Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok
2003. május 15.

1. Milyen maradékot adhat egy szám 101-gyel osztva, ha az 59-szerese 1 maradékot ad 101-gyel osztva?

2. Milyen maradékot ad 59^{99} 101-gyel osztva?

3. Oldjuk meg a

$$\varphi(5n) + \varphi(3n) = 7\varphi(n)$$

egyenletet (vagyis határozzuk meg az összes olyan n pozitív egészt, amelyre az egyenlet fennáll)!

4. A H halmaz álljon az összes olyan rendezett számpárból, amelynek az első tagja egész szám, a második tagja 0 vagy 1. (Azaz: $H = \{(a,b)|a \in \mathbb{Z}, b \in \{0,1\}\}$.) Értelmezzük H-n a $\oplus$ műveletet a következőképpen:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, (b_1 + b_2) \bmod 2).$$

(Azaz: a számpárokat tagonként összeadjuk és az eredmény második tagjának 2-es maradékát vesszük. Például: $(7,1) \oplus (12,1) = (19,0)$.)

a) Bizonyítsuk be, hogy H csoportot alkot a $\oplus$ műveletre nézve!

b) Milyen rendű elemek fordulnak elő H-ban?

5. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

elem rendjét az S_8 szimmetrikus csoportban!

6. A 100 rendű G csoportban létezik egy olyan $g \in G$ elem, amelyre $g^{20} \neq e$ és $g^{50} \neq e$ (ahol e a csoport egységelemét jelöli). Bizonyítsuk be, hogy G Abel-csoport!

7. Legföljebb hány élet lehet elhagyni a 10 csúcsú teljes gráfból úgy, hogy a maradék gráf 4-szeresen élösszefüggő legyen?

8. Legyen G egy $n \geq 2$ csúcsú (irányítatlan) gráf és G szomszédossági mátrixát jelölje A. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor összefüggő, ha az $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ mátrix minden eleme pozitív!