=\frac{3}{2}j$ pontot! KT.?

b, $\oint_{|z|=1} f(z)\,dz=?$

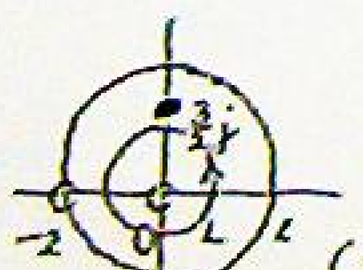
$\Sigma a_k z^k$ alakú sort keresünk.

$$f(z)=\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{z}\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k-1}}{2^{k+1}}$$

$0<\left|\frac{z}{2}\right|<1$ $(z\neq 0)$ $\quad 0<|z|<2$

$\operatorname{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2}$ (k=0 mellett)

$$\oint_{L:|z|=1} f(z)\,dz=2\pi j\cdot\frac{1}{2}=\pi j$$



szinguláris helyek: 0, −2

(−2 nincs a kör belsejében)

(18) $f(z)=\frac{z-3}{(z^2-2z-3)(z+j)}$

a, Fejtse Laurent sorba a $z_0=-j$ hely körül! KT.?

b, $\operatorname{Res}_{z_0=-j} f(z)=?$

c, $\oint_{|z-2+2j|=2\sqrt{2}} f(z)\,dz=?$

$$f(z)=\frac{z-3}{(z-3)(z+1)(z+j)}$$

$\Sigma a_k (z+j)^k$ alakú sort keresünk.

$$f(z)=\frac{\cancel{z-3}}{\cancel{(z-3)}(z+1)(z+j)}=(z+j)^{-1}\frac{1}{z+1}=(z+j)^{-1}\frac{1}{1-j+(z+j)}=(z+j)^{-1}\frac{1}{1-j}\cdot\frac{1}{1+\frac{z+j}{1-j}}=$$

($z=-j$ egy környezetében)

$$=\underbrace{\frac{1}{1-j}}_{=\frac{1+j}{2}}(z+j)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z+j}{1-j}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1+j}{2}\right)^{k+1}(z+j)^{k-1}$$

ha $\left|\frac{z+j}{1-j}\right|<1 \Rightarrow 0<|z+j|<\sqrt{2}$ $(z\neq -j)$

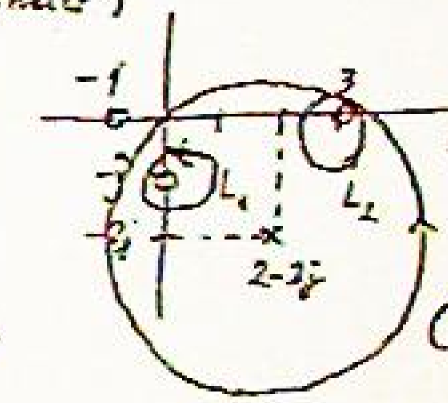
$\operatorname{Res}_{z_0=-j} f(z)=\frac{1+j}{2}$ (k=0-hoz tartozó együttható)

$$\oint_{|z-(2-2j)|=2\sqrt{2}} f(z)\,dz=\oint_{L_1} f(z)\,dz+\oint_{L_2} f(z)\,dz=$$

$$=2\pi j\operatorname{Res}_{z_0=-j} f(z)+0=2\pi j\frac{1+j}{2}=(-1+j)\pi$$

mert L_2-ben $f(z)$ $z=3$ kivételével reguláris és korlátos. ($z=3$ megszüntethető szingularitás) $\Sigma a_k(z-3)^k$ alakú sorban nincsenek neg. kit. tartozók $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=3} f(z)=0$



Szinguláris helyek: 3, −1, −j

(−1 nincs a kör belsejében)

(19) $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)^5}$

a, Írja fel $z_0=-3$ középpontú, a pont közvetlen környezetében konvergens Laurent sorát! KT.?

b, $\operatorname{Res}_{z_0=-3} f(z)=?$

c, $\oint_{|z+4|=2} f(z)\,dz=?$

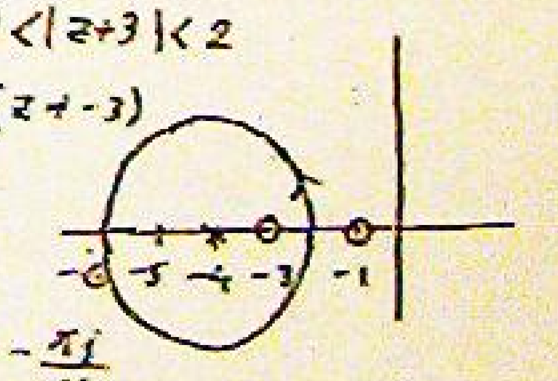
$\Sigma a_k (z+3)^k$ alakú sort keresünk.

$$f(z)=(z+3)^{-5}\cdot\frac{1}{z+1}=(z+3)^{-5}\frac{1}{-2+(z+3)}=-\frac{1}{2}(z+3)^{-5}\frac{1}{1-\frac{z+3}{2}}=-\frac{1}{2}(z+3)^{-5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+3}{2}\right)^k=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}(z+3)^{k-5};\quad \frac{|z+3|}{2}<1 \Rightarrow 0<|z+3|<2$$

$(z\neq -3)$

$\operatorname{Res}_{z_0=-3} f(z)=-\frac{1}{2^5}$ (k=4 mellett)



$$\oint_{|z+4|=2} f(z)\,dz=2\pi j\operatorname{Res}_{z_0=-3} f(z)=2\pi j\left(-\frac{1}{2^5}\right)=-\frac{\pi j}{16}$$