I./a Bevezető

Axiómák:

(A) Archimédesz-féle: minden természetes számnál van nagyobb.
(A) Cantor-féle: In = {x: $a_n \le x \le b_n$} és $a_k \le a_{k+1}$ és $b_{k+1} \le b_k$. Ekkor az egymásba skatulyázott zárt interval.sorozat elemeinek metszete *nem üres*!

Fogalmak:

(D) Korlátosság: H felülről / alulról **korlátos**, ha minden eleme kisebb / nagyobb egy fix számnál. H korlátos, ha mindkét irányból korlátos.
(D) Szuprémum (felső *határ*): H legkisebb felső korlátja (sup*H*).
(D) Infimum (alsó *határ*): H legnagyobb alsó korlátja (inf*H*).
(D) Dedekind folytonossági tétel: Felülről (alulról) korlátos nem üres számhalmaznak mindig van felső (alsó) határa.

I./b Számsorozatok

(D) Számsorozat: A természetes számokon értelmezett valós értékű függvény *(N → R)*. Jelölése: (a_n) vagy <a_n>
(D) <u>Sorozat konvergenciája</u>: a_n konvergens és határértéke (limesze) A (lim a_n = *A*), ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N(\varepsilon)$ küszöbszám, amire $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$
(M1) A definícióval ekvivalens, hogy az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumban végtelen sok elem van, és rajta kívül véges sok.
(M2) A határérték egyértelmű.
(D) Sorozat divergenciája: a *nem konvergens* sorozatok a divergens sorozatok.
(P) Végtelenhez divergáló: minden P > 0-hoz létezik N(P), hogy $a_n > P$, ha n > P(n)
(T) <u>Konvergencia szükséges feltétele</u>: a_n konvergens ⇒ a_n korlátos. (Tehát ha nem korlátos, nem is konvergens!)
(B) $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$-n kívül csak véges sok elem eshet (konvergens), alsó / felső korlát ezek közül a legkisebb / legnagyobb → korlátos.
(M) Visszafelé nem igaz!

Műveletek sorozatokkal:
(T_1) ($a_n \to A$) és ($b_n \to B$) ⇒ ($a_n + b_n \to A + B$)
(B) $N_{1,2}(\varepsilon/2)$. $||a_n + b_n| - |A + B|| \le |a_n - A| + |b_n - B| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.
(T_2) ($a_n \to A$) ⇒ ($ca_n \to cA$)
(B) $N_1(\varepsilon/c)$.
(T_3/i) ($a_n \to 0$) és ($b_n \to 0$) ⇒ ($a_n + b_n \to 0$)
(T_3/ii) ($a_n \to A$) és ($b_n \to B$) ⇒ ($a_nb_n \to AB$)
(B/i) $N_1(\varepsilon/2)$, $N_2(2)$
(B/ii) Az előzőt kell alkalmazni (a_n – A) és (b_n – B) → 0-ra.
(T_4) ($a_n \to A$) ⇒ ($|a_n| \to |A|$)
(B) $||a_n| - |A|| \le |a_n - A|$
(T_5/i) ($b_n \to B$) ⇒ ($1 / b_n \to 1 / B$)
(T_5/ii) ($a_n \to A$) és ($b_n \to B$) ⇒ ($a_n/b_n \to A/B$)
(B) Biz $N_1(|B|/2)$ és N_2 $(\varepsilon^*|B|^2 / 2)$

Számsorozatok nagyságrendje:
$\log_n < n < 2^n < n! < n^n$
$\lim n^k a^n = 0$, ha a < 1 és k ∈ N+.

Egyszerűbb tételek:
(T) ($a_n \to A$) ⇒ ($\sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$)
(M) K-adik gyökre is igaz!
(T) ($a_n \to \infty$) ⇒ ($1 / a_n \to 0$)
(T) ($a_n \to 0$) ⇒ ($1 / |a_n| \to \infty$)
(T) <u>Limesz monotonitása</u>: ($a_n \to A$) és ($b_n \to B$) és ($a_n < b_n$) ⇒ (A ≤ B)
(B) d/3-as indirekt bizonyítás.
(T) <u>Rendőrelv</u>: ($a_n \to A$) és ($b_n \to A$) és ($a_n \le c_n \le b_n$) ⇒ ($c_n \to A$)
(T) Elégséges tétel konvergenciára: Ha an monoton növekedő (csökkenő) és felülről (alulról) korlátos, akkor konvergens.
(B) Cantor-axiómával. ($c_0 = a_1$, $d_0 = K_f$). Felezzük az intervallumokat.
(T) $(1 + 1/n)^n$ konvergens.
(B) Randa: $(1 + 1/n)^n$ = SZUMMA(n alatt k)*$(1 / n)^k$ ...

(T) *Minden* sorozatnak van *monoton* részsorozata. *(Segédtétel)*
(T) Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel: Minden *korlátos* sorozatnak van *konvergens* részsorozata. (Csak az R-ben igaz!)

(T) Cauchy-féle *konvergenciakritérium* (szükséges és elégséges tétel sorozat konvergenciájára) (¬B): Az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden ε-hoz van M(ε), amire $|a_m - a_n| < \varepsilon$, ha n,m > M.
(M) Ennek segítségével a konvergencia a határérték ismerete nélkül meghatározható.
(D) Az a_n sorozat *Cauchy-sorozat*, ha igaz rá a Cauchy-féle konvergenciakritérium.
(T) Cauchy-féle *konvergenciatétel*: Az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

(P) Biz szumma(1/k) divergens.

(D) Torlódási pont (sűrűsödési pont): *t* a_n torlódási pontja, ha bármely környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. (Van olyan részorozat, amelynek határértéke *t*).
(T) Egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan 1 véges torlódási pontja van.
(D) S := a_n torlódási pontjainak halmaza.
(D) Limesz szuperior: limsup a_n = supS
(D) Limesz inferior: liminf a_n = infS

Valós egyváltozós függvények

(D) Függvény: egyértékű reláció. Df → Rf. A Df minden pontjához hozzárendeli az Rf egy pontját.
(D) <u>Függvény határértéke</u>:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, ha:
– x_0 torlódási pontja Df-nek és
– Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, *x eleme Df-nek*!
(D) H halmazra szorítkozó határérték (jobb/baloldali): Df helyett Df metszet H-t kell behelyettesíteni.
(M) lim f(x) akkor és csak akkor létezik, ha létezik $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ és ezek *megegyeznek*.
(T) Cauchy-kritérium (¬B): lim f(x) = A, ha minden ε-hoz van δ(ε), amire minden $x_1, x_2 \in K_{x0,\delta}$ esetén $|f(x1) - f(x2)| < \varepsilon$.

(T) <u>Átviteli elv</u> (szükséges és elégséges tétel határérték létezésére):
lim f(x) = A ⇔ minden $x_n \to x_0$-ra $f(x_n) \to A$ ($x_n \in$ Df és $x_n \ne x_0$)
(B) *1) … 2) Indirekten (tfh. van olyan ε, amihez nincs d(ε)*

(D) Végesben és végtelenben vett határértékek definíciói.

Műveletek függvények körében:
(T) Ugyanazok a tételek igazak, amik a számsorozatokra igazak voltak, és ezek alapján lehet őket bebizni az átviteli elv segítségével:
(B) Összegre vonatkozó feltétel: minden $x_n \to x_0$ sorozatra $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$, ezért minden ilyen $x_n \to x_0$-ra: $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to A + B$.

Folytonosság:
(D) <u>Függvény folytonossága</u>:
f folytonos x_0-ban, ha: létezik $f(x_0)$ és minden ε-hoz van δ(ε), amire $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.
(M) Ezzel egyenértékű, hogy létezik a pontban a függvény határértéke, és az megegyezik a helyettesítési értékkel.
(T) Ha f és g folytonos x_0-ban, akkor cf, f + g, fg és f/g (g ≠ 0) is folytonos.
(T) Ha g folytonos x_0-ban és f folytonos $g(x_0)$-ban, akkor $f(g(x_0))$ is folytonos.

Szakadási helyek:
Elsőfajú szakadás:
Megszüntethető szakadás: a jobb és baloldali határérték létezik, véges és egyenlő, de ez nem egyenlő a helyettesítési értékkel (vagy az nem létezik)
Véges ugrás: léteznek a véges határértékek, de azok nem egyeznek meg.
Másodfajú szakadás:
Minden, ami nem az előző (pl. végtelen határérték)

(T) $\lim_{x \to x_0} \sin(x)/x = 1$:
(B) Háromszöges módszer (OAP 3szög, OAP ív és OAB háromszög területét hasonlítani, utána rendőrelv)

Folytonos függvények tulajdonságai:
(D) f folytonos (a,b)-n, ha minden x ∈ (a,b)-ben folytonos
(D) f folytonos [a,b]-n, ha folytonos (a,b)-n és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.
(D) b ∈ H belső pont, ha minden Kb-re Kb eleme H-nak.
(D) h határpont, ha minden Kh-ra Kh metszet H nem üres halmaz, és Kh metszet H komplementer nem üres halmaz.
(D) Nyílt halmaz: minden pontja belső pont
(D) Zárt halmaz: a nyílt halmaz komplementere
(D) Kompakt halmaz: korlátos és zárt halmaz.

(T) Ha f folytonos x_0-ban és $f(x_0) > c$, akkor létezik olyan δ > 0, amire f(x) > c, ha $x \in K_{x0,\delta}$.
(B) g(x) := f(x) – c; A := $g(x_0)$. A g függvény A/2-es környezetét kell nézni, majd visszatolni az eredeti f(x)-be.
(T) <u>Bolzano tétel</u>: ha f folytonos [a,b]-ben és f(a) < c < f(b), akkor létezik ξ ∈ (a,b), amire f(ξ) = c.
(B) Cantor axiómás biz, finomítani kell az intervallumokat: f ((a + b) / 2)-t kell vizsgálni, hogy kisebb/nagyobb-e *c*-nél. A c végig az intervallumban marad. Cantor miatt létezik ξ, ami az összes metszetében benne van, és az intervallum hossza ($a_n – b_n$) tart 0-hoz. Ezért rendőrelvvel ($0 < a_n – ξ < a_n – b_n$) a_n és b_n is

tart 0-hoz. A folytonosság és az átviteli elv alapján: $f(a_n) = f(\xi) = f(b_n)$ Mivel $f(a_n) < c \Rightarrow \lim f(a_n) \le c$; mivel $f(b_n) > c \Rightarrow \lim f(b_n) \ge c$. Így $f(\xi) = c$.

(K1) Ha f folytonos [a,b]-ben, és $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$, akkor az egyenletnek legalább egy gyöke van (a,b)-ben.

(K2) Páratlan fokszámú polinomnak legalább egy valós gyöke van. (Egyik végen plusz, másik végen $-\infty$-hez tart)

(T) <u>Weierstrass I. tétele</u>: Ha f folytonos az [a,b] intervallumon, akkor ott f korlátos.

(T) <u>Weierstrass II. tétele</u>: Ha f folytonos az [a,b] intervallumon, akkor ott felveszi infimumát, ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma.

(B) Weierstrass **I.** bizonyítása**:** Indirekten, tfh. nem korlátos felülről. létezik $x_{1..n}$ sorozat, amelyeknek elemei nagyobbak 1..n-nél. Mivel a sorozat korlátos, a BW-kiv.tétel miatt van konv részsorozat: $x_{ni} \to x_0$. $a \le \lim x_{ni} = x_0 \le b$. Tehát $x_{ni} \to x_0$, de mivel $f(x_{ni}) \to$ végtelen, ami ellentmondás, mert f x_0-ban folytonos, tehát oda kéne tartania.

(D) Egyenletes folytonosság: Az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van $\delta(\varepsilon)$ (A-ban *közös*!): $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ (x_1,x_2 eleme A)

(M) Nem egyenletes folytonosság bizonyításához olyan $x_{n(1)}$, $x_{n(2)}$ sorozatokat kell keresni, amik különbsége $(x_1 - x_2)$ tart 0-hoz, de a függvénybe behelyettesítva $f(x_1) - f(x_2)$ mindig egy bizonyos érték fölött van (így nem szorítható ε alá).

(T) Ha f folytonos az [a,b] zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos. ($\neg$B)

(T) Ha f folytonos $[a,\infty)$-en, és végtelenben vett határértéke véges, akkor f egyenletesen folytonos $[a,\infty)$-en. ($\neg$B)

Differenciálszámítás

(D) Differenci*a*hányados: $\Delta f / \Delta x = (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) / \Delta x$

(D) Differenci*ál*hányados: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) / h$ *($K_{x0,d} \in Df$)*

Jobb / baloldali derivált

(D) f differenciálható (a,b)-ben, ha minden $x \in (a,b)$-re létezik a diffhányados.

(D) f differenciálható [a,b]-ben, ha diffható (a,b)-ben és a-ban jobbról, b-ben balról diffható.

(T) <u>Szükséges és elégséges tétel diffhatóságra</u>:
f akkor és csak akkor diffható x_0-ban, ha $K_{x0,\delta} \in$ Df, $h < \delta$-ra:
$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = A\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h$
A csak x_0-tól függhet, és $\lim \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$)

(B) Szükségesség: ha h nem nulla, akkor a diffhányados = $f'(x_0) + \varepsilon$, átszorozni.
Elégségesség: limeszt venni, $\varepsilon(h)$ eltűnik.

(T) Ha f deriválható x_0-ban, akkor ott folytonos.

(B) Szüks/elégs tétel miatt. Átszorozni, határértéket venni.

(D) Differenciál: $df = f'(x_0)\cdot h$

(D) Érintő egyenes egyenlete: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

(T) Differenciálási szabályok. $(1 / g)' = -(g' / g*g)$

(T) <u>Láncszabály</u>: (összetett függvény deriválása) Ha f differenciálható $K_{x,\delta 1}$-ben, és g differenciálható $K_{f(x),\delta 2}$-ben, akkor g o f is deriválható x-ben és $(g \circ f)' = g(f(x))' = g'(f(x))*f'(x)$ ($\neg$B)

Inverz függvény:
(T) f szig mon $\Rightarrow$ invertálható
$f^{-1'} = 1 / (f'(f^{-1}(x_0)))$
$f' = 1 / (f^{-1}(f(x_0)))$

Diffszámítás középértéktételei

(D) f-nek **lokális maximuma** van az értelmezési tartomány belső c pontjában, ha létezik olyan környezete, amiben $f(x) \le f(c)$, ha x ebben a környezetben van.

(T) Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére: ha f a c helyen diffható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$

(T) <u>Rolle-tétel</u>: Ha f folytonos [a,b]-n, diffható (a,b)-n és f(a) = f(b), akkor létezik $\xi \in (a,b)$, amire $f'(\xi) = 0$.

(B) W II miatt van minimuma és maximuma. Ha belül veszi fel, akkor az előző tétel miatt $f'(c) = 0$.

(T) <u>Lagrange-féle középértéktétel</u>: Ha f folytonos [a,b]-n és diffható (a,b)-n, akkor létezik $\xi \in (a,b)$, amire $f'(\xi) = [f(b) - f(a)] / (b - a)$.

(B) $h(x) = f(a) + [f(b) - f(a)] / (b - a) * (x - a)$ *(húr egyenlete)*
$g(x) := f(x) - h(x) \Rightarrow g(a) = g(b) \Rightarrow$ Rolle t. miatt van olyan ξ, amire $g'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \dots$

(T) <u>Cauchy-féle középértéktétel</u>: Ha f és g folytonos [a,b]-n és diffható (a,b)-n, és $g'(x) \ne 0$, akkor létezik $\xi \in (a,b)$, amire $f'(\xi) / g'(\xi) = [f(b) - f(a)] / [g(b) - g(a)]$

(B) $h(x) := [f(b) - f(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$
Mivel $h(a) = h(b) \Rightarrow$ Rolle t. miatt van olyan ξ, ahol $h'(\xi) = 0$, rendezni.

(T) Ha f folytonos [a,b]-n, diffható (a,b)-n és ott $f'(x) \equiv 0$, akkor $f(x) \equiv c$.

(B) Lagrange miatt minden $[x1,x2] \in (a,b)$-re létezik ξ, amire $f'(\xi) = [f(x_2) - f(x_1)] / (x_2 - x_1)$. Mivel $f'(\xi) = 0$, $f(x_1) = f(x_2)$.

(T) <u>Az integrálszámítás I. alaptétele</u>. Ha f és g folytonos [a,b]-n, diffható (a,b)-n és ott $f'(x) = g'(x)$, akkor létezik C eleme R, amire **$f(x) = g(x) + C$**. (Tehát csak egy állandóban különböznek).

(B) Lagrange miatt minden $[x_1,x_2] \in (a,b)$-re létezik ξ, amire $f'(\xi) = [f(x_2) - f(x_2)] / (x_2 - x_1)$. Mivel $f'(\xi) = 0$, $f(x_1) = f(x_2)$.

L'Hospital szabály

(T) <u>L-Hospital szabály:</u> Legyen f és g differenciálható $K_{\alpha,\delta}$-ban és itt $g(x) \ne 0$, $g'(x) \ne 0$ és $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$. **Ha $\lim_{x\to\alpha} f'(x) / g'(x) = \beta$, akkor $\lim_{x\to\alpha} f(x) / g(x) = \beta$** (Itt alfa x_0, x_0, $0\pm$, $\pm\infty$ lehet, β pedig b, $\pm\infty$ lehet)

(B) $f(x0) := 0$ és $g(x0) := 0$. Ekkor a Cauchy-féle középértéktétel miatt:
$f(x) / g(x) = [f(x) - f(x0)] / [g(x) - g(x0)] = f'(\xi) / g'(\xi)$. Határértéket kell venni mindkét oldalon.

Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai:

(D) f alulról konvex I-n, ha minden $x_1,x_2 \in$ I-re $f(x) \le h_{x1,x2}(x)$, ha $x \in (x_1,x_2)$ (ahol a h az x_1,x_2-n áthaladó húr)

(T1) f **monoton nő** $\Leftrightarrow$ $f'(x) \ge 0$ (és ugyanez szig monra és csökkenésre)

(B) a) f monoton nő $\Rightarrow$ a diffhányados +/+ vagy –/– alakú (pozitív)
b) minden $x_1 < x_2$-re alkalmazható a Lagrange-ktétel: $f(x_2) - f(x_1) / x_2 - x_1 = f'(\xi) > 0$. Mivel $x_2 - x_1 > 0$, $f(x_2) - f(x_1)$ is nagyobb nullánál $\Rightarrow$ monoton.

(T2) f ' monoton nő $\Leftrightarrow$ f konvex

(B) b) (csak viszafelé biz): ábrát fölrajzolni (m, m1, m2 *meredekségű* húrok). Mivel m1 < m < m2, lim *m1* = $f'(x_1) \le m \le f'(x_2)$ = lim *m2* $\Rightarrow$ tehát f ' monoton nő.

Diffható függvények lokális tulajdonságai

(T1) Ha f diffható x_0-ban és
1. **f lokálisan nő** x_0-ban $\Rightarrow f'(x_0) \ge 0$.
2. f lokálisan nő x_0-ban $\Leftarrow f'(x_0) > 0$.

(T2) Ha $K(x_0,\delta) \in D_f$ és $K(x_0,\delta) \in D_{f'}$, akkor diffható függvény esetén **lokális szélsőérték** létezésének
1. szükséges feltétele $f'(x_0) = 0$
2. elégséges feltétele: $f'(x_0) = 0$ és vagy f ' előjelet vált, vagy f '' <> 0.

(T3) Ha $K(x_0,\delta) \in D_{f''}$ akkor diffható függvény esetén **inflexiós pont** létezésének
3. szükséges feltétele $f''(x_0) = 0$
4. elégséges feltétele: $f''(x_0) = 0$ és vagy f '' előjelet vált, vagy f ''' <> 0.

Szélsőérték keresése: Zárt intervallumon szélsőérték lehet…
1. Az intervallum végpontjaiban
2. Ahol f nem diffható
3. Ahol $f'(x) = 0$

Integrálszámítás

(D) Primitív függvény: f-nek F az I intervallumon primitív függvénye, ha minden x e I-re $F'(x) = f(x)$.

(T) <u>Integrálszámítás első főtétele</u>: Ha f-nek F és G primitív függvénye I-n, akkor létezik C, amire $F(x) = G(x) + C$ (x e I). Tehát a prim fv-ek csak egy állandóban különböznek. *(Megj: csak intervallumra igaz!!!)*

(D) Határozatlan integrál: a primitív függvények összessége.

(T) Integrálási szabályok

(D) Alsó közelítő összeg: szumma $m_k\Delta x_k$ ($m_k = \inf f(x)$)

(D) Felső közelítő összeg: szumma $M_k\Delta x_k$ ($M_k = \sup f(x)$)

(D) Felosztás finomsága: $\Delta F = \max \Delta x_k$

Minden határon túl finomodó felosztások sorozata (m.h.t.f.f.s.): $\lim \Delta F = 0$.

(T) Összegek tulajdonságai:
- $s_F \le S_F$
- $s_F \le s_{F^*} \le S_{F^*} \le S_F$ (Az alsó közelítő összeg új osztópont elhelyezésével nem csökkenhet)
- $s_{F1} \le S_{F2}$ (bármely különböző felosztásokra)
- $\exists \sup \{s_F\} = h$ (Darboux-féle alsó integrál)
- $\exists \inf \{S_F\} = H$ (Darboux-féle felső integrál)
- $h \le H$

(D) <u>Határozott integrál definíciója</u>:
Legyen f: [a,b] $\Rightarrow$ R korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy a függvény **Riemann-szerint integrálható**, ha h = H = I. Ezt az I számot a függvény [a,b]-beli határozott integráljának nevezzük és I = ... módon jelöljük.

A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei

(T) Segédtétel: ha Fn mhtffs, akkor s_{Fn} és S_{Fn} konvergensek és lim s_{Fn} = h és lim S_{Fn} = H.
(T1) 1. Ha $f \in R_{[a,b]}$, akkor minden mhtffs-ra s_{Fn} = lim S_{Fn} = I.
2. Ha létezik mhtffs, amire s_{Fn} = lim S_{Fn} = I, akkor $f \in R_{[a,b]}$.
(B) Segédtétellel
(D) Oszcillációs összeg: $O_F = S_F - s_F$.
(T2) $f \in R_{[a,b]} \Leftrightarrow$ minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik F, amire $O_F < \varepsilon$.
(B) $\varepsilon/2$ és előző tételekkel.

(D) Integrálközelítő összeg: ua. mint S_F, csak reprezentáns pontokkal: $f(\xi_k)$.
Jele: $\boldsymbol{\sigma_F}$
(T3) $f \in R_{[a,b]} \Leftrightarrow \lim \sigma_{Fn} = I$

Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra

(T1) f korlátos és monoton $\Rightarrow f \in R_{[a,b]}$
(B) Egyenletes felosztás, oszcillációs összegekkel
(T2) $f \in C^0_{[a,b]} \Rightarrow f \in R_{[a,b]}$
(B) Oszcillációs összegekkel
(T3) f korlátos és egy pont kivételével folytonos $\Rightarrow f \in R_{[a,b]}$
(B) Oszcillációs összegekkel, intervallumot három részre osztjuk
(T4) f korlátos és véges sok pont kivételével folytonos $\Rightarrow f \in R_{[a,b]}$
(T4) Egy Riemann-integrálható fv értékét véges sok pontban megváltoztatva a függvény integrálható marad, és az integrál értéke is ugyanaz.

Newton-Leibniz tétel

(T) <u>Newton-Leibniz tétel</u>: Ha f Riemann-integrálható [a,b]-n és itt létezik primitív függvénye (F), (azaz minden x e [a,b]-re F '(x) = f(x)), akkor $\boldsymbol{\int f(x)dx = F(b) - F(a)}$
(B) mhtffs-re y irányú változások + Langrange.
(M) Mindkét feltétel fontos a Newton Leibniz tételben!
(M1) Nem integrálható, de van primitív függvény: $F = x^2 \sin(1/x^2)$ F ' = f nem korlátos $\Rightarrow$ nem integrálható.
(M2) Integrálható, de nincs primitív függvény: f = sgn (...), mert a deriváltfüggvénynek nem lehet elsőfajú szakadása.

A Riemann-integrál tulajdonságai

(T) Ha $f \in R_{[a,c]}$ és $f \in R_{[c,b]}$, akkor $f \in R_{[a,b]}$.
(T) Ha $f \in R_{[a,b]}$, akkor $f \in R_{[a,c]}$, ha c e (a,b).
(T) $R_{[a,b]}$ lineáris tér (vektortér).
(T) $f \in R_{[a,b]}$, és $f(x) \geq 0$, akkor a integrál is ≥ 0.

Az integrálszámítás középértéktétele

(D) Integrálközép: $\boldsymbol{\chi = \int f(x)dx / (b - a)}$
(T) 1. Ha $f \in R_{[a,b]}$, M = sup {f(x)}, m = inf {f(x)}, akkor $m \leq \chi \leq M$.
2. Ha $f \in C^0_{[a,b]}$, akkor létezik ξ, amire $f(\xi) = \chi$..
(B) 1. Integrál monotonitásával, m(b–a)
2. WII miatt f felveszi m-et és M-et, és erre az intervallumra igaz Bolzano.
(T) $|\int f(x)dx| \leq \int|f(x)|dx$

Integrálfüggvény

(D) Integrálfüggvény: $f \in R_{[a,b]}$. Az $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ az f függvény integrálfüggvénye ($x \in [a,b]$).
(T) <u>Az integrálszámítás II. alaptétele</u>:
$f \in R_{[a,b]}$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $x \in [a,b]$
1. Az integrálfüggvény folytonos [a,b]-n.
2. Ha f folytonos $x \in (a,b)$-ben, akkor F diffható x_0-ban, és F' = f.

Improprius integrál

Ha az **intervallum nem korlátos** (végtelenig megy), vagy a **függvény nem korlátos** (Pl. 1 / x a 0-ban), akkor kell improprius integrált számítani. Fel kell venni egy változót, ami tart végtelenhez vagy a nem korlátos függvényérték helyéhez, és limest venni.
Ha $-\infty$-től ∞-ig nézzük, két változó van.

Tulajdonságok:
(T) Cauchy-kritérium: improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha minden ε-hoz van $\Omega(\varepsilon)$, hogy minden $\omega_1,\omega_2 > \Omega$-ra az ω_1-től ω_1-ig vett integrál kisebb mint ε.
(T) Ha improprius integrál |f(x)| konvergens, akkor f(x) is konvergens.
(T) Majoráns, minoráns kritériumok.

Készítette: Visontay Péter (sentinel@sch.bme.hu)
Info99: <u>http://info99.sch.bme.hu</u>