ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. máj. 23.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (7+4+4=15 pont)

a) A q paraméter függvényében vizsgálja meg a $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ sor viselkedését!

Állítását a konvergencia esetére <u>bizonyítsa be</u>!

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{2^{2k-1}} = ?$ (Adja meg a sor összegét!)

c) Konvergens-e a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k + 4^{2k}}$ sor? Indokoljon!

a) $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}$, ha $|q|<1$. Egyébként div. 2

$s_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} \underset{q \neq 1}{=} 1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{1-q}$,

ha $|q|<1$, mert ekkor $q^n \to 0$ 5

b.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)(-3)^k}{2^{-1} \cdot 4^k} = -6 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = -6 \frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$ 4

$\left(|q|<1, \text{ mert } q = -\frac{3}{4}\right)$

c.) $a_k = \frac{5^k}{3^k + 16^k} < \frac{5^k}{16^k} = \left(\frac{5}{16}\right)^k$

$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{5}{16}\right)^k$ konv. geom. sor $\left(0 < q = \frac{5}{16} < 1\right)$

$\underset{\text{majoráns kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_k$ konv.

2. feladat (14 pont)

a) Hogy szól a függvényekre kimondott átviteli elv?

Bizonyítsa be, hogy $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ nem létezik!

b) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = ?$, $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = ?$

an1v110523/1

a.) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall x_n \to x_0$-ra $(x_n \in D_f,\ x_n \neq x_0)$

$f(x_n) \to A$ (3)

$f(x) := \sin\frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} = n\pi$: $x_n^{(1)} = \frac{1}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $f(x_n^{(1)}) = \sin n\pi \to 0$

$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$: $x_n^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $f(x_n^{(2)}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \to 1$

Két különböző pontsorozatra különböző határértékeket kaptunk $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \nexists$ (5)

b.) $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0}\ \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{korl.}} = 0$ (3)

$\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0+0} \frac{\sin u}{u} = 1$ (3)

3. feladat (13 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{4}{x^2}, & \text{ha} \quad x < 0 \\ b, & \text{ha} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sin(3x)}{2x}, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Megválasztható-e "b" értéke $(b \in \mathbb{R})$ úgy, hogy f folytonos legyen $x = 0$-ban?
b) Létezik-e $f'(0)$?
Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

a.) $\boxed{6}$

$f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$ (2)

$\frac{4}{+0} \to \infty$

$f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ (3)

$f(0-0) \neq f(0+0) \Rightarrow \nexists\ b$, hogy f folytonos legyen $x=0$-ban. (1)

b.) $\boxed{7}$ $f'(0) \nexists$, mert f nem folytonos $x=0$-ban. (1)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{4}{x^2}\right)^2} \quad 4 \cdot \dfrac{-2}{x^3}, & \text{ha } x<0 \quad (3) \\ \dfrac{3(\cos 3x)\cdot 2x - (\sin 3x)\cdot 2}{(2x)^2}, & \text{ha } x>0 \quad (3) \end{cases}$$

an1o110523/2.

4. feladat (~~12~~ 13 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = ?$ (Nem használhat L'Hospital szabályt!)

b) Bizonyítsa be, hogy a $\sin x$ deriváltja $\cos x$!
A felhasznált nevezetes limeszt nem kell bizonyítania!

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\underbrace{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{0} = 0$

b.) $f(x) := \sin x$

$\boxed{8}$ $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$ (3)

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin x \cosh + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$ (2)

$= \lim\limits_{h\to 0} \sin x \underbrace{\dfrac{\cosh - 1}{h}}_{\to 0 \text{ (a) feladat)}} + \cos x \cdot \underbrace{\dfrac{\sin h}{h}}_{\to 1} = \cos x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

(3)

5. feladat (8 pont)*

A differenciálható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$\frac{1}{x\,y} + 3\,x^3\,y^3 = -4$$

implicit függvénykapcsolatot és $y(1) = -1$. Határozza meg $y'(1)$ értékét!
Írja fel $y(x)$ függvény $x = 1$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét!

$-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\dfrac{-1}{y^2}y' + 3 \cdot 3x^2y^3 + 3x^3\,3y^2 \cdot y' = 0$ (4)

$x = 1\,,\ y = -1$

$1 - y'(1) + 9(-1) + 9\,y'(1) = 0 \implies y'(1) = 1$ (2)

$y_é = y(1) + y'(1)(x-1) = -1 + (x-1)$ (2)

6. feladat (6+4=10 pont)*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^2}\,dx = ?$

a.) $\boxed{6}$

$$\lim_{\substack{\omega_1\to-\infty \\ \omega_2\to\infty}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty \\ \omega_2\to+\infty}} \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\omega_1}^{\omega_2} =$$

(1) (3)

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{\omega_1\to-\infty \\ \omega_2\to\infty}} \left(\operatorname{arctg}\frac{\omega_2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

(1) (1)

b.) $\boxed{4}$

$$\int \frac{x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{4+x^2}}_{f'/f}\,dx = \frac{1}{2}\ln(4+x^2)+C$$

7. feladat (5+4+7=16 pont)*

Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int x\cdot\cos(3x+1)\,dx = ?$

a.) $\boxed{5}$

$$\int \cos x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,dx = \int \Big(\cos x - \underbrace{\cos x \sin^2 x}_{f' f^2}\Big)\,dx =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

b) $\boxed{4}$

$$\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi+0-(0+0)) = \frac{\pi}{2}$$

c.) $\boxed{7}$

$$\int x\cdot\cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}x\sin(3x+1) - \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,dx =$$

$u = x \qquad v' = \cos(3x+1)$

$u' = 1 \qquad v = \dfrac{\sin(3x+1)}{3}$

$$= \frac{1}{3}x\sin(3x+1) - \frac{1}{3}\,\frac{-\cos(3x+1)}{3} + C$$

8. feladat (11 pont)*

Vezesse be a $t = e^x$ új változót és határozza meg az alábbi integrált!

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+4)}\, dx$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 13 pontot el kell érni!

$t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$ (2)

$$\int \frac{\cancel{t}}{(t+1)(t+4)} \frac{1}{\cancel{t}} dt = \int \frac{1}{(t+1)(t+4)} dt$$

(2)

$$\frac{1}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}$$

$$1 = A(t+4) + B(t+1)$$

$t=-1$: $1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$t=-4$: $1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4}\right) dt = \frac{1}{3}\left(\ln|t+1| - \ln|t+4|\right) + C$$

(4) (2)

$$I = \frac{1}{3}\left(\ln(e^x+1) - \ln(e^x+4)\right) + C$$

(1)

an1v-110523/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (5+5=10 pont)

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}+8}{2^{3n}+5^n} = ?$ *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^2} = ?$

a.) $\boxed{5}$

$$a_n = \frac{\frac{1}{3}3^n + 8}{8^n + 5^n} = \underbrace{\frac{3^n}{8^n}}_{=\left(\frac{3}{8}\right)^n \to 0} \cdot \frac{\frac{1}{3} + 8\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{8}\right)^n} \to 0 \cdot \frac{\frac{1}{3}+0}{1+0} = 0$$

b.)

$$b_n = \frac{\left(1 + \frac{3/2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1/2}{n^2}\right)^{n^2}} \to \frac{e^{3/2}}{e^{1/2}} = e$$

10. feladat (10 pont)

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{x+4}$$

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton!

Van-e a függvénynek lokális szélsőértéke? Ha igen, milyen jellegű?

$x=-4$: szakadási hely

$x \neq -4$: $\quad f'(x) = \frac{3(x-2)^2(x+4) - (x-2)^3 \cdot 1}{(x+4)^2}$ (2) $= \frac{(x-2)^2(2x+14)}{(x+4)^2}$ (2)

$(x-2)^2 \geq 0$, $(x+4)^2 > 0$

	$(-\infty,-7)$	-7	$(-7,-4)$	-4	$(-4,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$	szak. hely	$\nearrow$		$\nearrow$

f szig. mon. csökken: $(-\infty,-7)$-en (2)

f szig. mon. nő: $(-7,-4)$ és $(-4,\infty)$- intervallumokon (3)

lok. min: $x=-7$-ben (1)