Villamosmérnök A3 (2015 ősz) 2. ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Folytonos-e a 0-ban az $f(0) = 0$, $f(z) = \frac{(\text{Re}(z^2))^2}{|z^2|}$ (ha $z \neq 0$) függvény?

2. Hol deriválható az $f(z) = e^z|z|^2$ komplex függvény?

3. Legyen G a $[0,1]$ intervallumra megszorított $\arcsin x$ függvény grafikonja (0-tól távolodóan irányítva). Adja meg $\int_G e^z\, dz$ értékét algebrai alakban!

4. Írja fel $\frac{1}{1-z}$ összes 0 körüli Laurent-sorát, és adja meg a tartományokat ahol ezek előállítják a függvényt!

5. $\int_K \frac{\cos(\ln z)}{z^2-3z+2}\, dz =?$ ha K az 1 középpontú, 1/2 sugarú pozitívan irányított körvonal.

Villamosmérnök A3 (2015 ősz) — 2. ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Folytonos-e a 0-ban az $f(0) = 0$, $f(z) = \frac{(\mathrm{Re}(z^2))^2}{|z^2|}$ (ha $z \neq 0$) függvény?

Megoldás. $f(z) = g^2(z)$, ahol $g(0) = 0$ és $g(z) = \frac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|} = \mathrm{Re}(\frac{z^2}{|z|})$ ha $z \neq 0$, ezért f folytonos 0-ban ha g az. De $|\frac{z^2}{|z|}| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \to 0$ ha $z \to 0$, ezért $\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{|z|} = 0$, amiből $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \mathrm{Re}(\frac{z^2}{|z|}) = 0 = g(0)$, azaz g folytonos 0-ban. (Vagy: $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ miatt $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$-t így is be lehet látni: $|g(z)| = |z|\frac{|\mathrm{Re}(z^2)|}{|z^2|} \leq |z|\frac{|z^2|}{|z^2|} = |z| \to 0$ ha $z \to 0$.)

2. Hol deriválható az $f(z) = e^z|z|^2$ komplex függvény?

Megoldás. 0-n kívül nem mert ha az volna, akkor $z \mapsto \bar{z} = \frac{f(z)}{e^z z}$, lévén két deriválható függvény hányadosa, deriválható volna. 0-ban viszont igen, mert $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z}|z|^2 = 1 \cdot 0 = 0$.

Vagy:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x(x^2+y^2)\cos y & v(x,y) &= e^x(x^2+y^2)\sin y \\ u_x(x,y) &= (x^2+y^2+2x)e^x\cos y & u_y(x,y) &= e^x(-(x^2+y^2)\sin y + 2y\cos y) \\ v_x(x,y) &= (x^2+y^2+2x)e^x\sin y & v_y(x,y) &= e^x((x^2+y^2)\cos y + 2y\sin y) \end{aligned}$$

miatt a Cauchy-Riemann egyenletek

$$x\cos y = y\sin y \quad \text{és} \quad y\cos y = -x\sin y,$$

amikből (az egyenleteket x-szel és y-nal szorozva és egymáshoz adva/egymásból kivonva)

$$(x^2+y^2)\sin y = 0 \quad \text{és} \quad (x^2+y^2)\cos y = 0,$$

azaz $x = y = 0$. Vagyis csak 0-ban teljesülhetnek, és ott triviálisan teljesülnek is, amiből a parciálisok folytonossága miatt következik is f 0-beli deriválhatósága.

3. Legyen G a $[0,1]$ intervallumra megszorított $\arcsin x$ függvény grafikonja (0-tól távolodóan irányítva). Adja meg $\int_G e^z\, dz$ értékét algebrai alakban!

Megoldás. Newton-Leibniz miatt $\int_G e^z\, dz = e^{z(1)} - e^{z(0)} = e^{1+j\pi/2} - e^0 = e(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) - 1 = -1 + ej$, ahol $z(t) = t + j\arcsin t$.

4. Írja fel $\frac{1}{1-z}$ összes 0 körüli Laurent-sorát, és adja meg a tartományokat ahol ezek előállítják a függvényt!

Megoldás. $|z| < 1$-en $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$; $|z| > 1$-en $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -z^n$.

5. $\int_K \frac{\cos(\ln z)}{z^2-3z+2}\, dz = ?$ ha K 1 középpontú, 1/2 sugarú pozitívan irányított körvonal.

Megoldás. Mivel $\frac{\cos(\ln z)}{z-2}$ reguláris az 1 középpontú, 1/2 sugarú körlapon

$$\int_K \frac{\cos(\ln z)}{z^2-4z+3}\, dz = \int_K \frac{\frac{\cos(\ln z)}{z-2}}{z-1}\, dz = 2\pi j \frac{\cos(\ln z)}{z-2}\Big|_{z=1} = -2\pi j$$

a Cauchy integrálformula miatt.