

1. feladat (10+10=20 pont)

- a) Ismertesse, és igazolja a konvergencia szorzatának határértékének szülő tételét!
b) Határozza meg az $\sqrt[n]{n \cdot 2^n + 5^n}$ sorozat határértékét!

Mo. a) Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$ **(2p)**, mert ha (a_n) konvergens, akkor korlátos, így létezik olyan $K > 0$, melyre $|a_n| < K$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén **(2p)**. Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $B = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $|a_n b_n| < K |b_n| < \varepsilon$, ha $|b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. **(2p)** Ha $B \neq 0$, akkor

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq K |b_n - B| + |B| |a_n - A|.$$

Létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N_1$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$, és létezik olyan

$N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N_2$ esetén $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K}$, vagyis $n \geq N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2)$ esetén $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$. **(4p)**

b) A rendőrelv miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot 2^n + 5^n} = 5$ **(2p)**, mert

$$5 \stackrel{(2p)}{\leftarrow} 5 \sqrt[n]{n} \stackrel{(2p)}{\leq} \sqrt[n]{n \cdot 2^n + 5^n} \stackrel{(2p)}{\leq} \sqrt[n]{2n5^n} \stackrel{(2p)}{\rightarrow} 5$$

2. feladat (4+10=14 pont)

- a) Definiálja egy sorozat torlódási pontjait!
b) Adja meg az $a_n = \left(\frac{n - (-1)^n}{n + 2} \right)^{n-2}$ sorozat torlódásai pontjainak halmazát, limesz superiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergencia-e a sorozat?

Mo. a) Az $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ az (a_n) sorozat torlódási pontja, ha létezik olyan (a_{n_k}) részsorozat, amelyre $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. **(4p)** (Vagy: ha A minden környezetébe végtelen sok sorozatelem esik.)

b) Páratlan n esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n-2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{-2} \rightarrow \frac{1}{e}, \quad \mathbf{(3p)}$$

páros n esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n-2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{-2} \rightarrow \frac{1}{e^3}, \quad \mathbf{(3p)}$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{ \frac{1}{e}, \frac{1}{e^3} \right\}$ **(1p)**, $\limsup a_n = \frac{1}{e}$ **(1p)**,

$\liminf a_n = \frac{1}{e^3}$ **(1p)**, és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens **(1p)**.

3. feladat (4+8=12 pont)

a) Ismertesse a L'Hospital-szabályt!

b) Számolja ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4) - \operatorname{sh}(x^2 - 2x)}{\operatorname{arctg}(x - 2)}$ határértéket!

Mo. a) Ha f és g differenciálható x_0 egy kipontozott környezetében, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, vagy $\left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right| = \infty$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, amennyiben a jobb oldali határérték létezik. **(4p)**

b) A számláló és a nevező határértéke egyaránt 0, így alkalmazható a l'Hospital-szabály. **(2p)**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4) - \operatorname{sh}(x^2 - 2x)}{\operatorname{arctg}(x - 2)} \stackrel{\text{(4p)}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x \cos(x^2 - 4) - (2x - 2) \operatorname{ch}(x^2 - 2x)}{1} \stackrel{\text{(2p)}}{=} 2$$
$$\frac{1}{1 + (x - 2)^2}$$

4. feladat (4+14=18 pont)

a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy (a, b) intervallumon differenciálható függvénynek az $x_0 \in (a, b)$ pontban lokális szélsőértékhelye van!

b) $f(x) = 2x + \arccos(x + 1)$

Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az f függvény monoton! Hol és milyen típusú lokális szélsőértékhelyei vannak a függvénynek?

Mo. a) $f'(x_0) = 0$, és f' az x_0 pontban előjelet vált, vagy $f''(x_0) \neq 0$ **(4p)**.

b) $D_f = [-2, 0]$ **(2p)**, és $f'(x) = 2 + \frac{-1}{\sqrt{1 - (x + 1)^2}} = 0$ **(2p)** ha $(x + 1)^2 = \frac{3}{4}$

(2p), vagyis ha $x = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $x = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(2p)**, a f' pedig két érték között pozitív, az értelmezési tartomány többi pontjában pedig negatív **(2p)**, így

a függvény a $\left(-2, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és a $\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ intervallumon monoton fogy

(1p), a $\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ intervallumon monoton nő **(1p)**, az $x = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

pontban lokális minimuma **(1p)**, az $x = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ pontban pedig lokális maximuma **(1p)** van.

5. feladat (4+9=13 pont)*

a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozatlan integrálra!

b) Határozza meg $f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x - 1} + 3}$ primitív függvényét a $t = \sqrt{x - 1}$ helyettesítéssel!

Mo. a) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$ (4p) (φ egy intervallumon deriválható és invertálható függvény.)

b) Ha $t = \sqrt{x-1}$, akkor $x = t^2 + 1 = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = 2t$ (2p), így

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}+3} dx &\stackrel{(1p)}{=} \int \frac{t^2+3}{t+3} \cdot 2t dt \stackrel{(1p)}{=} 2 \int \frac{t^3+3t}{t+3} dt \stackrel{(2p)}{=} \\ &= 2 \int t^2 - 3t + 12 - \frac{36}{t+3} dt \stackrel{(2p)}{=} \frac{2t^3}{3} - 3t^2 + 24t - 72 \ln|t+3| + c \stackrel{(1p)}{=} \\ &= \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} - 3(x-1) + 24\sqrt{x-1} - 72 \ln(\sqrt{x-1}+3) + c \end{aligned}$$

6. feladat (4+9=13 pont)*

a) Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát!

b) Számolja ki az alábbi integrált

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{\cos^3 x} dx.$$

Mo. a) Ha $f \in R[a, b]$, és $\exists F$, melyre $F' = f$ az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\int_a^b f(x)dx =$

$$F(b) - F(a) \text{ (4p)}$$

b) $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{\cos^3 x} dx \stackrel{(3p)}{=} -3 \int (\cos x)' (\cos x)^{-3} dx + 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \stackrel{(3p)}{=} \frac{3}{2 \cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x + c,$
vagyis

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{\cos^3 x} dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{3}{2 \cos^2 \pi/3} + 2 \operatorname{tg} \pi/3 - \frac{3}{2 \cos^2(-\pi/4)} - 2 \operatorname{tg}(-\pi/4) \stackrel{(1p)}{=} 6 + 2\sqrt{3} - 3 + 2.$$

7. feladat (10 pont)*

Konvergens-e az alábbi improprius integrál? Ha igen, adja meg az értékét!

$$\int_0^{\infty} (2x+1)e^{-4x+3} dx$$

Mo. Parciális integrálással

$$\int (2x+1)e^{-4x+3} dx = -\frac{(2x+1)e^{-4x+3}}{4} + \frac{1}{2} \int e^{-4x+3} dx = -\frac{(4x+3)e^{-4x+3}}{8} + c \quad (4p),$$

$$\int_0^{\infty} (2x+1)e^{-4x+3} dx = -\left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{(4\omega+3)e^{-4\omega+3}}{8}\right) + \frac{3e^3}{8} = \frac{3e^3}{8}, \quad (4p),$$

mert

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{(4\omega+3)e^{-4\omega+3}}{8} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{(4\omega+3)}{8e^{4\omega-3}} = 0, \quad (2p)$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

5 liter olajat olyan flakonba csomagolnak, amelyik egy félgömbből és egy hengerből áll. A henger a félgömbhöz az alapkör lap mentén csatlakozik. Hogy kellene megadni a henger alapkörének (és egyben a félgömbnek) a sugarát, hogy a lehető legkevesebb műanyagot használjanak? (Igazolja azt is, hogy valóban minimumról van szó!)

Mo. A flakon felszínét kell minimalizálni, úgy, hogy a térfogata 5 dm^3 legyen, vagyis $r(\text{dm})$ sugár, és a henger $m(\text{dm})$ magassága esetén: $5 = \frac{2}{3}\pi r^3 + mr^2\pi$ (2p), amiből $m = \frac{5}{r^2\pi} - \frac{2r}{3}$ (2p). A flakon felszíne:

$$A(r) = r^2\pi + 2r^2\pi + 2r\pi m = 3r^2\pi + \frac{10}{r} - \frac{4r^2\pi}{3} = 5\left(\frac{r^2\pi}{3} + \frac{2}{r}\right). \quad (3p)$$

$A'(r) = 5\left(\frac{2r\pi}{3} - \frac{2}{r^2}\right) = 0$ (2p) ha $r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ (2p), és $A''\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\right) = 10\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\right) > 0$ (2p), vagyis itt az A függvénynek valóban minimuma van (1p).