SZABTECH 5. GYAKORLAT
ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEINEK
KIDOLGOZÁSA

① Irányíthatóság: ① Legyen a rendszer a τ időpontban egy x_τ állapotban. A (τ, x_τ) páros nullába irányítható, ha létezik olyan véges $T \geq \tau$ idő és egy $u: [\tau, T) \mapsto \mathbb{R}^m$ irányítás, hogy azt alkalmazva $x(T) = 0$.

② A rendszer a τ időponttól teljesen nullába irányítható, ha minden $x_\tau \in \mathbb{R}^n$-re a (τ, x_τ) páros nullába irányítható!

③ A rendszer teljesen nullába irányítható, ha minden τ időponttól teljesen nullába irányítható.

Elérhetőség: ① Legyen a rendszer a τ időpontban az állapottér origójában. Egy x_1 állapot elérhető, ha létezik olyan véges $T \geq \tau$ idő és egy $u: [\tau, T) \mapsto \mathbb{R}^m$ irányítás, hogy azt alkalmazva $x(T) = x_1$.

② A rendszer τ időponttól teljesen elérhető, ha a τ időponttól minden $x_1 \in \mathbb{R}^n$ elérhető.

③ A rendszer teljesen elérhető, ha minden τ időponttól minden $x_1 \in \mathbb{R}^n$ elérhető.

② Időben változó (LTV): Gram-mátrix (irányíthatósági)

$$P(\tau, t) = \int_\tau^t \Phi(\tau, \theta) \cdot B(\theta) \cdot B^T(\theta) \cdot \Phi^T(\tau, \vartheta) \, d\vartheta$$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\text{range}(P)}_{\text{Irányítható állapotok}} + \underbrace{\text{kernel}(P)}_{\text{Nem irányítható állapotok}}$$

Időinvariáns (LTI): Gram-mátrix (irányíthatósági)

$$P(0,t) = \int_0^t \Phi(0,\vartheta) B \cdot B^T \cdot \Phi^T(0,\vartheta) \, d\vartheta = \int_0^t e^{-A\vartheta} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{-A^T\vartheta} d\vartheta$$

$$\text{range}\, P(0,t) = \text{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1} \cdot B\}$$ ← Csak LTI esetben!

③ Irányíthatósági mátrix: $M_c = \left[B \; , \; AB \; , \; A^2 B \; , \; \ldots , \; A^{n-1} \cdot B \right]$

Irányítható állapotok altere: $L = \text{range}\, P(0,t) = \text{Span}\, \{ B, AB, \ldots, A^{n-1} \cdot B \}$

Teljes irányíthatóság feltétele: M_c maximális rangú, azaz $M_c = n = \dim\{x\}$

④ Szakasz állapotteres leírása:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

A pólusok a karakterisztikus egyenletből adódnak ($\varphi(s) = 0$)

$\det(sI - A) = \varphi(s)$ ← karakterisztikus polinom gyökei a pólusok

Ha a zárt körben előre meghatározott pólusokat szeretnénk. Ezek legyenek $\varphi_c(s)$ gyökei.
Ekkor csatoljuk vissza negatívan az állapotokat a bemenetre, azaz $u = -K \cdot x$ legyen.
Ekkor $\varphi_c(s) = \det\left(sI - (A - BK)\right)$

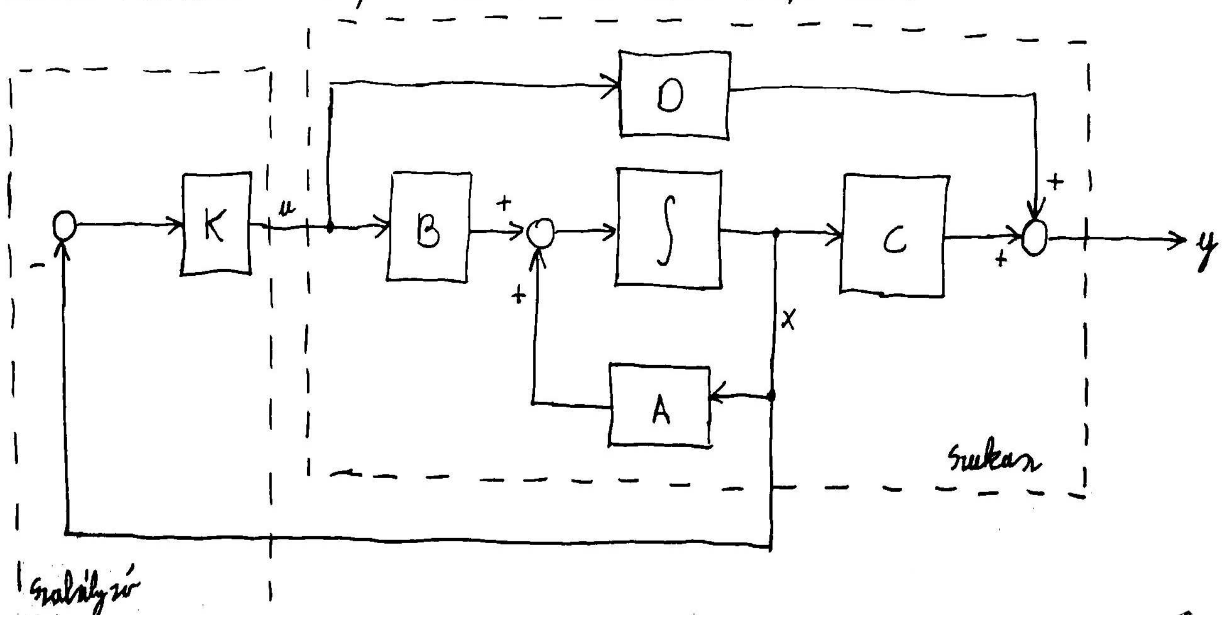
$$\dot{x} = Ax + B \cdot (-K \cdot x)$$
$$\dot{x} = \underbrace{(A - BK)}_{\text{Ez lesz a módosult rendszermátrix}} \cdot x$$

A kívánt sajátértékekhez tartozó K erősítésvektor meghatározható az Ackermann képlettel:

$$[\underbrace{0 \;\; 0 \; \ldots \; 0}_{n-1 \text{ db nulla}} \;\; 1] \cdot M_c^{-1} \cdot \varphi_c(A) = K$$

← sorvektor

A zárt rendszer hatásvázlata állapot-visszacsatolás és mérhető állapot esetén:



⑤ <u>Irányíthatósági lépcsős alak</u>: Az LTI rendszerek állapotegyenletének van olyan $\mathbb{R}^n = L + L^\perp$, $x = x_a + x_b$ ($x_a \in L$ és $x_b \in L^\perp$) felbontása, amelyben az állapotegyenlet alakja úgynevezett irányíthatósági lépcsős alakú:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

ahol az L-beli állapotok teljesen a nulla állapotba irányíthatóak, az $L^\perp$-beli állapotok pedig (a nulla állapot kivételével) nem irányíthatóak nullába.

Az időinvariáns rendszert <u>stabilizálhatónak</u> nevezzük, ha a nem irányítható (A_{bb}-hez tartozó) sajátértékek stabilisak!

⑥ <u>Alapjel miatti korrekció</u>: SISO esetben: N_x – n elemű oszlopvektor
N_u – skalár

Végértékekre felírt egyenletek:

$\dot{x}_\infty = 0$

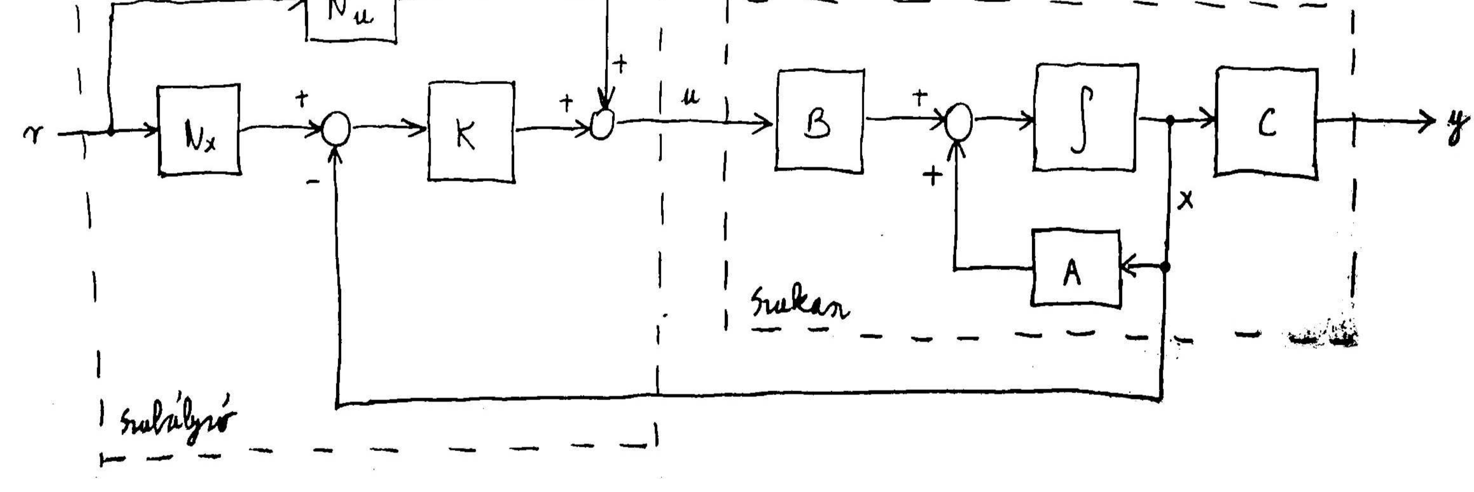
$$\left.\begin{aligned} 0 &= A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \\ 1 &= C \cdot x_\infty \end{aligned}\right\} \leftarrow \begin{aligned} N_x \cdot r_\infty &= x_\infty \quad \Rightarrow \quad x_\infty = N_x \\ u_\infty &= N_u \cdot r_\infty \quad \Rightarrow \quad u_\infty = N_u \end{aligned}$$

$y_\infty = r_\infty = 1$ legyen $D = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & \emptyset \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & \emptyset \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Hatásvázlat</u>:



(7) Megfigyelhetőség: (1) Egy (τ, x_1) pár nem megfigyelhető, ha létezik egy olyan (τ, x_2) pár, melyre $x_1 \neq x_2$ és azonos megfigyelhetőségi osztályba tartoznak.

(2) Az FI, LTV rendszer a τ időpillanatban megfigyelhető, ha $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén a (τ, x) pár megfigyelhető.

(3) Az FI, LTV rendszer teljesen megfigyelhető, ha $\forall \tau$ időpillanatban megfigyelhető.

Rekonstruálhatóság: (1) Egy (τ, x_1) pár nem rekonstruálható, ha létezik egy olyan (τ, x_2) pár, melyre $x_1 \neq x_2$ és azonos rekonstruálhatósági osztályba tartoznak.

(2) Az FI, LTV rendszer a τ időpillanatban rekonstruálható, ha $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén a (τ, x) pár rekonstruálható.

(3) Az FI, LTV rendszer teljesen rekonstruálható, ha $\forall \tau$ időpillanatban rekonstruálható.

Megfigyelhetőség $\rightarrow$ $x(\tau) = x$ meghatározható τ-hoz képest jövőbeli $y(\vartheta)$, $u(\vartheta)$ megfigyelésekből.
Rekonstruálhatóság $\rightarrow$ $x(\tau) = x$ meghatározható τ-hoz képest múltbeli $y(\vartheta)$, $u(\vartheta)$ megfigyelésekből.

(8) Időben változó (LTV): megfigyelhetőségi Gram-mátrix

$$Q(\tau, t) = \int_{\tau}^{t} \Phi^T(\vartheta, \tau) C^T(\vartheta) C(\vartheta) \Phi(\vartheta, \tau) \, d\vartheta$$

Időinvariáns (LTI): megfigyelhetőségi Gram-mátrix:

$$Q(0, t) = \int_0^t e^{A^T \vartheta} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{A\vartheta} \, d\vartheta$$

Tekintsünk egy $(A, C)_I$ valódi rendszert és a $(-A^T, -C^T)_{II}$ fiktív rendszert. Ekkor fennáll, hogy:

$P_{II}(\tau, t) = Q_I(\tau, t)$ $\leftarrow$ megfigyelhetőség és irányíthatóság dualitása

(9) Megfigyelhetőségi mátrix: $M_0 = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$

A rendszer, akkor és csak akkor megfigyelhető, ha $\operatorname{rank} M_0 = n = \dim x$ $\leftarrow$ csak LTI esetben

Megfigyelhetőségi lépcsős alak:

A folytonos idejű időinvariáns lineáris rendszer állapotegyenletének van olyan $\mathbb{R}^n = L + L^{\perp}$, $x = x_a + x_b$ $(x_a \in L$ és $x_b \in L^{\perp})$ felbontása, amelyben az állapotegyenletek alakja úgynevezett megfigyelhetőségi lépcsős alakú.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

ahol az L-beli állapotok teljesen megfigyelhetőek, az $L^{\perp}$-beli állapotok pedig a nulla állapot kivételével nem megfigyelhetőek.

Az időinvariáns lineáris rendszert <u>detektálhatónak</u> nevezzük, ha a nem megfigyelhető, a megfigyelhetőségi lépcsős alakban A_{bb}-hez tartozó sajátértékek stabilak.

(10) <u>A folytonosidejű teljesrendű lineáris állapotmegfigyelő alakja</u>:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F \cdot \hat{x} + G \cdot y + H \cdot u \quad , \text{ahol} \quad \dim \hat{x} = \dim x = n$$

$F = A - G \cdot C$ (Ackermann képlettel) $\qquad H = B \qquad \dot{\tilde{x}} = F \cdot \tilde{x}$ [stabil és gyors is kell hogy legyen!]

(11) Az állapotmegfigyelő tranzienseinek gyorsaságát F sajátértékeivel adhatjuk meg.
(Ez ekvivalens F karakterisztikus polinomjának az előírásával)

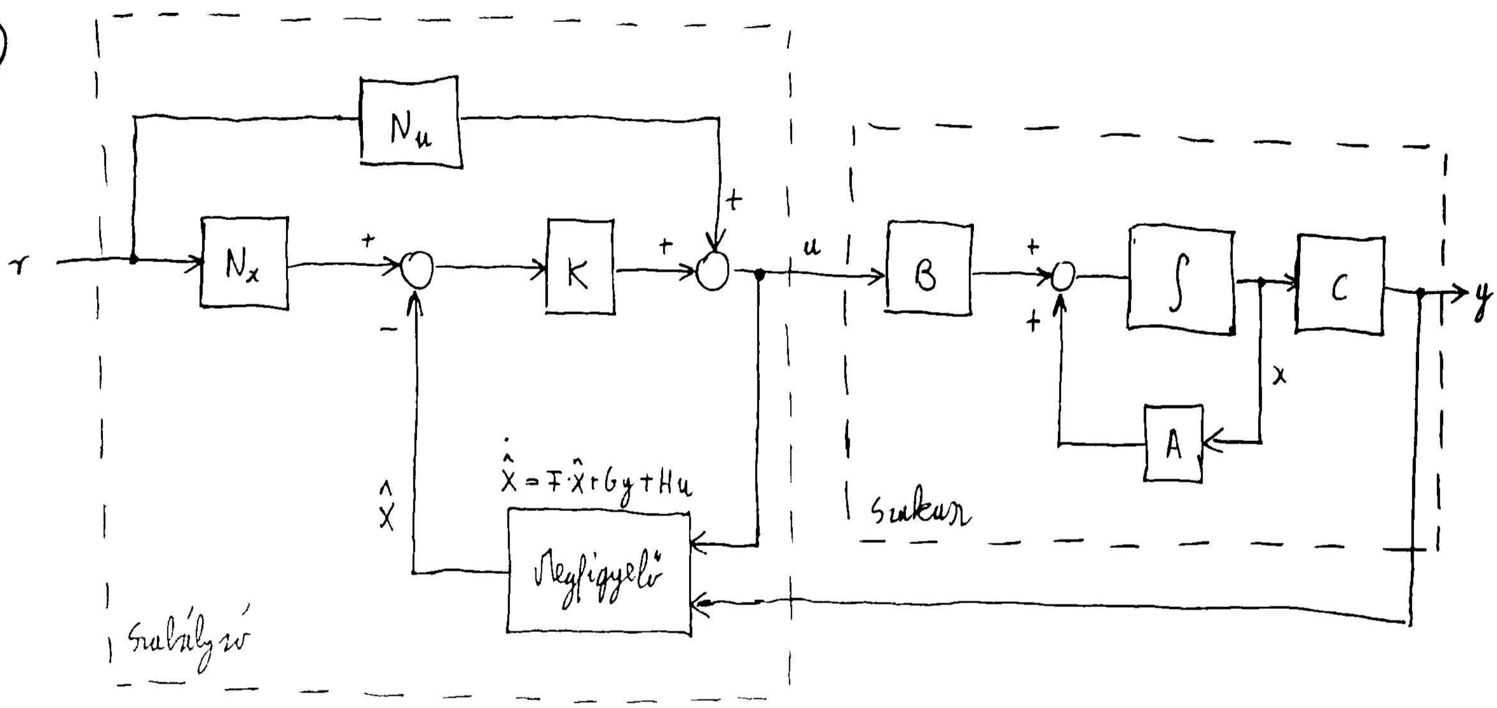
$$\varphi_0(s) = \det(sI - F) = \det(sI - (A - GC)) \underset{\text{Dualitás}}{=} \det(sI - (A^T - C^T G^T))$$

Az állapotmegfigyelő tervezését így visszavezetjük egy $K_{II} = G^T$ állapot-visszacsatolás megtervezésére a $(A^T, C^T)_{II}$ fiktív rendszer számára. ← Ez már Ackermann képlettel számolható!

$$(A, C)_I \underset{\text{Dualitás}}{\longleftrightarrow} (A^T, C^T)_{II} \xrightarrow[\Pi_{cII}]{\varphi_0(s)} K_{II} \rightarrow G = K_{II}^T \rightarrow \boxed{F = A - GC}, \ \boxed{H = B}$$

Ackermann-képlet

(12)



(13) Cél: – Zavarelnyomás
– Paraméterbizonytalanságok kiküszöbölése

A kimenet integrálját új állapotként felvesszük: $x_i = \int_0^t y(\tau)\, d\tau = \int_0^t C\cdot x(\tau)\, d\tau \Rightarrow \boxed{\dot{x}_i = Cx}$

Bővített állapotegyenlet:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \phi \\ C & \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \phi \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

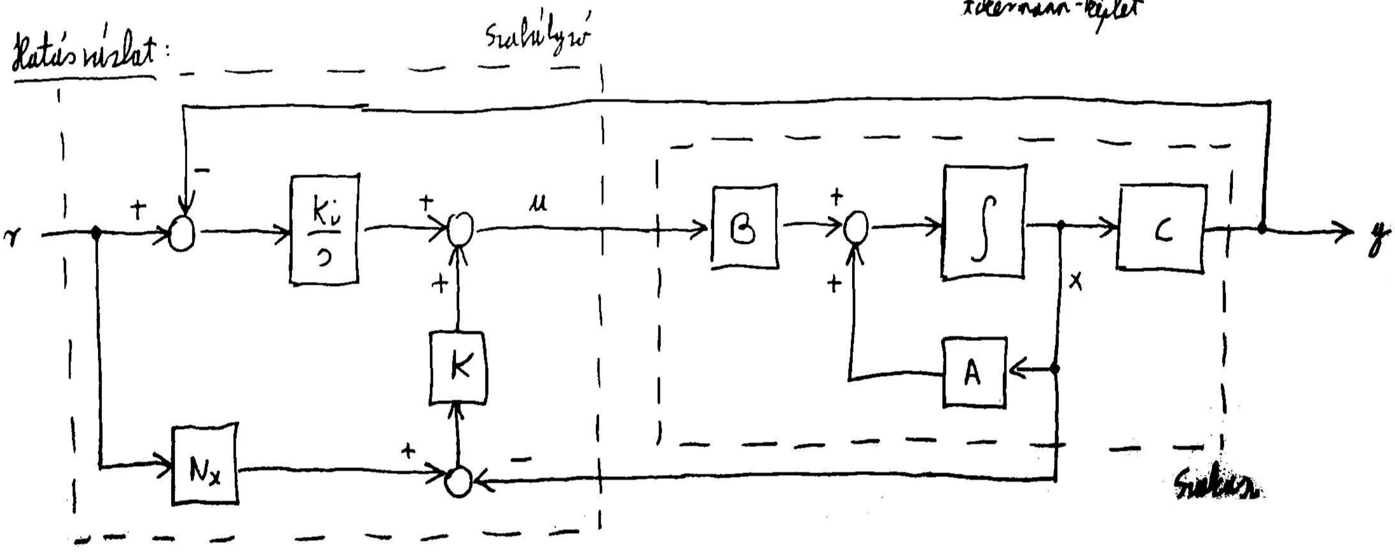
új jelölés $\Rightarrow$ $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\cdot u$

Ehhez legyen az állapotvisszacsatolás:

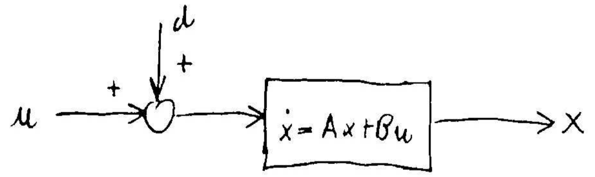
$$u = -\tilde{K}\cdot\tilde{x} = -\begin{bmatrix} K & K_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \Rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}) \xrightarrow[\tilde{\Pi}_c]{\tilde{\varphi}_c(s)} \tilde{K} = \begin{bmatrix} K & K_i \end{bmatrix}$$

Ackermann-képlet

Hatásvázlat:



(14) Zavarás figyelembevétele:



$\Longrightarrow$ Bővített állapotegyenlet: $\dot{x} = Ax + B(u+d)$

új állapotváltozó $x_d = d$
(általában szakaszonként konstans)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \phi & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \phi \end{bmatrix} \cdot u \quad \xRightarrow{\text{új jelölés}} \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix}$$

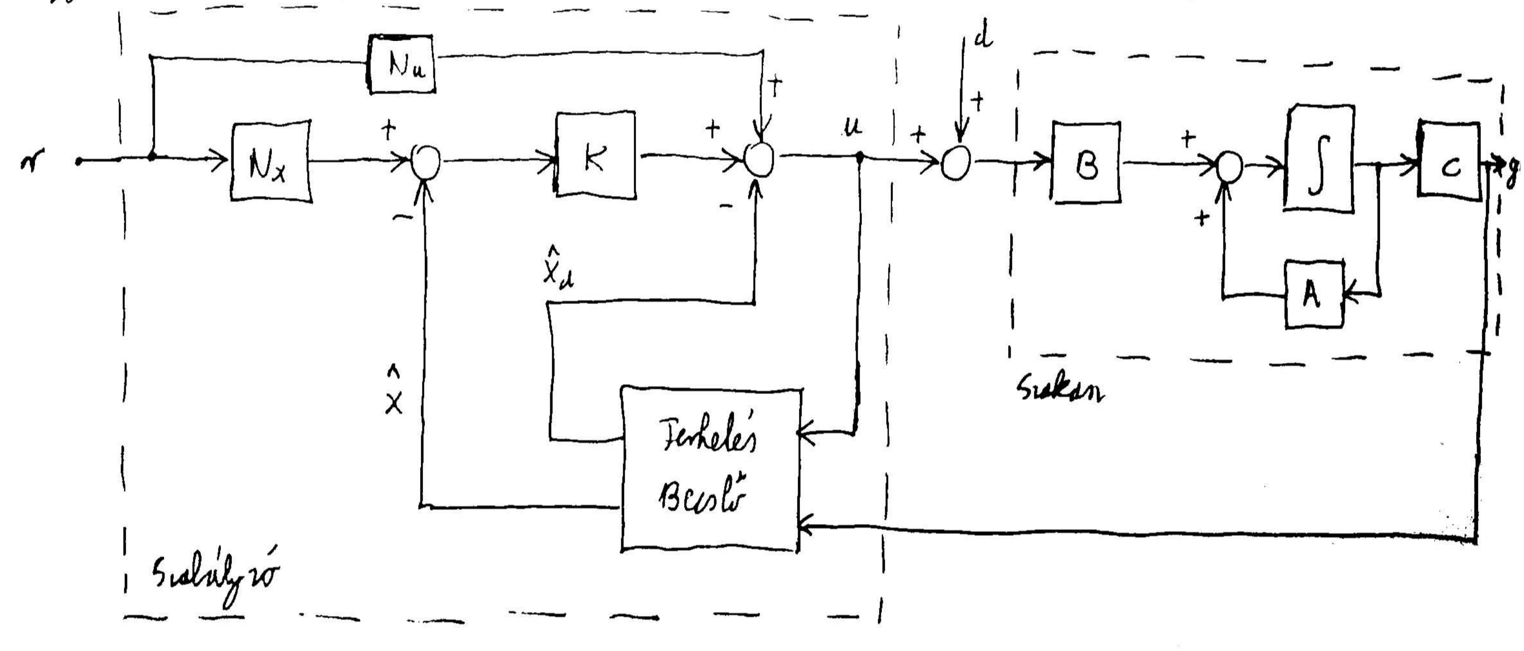
Az állapot visszacsatolást az eredeti (A, B, C) rendszerre kell megtervezni, míg az állapotmegfigyelőt az $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ rendszerre! N_x és N_u értékét szintén az eredeti rendszerre tervezzük!

$$(\tilde{A}, \tilde{C})_{I} \underset{\text{Dualitás}}{\longrightarrow} (\tilde{A}^T, \tilde{C}^T)_{II} \xrightarrow[\text{Ackermann-képlet}]{\hat{\varphi}_o(s)} K_{II} = \tilde{G}^T \longrightarrow \tilde{F} = \tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C}$$

$$\searrow \quad \tilde{H} = \tilde{B}$$

Az állapotmegfigyelő diffegyenlete: $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}_d \end{pmatrix} = \tilde{F} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} + \tilde{G}y + \tilde{H}u$

(15) Ugyanaz a tervezés lépései, mint felül, csak +ban ki kell számolni N_x és N_u értékeket!



(16) LTI rendszer Kálmán-féle felbontása

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{AA} & 0 & A_{AC} & 0 \\ A_{BA} & A_{BB} & A_{BC} & A_{BD} \\ 0 & 0 & A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 & A_{DC} & A_{DD} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_A \\ B_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_A & 0 & C_C & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix}$$

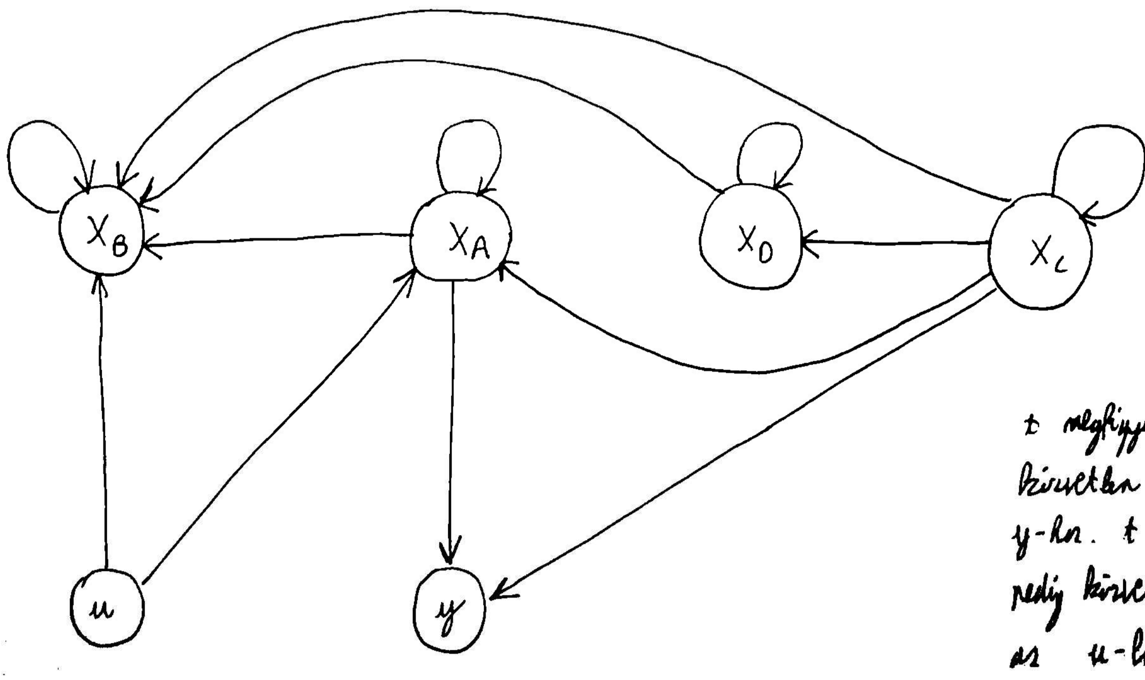
$x_A \rightarrow$ Irányítható és megfigyelhető

$x_B \rightarrow$ Irányítható, de nem megfigyelhető

$x_C \rightarrow$ Nem irányítható, de megfigyelhető

$x_D \rightarrow$ Nem irányítható és nem megfigyelhető

$W(s) = C_A \cdot (sI - A_{AA})^{-1} \cdot B_A$ $\leftarrow$ Az átviteli függvényt csak az irányítható és megfigyelhető alrendszer befolyásolja. A többi alrendszer pólus-zérus kiejtést eredményez.



A megfigyelhető állapotokból közvetlen nyíl mutat az y-ra. Az irányítható állapotokba pedig közvetlen nyíl mutat az u-ból.