Keresztfélév - 2. vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. a) Mikor nevezünk egy valószínűségi változót abszolút folytonosnak?

   b) Hogyan definiáljuk két valószínűségi változó kovarianciáját? (Az állításon elhangzott definíció és a kovariancia kiszámítására tipikusan alkalmazott (szintén előadáson szerepelt) formula is elfogadható.)

   Megoldás:

   a)

   Az X valószínűségi változót abszolút folytonosnak nevezzük, ha

   (1 pont) létezik olyan $f_X : \mathbb{R} \to [0; \infty)$ *nemnegatív* függény,

   (0 pont) amelyre az $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\, dy$ Riemann-integrál létezik,

   (4 pont) és minden $t \in \mathbb{R}$ esetén
   $$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(y)\, dy,$$
   ahol F_X az X eloszlásfüggvénye.

   Ha a megoldó csak annyit ír, hogy abszlút folytonos egy változó, amennyibel létezik sűrűségfüggvénye, akkor 2 pont jár.

   b)

   (5 pont) Legyenek $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók. Ekkor X és Y kovarianciája a
   $$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$
   várható érték, amennyiben létezik.

   A fenti definíció helyet a
   $$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y),$$
   formula is megfelel.

2. Egy urnában 2 fehér és 2 piros golyó van. Addig húzunk egyesével és visszatvés nélkül az urnából, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje X a szükséges húzások számát. Adjuk meg az X eloszlását, várható értékét és szórását.

   Megoldás:

   (1 pont) Mivel összesen két fehér golyó van az uránban, így legkésőbb a harmadik húzásnál már biztosan pirosat húzunk, tehát az X értékkészlete: $\text{ran}X = \{1, 2, 3\}$.

   (1 pont) Ha $X = 1$ akkor az azt jelenti, hogy egyből pirosat húztunk, tehát $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$.

   (1 pont) Ha $X = 2$, akkor elsőre fehéret húztunk, majd a fennmaradó 2 piros és 1 fehér golyóból pirosat húztunk, azaz $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

   (1 pont) Végül $X = 3$ esetén az első kettő húzás fehér (harmadikra ekkor már biztosan, azaz 1 valószínűséggel pirosat húzunk), így $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Ezzel megadtuk az X eloszlását.

   (1 pont) Az X válrható értéke $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3)$

   (1 pont) $= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{5}{3}$.

   (1 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó tétel szerint

   (1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3^2 \cdot \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} = \frac{10}{3}$

   Az utóbbi két pont úgy is megkapható, ha valaki meghatározza az X^2 eloszlását (1 pont), és a várható érték definícióját használva kapja meg $\mathbb{E}(X^2)$-et (1 pont).

   (1 pont) A szórásnégyzetre tanult képlet szerint $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$,

   (1 pont) amiből a szórás $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,7454$.

3. Egy telefonfülkéből szeretnénk hívást indítani, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Tegyük fel, hogy az illető telefonbeszélgetésének időtartama percben mérve folytonos, örökifjú eloszlású 3 várható értékkel. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés további 3 percnél tovább tart, feltéve, hogy 3 percnél tovább tartott?

   Megoldás:

   (1 pont) Legyen X a telfonbeszélgetés időtartama. Mivel X folytonos és örökifjú, így $X \sim Exp(\lambda)$ valamilyen $\lambda > 0$ paraméterrel.

   (1 pont) Tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 3$, így $\lambda = \frac{1}{3}$.

   (1 pont) Az első kérdéses valószínűség $\mathbb{P}(X > 3)$

   (1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(X < 3)$

   (2 pont) $= 1 - F_X(3)$, ahol $F_X(t) = 1 - e^{-t/3}$ az X eloszlásfüggvénye.

   (1 pont) Tehát $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-1} \approx 0{,}3679$.

   (1 pont) A második kérdéses valószínűség $\mathbb{P}(X > 3 + 3 \mid X > 3)$,

   (2 pont) ami az örökifjú tulajdonság miatt éppen $\mathbb{P}(X > 3) = 0{,}3679$.

4. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

   a) Függetlenek-e az $\{X = 2\}$ és $\{Y = 2\}$ események?

   b) Függetlenek-e az $\{X < 2\}$ és $\{Y < 2\}$ események?

   c) Függetlenek-e az X és Y változók?

Y \ X	0	1	2
0	1/10	1/10	1/10
1	1/10	1/10	3/10
2	1/20	1/20	1/10

Megoldás:

a)

(1 pont) $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=2) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$,

(1 pont) $\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$,

(1 pont) így $\mathbb{P}(X=2, Y=2) = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=2)$, azaz a két esemény független.

b)

(1 pont) $\mathbb{P}(X<2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(1 pont) $\mathbb{P}(Y<2) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{4}{5}$

(1 pont)

$\mathbb{P}(X<2, Y<2) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{2}{5}$

(1 pont) $\mathbb{P}(X<2, Y<2) = \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \mathbb{P}(X<2)\,\mathbb{P}(Y<2)$, tehát a két esemény független.

c)

Például:

(1 pont) $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2}$

(1 pont) $\mathbb{P}(Y=0)\,\mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{20}$

(1 pont) $\neq \mathbb{P}(X=2, Y=0) = \frac{1}{10}$, tehát a változók nem függetlenek.

5. Legyenek X és Y valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy az X-nek az Y-ra vett lineáris regressziója $\frac{3}{2}Y + 2$, míg az Y-nak az X-re vett lineáris regressziója $\frac{1}{2}X - 1$.

   a) Határozzuk meg az X és Y változók várható értékét.

   b) Határozzuk meg Y szórásnégyzetét, ha tudjuk, hogy X szórásnégyzete 6.

   Megoldás:

   (2 pont) Az X-nek az Y-ra vett lineáris regressziója $\beta_1 Y + \alpha_1$, ahol

$$\beta_1 = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(Y)} = \frac{3}{2}, \qquad \alpha_1 = \mathbb{E}(X) - \beta_1\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - \frac{3}{2}\,\mathbb{E}(Y) = 2,$$

   (2 pont) míg az Y-nak az X-re vett lineáris regressziója $\beta_2 X + \alpha_2$

$$\beta_2 = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_2 = \mathbb{E}(Y) - \beta_2\,\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X) = -1,$$

   a)

   (1 pont) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\mathbb{E}(X) - \frac{3}{2}\,\mathbb{E}(Y) = 2,$$
$$\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X) = -1.$$

(1 pont) Az első egyenlet felét a másodikhoz hozzáadva $\frac{1}{4}\,\mathbb{E}(Y) = 0$, azaz $\mathbb{E}(Y) = 0$ adódik.

(1 pont) Így az első egyenletből $\mathbb{E}(X) - \frac{3}{2}\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = 2$.

b)

(1 pont) A β_2-re adott formulából $\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{D}^2(X) = 3$.

(1 pont) A β_1-re adott formulából $\frac{3}{2}\,\mathbb{D}^2(Y) = \operatorname{cov}(X, Y) = 3$,

(1 pont) azaz $\mathbb{D}^2(Y) = 2$.

6. Egy vizsgán 60 kérdésre kell válaszolni, minden kérdés esetén négy lehetséges válasz közül lehet választani, melyekből pontosan egy helyes. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó minden előzetes tudás nélkül tölti ki a sort, és minden egyes kérdésnél függetlenül és véletlenszerűen tippeli meg a választ. Adjuk meg az általa adott helyes válaszok eloszlását. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy több, mint 20 helyes választ ad így?

Megoldás:

(3 pont) A válaszok választása hatvan független kísérlet, ahol a siker bekövetkezésének valószínűsége $\dfrac{1}{4}$, így az helyes válaszok X számának eloszlása binomiális 60 és $\dfrac{1}{4}$ paraméterekkel: $X \sim B\left(60; \dfrac{1}{4}\right)$

(1 pont) Az X várható értéke $60 \cdot \dfrac{1}{4} = 15$,

(1 pont) és szórása $\sqrt{60 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}3541$.

(0 pont) A kérdéses valószínűség $\mathbb{P}(X > 20)$,

(2 pont) az X változót sztenderdizálva az ekvivalens

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-15}{3\sqrt{5}/2} > \frac{20-15}{3\sqrt{5}/2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X-15}{3\sqrt{5}/2} > \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X-15}{3\sqrt{5}/2} > 1{,}4907\right)$$

valószínűséget kapjuk.

(1 pont) A de Moivre–Laplace-tétel szerint

(1 pont) ez közelítőleg $1 - \Phi(1{,}4907)$, ahol Φ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye,

(1 pont) ennek értéke pedig $1 - 0{,}9319 = 0{,}0681$.