ANALÍZIS(1) — II. ZÁRTHELYI — 2006. máj. 2.

Mérnök Informatikus szak — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (18 pont)

$$f(x) = 2\pi - 2\arcsin(3-4x)$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$

b) Indokolja meg, hogy f -nek létezik az f^{-1} inverze!

c) $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$

2. feladat (17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{ch} 3x)^2, & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{\sin 5x}{2x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Hol folytonos és hol differenciálható az f függvény?

$f'(x) = ?$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$

3. feladat (20 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(-3x)}{\operatorname{arctg}(4x)} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(-3x)}{\operatorname{arctg}(4x)} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to +0} x^2 \ln \sqrt[5]{x} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(2x+5)}{\operatorname{ch}(2x-3)} = ?$

4. feladat (15 pont)

A kétszer differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ ponton és x_0 környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$x^3 + e^y - 27x + xy = -53$$

Van-e ennek a függvénynek lokális szélsőértéke az $x_0 = 3$ pontban?

5. feladat (15 pont)

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)^3}$$

a) Hol és milyen típusú szakadása van? (Számítsa ki a "féloldali" határértékeket!)

b) $f'(x) = ?$ Írja fel az $x_0 = -2$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

c) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

6. feladat (15 pont)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x-7} - 3x\right) = ?$

b) Határozza meg az $f(x) = \sqrt{9x^2+4x-7}$ függvény $+\infty$-beli egyenes aszimptotáját!

Pótfeladat (csak az elégséges vizsgához javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

Hol és milyen szakadása van az

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2\sqrt{x^2+4x+4}\,(x^2+4)}$$

függvénynek? (A megfelelő határértékek kiszámítása után válaszoljon!)

1. feladat (18 pont)

$$f(x) = 2\pi - 2\ \arcsin(3-4x)$$

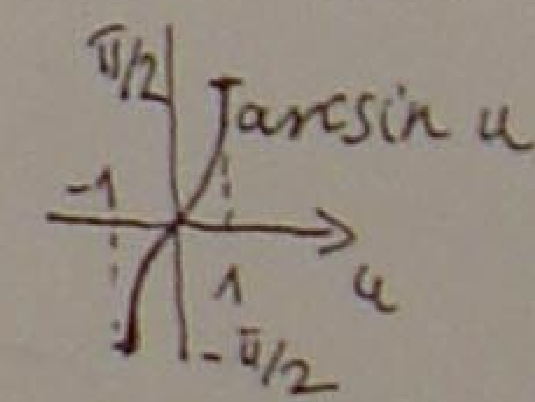
a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$.

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!

c) $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$

a.) $-1 \le 3-4x \le 1 \Rightarrow -4 \le -4x \le -2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1$, tehát $D_f = [\frac{1}{2}, 1]$ 3



$\arcsin(3-4x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $2 \arcsin(3-4x) \in [-\pi, \pi]$

$\Rightarrow R_f = [\pi, 3\pi]$ 2

$f'(x) = -2 \frac{1}{\sqrt{1-(3-4x)^2}} (-4)$; $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

3

b.) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ szig. monoton növő $\Rightarrow \exists f^{-1}$ 3

c.) $y = 2\pi - 2 \arcsin(3-4x) \Rightarrow \arcsin(3-4x) = \frac{2\pi - y}{2}$

$\Rightarrow 3 - 4x = \sin\frac{2\pi - y}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi-y}{2}$ $x \leftrightarrow y$

Tehát $f^{-1}(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi - x}{2}$ $D_{f^{-1}} = R_f = [\pi, 3\pi]$

5 2

2. feladat (17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} (\text{ch}\, 3x)^2, & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{\sin 5x}{2x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Hol folytonos és hol differenciálható az f függvény?

$f'(x) = ?$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = ?$

Ha $x \ne 0$, f folytonos, mert folytonos függvények összetétele.

$$f(-0)=f(0)=\operatorname{ch}0=1$$

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin 5x}{2x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin 5x}{5x}\,\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\neq f(-0)$$

f nem folytonos $x=0$-ban 5 $\Rightarrow$ f nem deriválható $x=0$-ban 2

Ha $x\neq 0$ $\exists\, f'(x)$:

$$f'(x)=\begin{cases}2\operatorname{ch}3x\cdot\operatorname{sh}3x\cdot 3\,, & \text{ha } x<0 \quad 3\\[2mm] \dfrac{\cos 5x\cdot 5\cdot 2x-\sin 5x\cdot 2}{(2x)^2}\,, & \text{ha } x>0 \quad 3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0}\,\underbrace{\sin 5x}_{\text{korlátos}}=0 \qquad 4$$

3. feladat (20 pont)

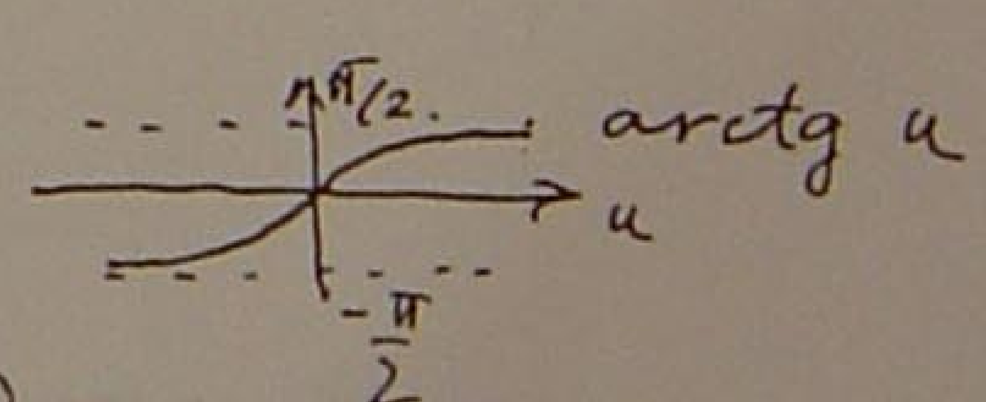
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(-3x)}{\operatorname{arctg}(4x)}=?$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(-3x)}{\operatorname{arctg}(4x)}=?$

c) $\lim\limits_{x\to+0} x^2\ln\sqrt[5]{x}=?$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sh}(2x+5)}{\operatorname{ch}(2x-3)}=?$

a.) $$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(-3x)}{\operatorname{arctg}4x}}_{\frac{0}{0}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot(-3)}{\frac{1}{1+(4x)^2}\cdot 4}=-\frac{3}{4} \qquad 5$$



b.) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(-3x)}{\operatorname{arctg}4x}=\frac{-\pi/2}{\pi/2}=-1 \qquad 3$$

c.) $$\lim_{x\to+0}\underbrace{x^2\ln\sqrt[5]{x}}_{0\cdot\infty}=\lim_{x\to+0}\underbrace{\frac{\frac{1}{5}\ln x}{\frac{1}{x^2}}}_{\frac{\infty}{\infty}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{5}\,\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}= \qquad 6$$

$$=-\frac{1}{10}\lim_{x\to+0}x^2=0$$

d.) $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x+5}-e^{-(2x+5)}}{e^{2x-3}+e^{-(2x-3)}}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}}_{=1}\,\frac{e^5-\overbrace{e^{-4x-5}}^{\to 0}}{e^{-3}+\underbrace{e^{-4x+3}}_{\to 0}}=\frac{e^5}{e^{-3}}=e^8 \qquad 6$$

4. feladat (15 pont)

A kétszer differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ ponton és x_0 környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$x^3 + e^y - 27x + xy = -53$$

Van-e ennek a függvénynek lokális szélsőértéke az $x_0 = 3$ pontban?

$27 + 1 - 81 \overset{?}{=} -53$ ✓

Mindkét oldalt deriváljuk x szerint:

$3x^2 + e^y \cdot y' - 27 + 1 \cdot y + x y' = 0$ (4) $\quad x = 3,\ y = 0$

$27 + y'(3) - 27 + 3\, y'(3) = 0 \Rightarrow y'(3) = 0$ (2) lehet lok. szé.

Újra deriválva:

$6x + e^y y' \cdot y' + e^y y'' + y' + y' + x y'' = 0$ (5) $\quad x = 3,\ y = 0,\ y' = 0$

$18 + 0 + y''(3) + 0 + 0 + 3\, y''(3) = 0$

$\Rightarrow y''(3) = -\frac{18}{4}$ (2)

$y'(3) = 0$ és $y''(3) < 0$: lok. maximum van $x = 3$-ban. (2

5. feladat (15 pont)

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)^3}$$

a) Hol és milyen típusú szakadása van? (Számítsa ki a "féloldali" határértékeket!)
b) $f'(x) = ?$ Írja fel az $x_0 = -2$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!
c) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

a.) Szakadási pont : $x = -3$

$\lim_{x \to -3 \pm 0} \frac{\overbrace{x-1}^{\to -4}}{\underbrace{(x+3)^3}_{\to \pm 0}} = \mp\infty$: másodfajú szakadása van (3)

b.) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x+3)^3 - (x-1)\, 3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-2x+6}{(x+3)^4}$; $x \neq -3$ (3)

Érintő: $y_e = f(-2) + f'(-2)\,(x-(-2)) = -3 + 10\,(x+2)$ (4)

c.) Ha $x > 3$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ szigorúan monoton csökken $(3, \infty)$-en. (2)

Ha $x<3$, de $x \neq -3$: $f'(x)>0 \Rightarrow f$ szigorúan monoton nő $(-\infty,-3)$-on és $(-3,3)$-on. 3

6. feladat (15 pont)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x-7} - 3x\right) = ?$

b) Határozza meg az $f(x) = \sqrt{9x^2+4x-7}$ függvény $+\infty$-beli egyenes aszimptotáját!

a.) $$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(\sqrt{9x^2+4x-7} - 3x\right)}_{\infty-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4x-7}+3x}{\sqrt{9x^2+4x-7}+3x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+4x-7-9x^2}{\sqrt{9x^2+4x-7}+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}\,\frac{4-\frac{7}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}+3} = \frac{4}{3+3} = \frac{2}{3}$$

8

b.) $g_a(x) = Ax+B$

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad B = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax\right)$$ 2

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4x-7}}{x} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2}}{x}}_{=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1} \sqrt{9+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}} = 3$$ 3

$$B = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x-7} - 3x\right) = \frac{2}{3}$$ (a)-ban ezt számoltuk)

Tehát $g_a(x) = 3x + \frac{2}{3}$ 2